3. Ільченко В.Р. та ін. Фізика: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл/ В.Р.Ільченко, С.Г.Куликовський, О.Г.Ільченко. – Полтава: Довкілля-К, 2007. – 160 с.:л.
4. Кодлюк Я.П. Шкільний підручник в умовах розвивального навчання / Я.П.Кодлюк // Проблеми сучасного підручника: Зб. наук праць / Редкол. – К.: Педагогічна думка, 2003. – Вип. 3. – С. 5-9.
5. Коршак Є.В. та ін. Фізика, 7 кл.: Підруч. для загальноосвіт. шк. / Є.В.Коршак, О.І.Ляшенко, В.Ф.Савченко. – К.: Перун, 2000. – 160 с.:іл.
6. Фурман А.В., Отаманенко С.І., Клименко В.В., Цедик О.І. Орієнтири концепції навчальної книги та підручника / А.В.Фурман, С.І.Отаманенко, В.В.Клименко, О.І.Цедик // Рідна школа. – 1993. – № 1. – С. 17-20.
7. Фурман А.В. Розвивальний підручник: підходи до розуміння і створення / А.В.Фурман // Рідна школа. – 1995. – № 6. – С. 45-49.

Сосна О.

Науковий керівник – доц. Лотоцький В. А.

ПРО ДЕЯКІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОДОДАТНІХ РЯДІВ

Основним питанням, яке ставлять при розгляді рядів, зокрема числових, є питання збіжності чи розбіжності ряду. Часто, щоб дізнатися відповідь, ми порівнюємо даний в задачі ряд з рядом, збіжність чи розбіжність якого знаємо заздалегідь. Для цього використовуємо різні ряди, деякі з них — це гармонійний, узагальнено-гармонійний, геометрична прогресія і т.д. В результаті виникає цілком логічне запитання: чи існує такий універсальний збіжний чи розбіжний ряд, порівняння з яким дозволило б зробити висновок про збіжність чи розбіжність будь-якого взятого наперед ряду з невід'ємними членами.

Для того, щоб відповісти на це питання, розглянемо таке.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний знакододатній ряд і $S_n = a_1 + ... + a_n$. Дослідимо на збіжність такий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$. Для цього скористаємося критерієм Коші збіжності знакододатнього ряду. Будемо мати,

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + ... + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{a_{n+1}}{S_{n+p}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+p}} + ... + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

Зафіксуємо *n* і з'ясуємо поведінку $\frac{S_n}{S_{n+p}}$, цей вираз при збільшенні $p \to \infty$ буде прямувати до 0, а отже , існує таке *p*, що взявши $\varepsilon = \frac{1}{2}$ отримаємо $\frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$ для всіх *p* починаючи з деякого. Тому будемо мати,

$$1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, ми для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall n \in N$ завжди знайдемо *p* (залежне від *n*) таке, що $\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + ... + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > \frac{1}{2}$, а це за критерієм Коші означає, що ряд є збіжним.

З цього прикладу бачимо, що такого «найменш розбіжного» ряду немає, бо, як ми тільки що показали, для довільного розбіжного знакододатнього ряду завжди можна знайти інший розбіжний знакододатній ряд, члени якого менші від членів заданого ряду.

До речі, повертаючись до розглянутого прикладу, якщо замість ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ взяти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\ 2}}$, то такий ряд вже буде збіжним. Справді, знову скориставшись критерієм Коші, будемо мати,

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}^2}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}^2}+\ldots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}^2}\le\frac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+1}\cdot S_{n+2}}+\ldots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p-1}\cdot S_{n+p}}.$$

Оскільки правильна рівність $\frac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$, то

$$\frac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+1}\cdot S_{n+2}}+\ldots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p-1}\cdot S_{n+p}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}+\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_{n+2}}+\ldots+\frac{1}{S_{n+p-1}}-\frac{1}{S_{n+p}}=$$

$$=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+p}}.$$

Беручи до уваги, що $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+p}}<\frac{1}{S_n}$, будемо мати,

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}^2}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}^2}+\ldots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}^2}<\frac{1}{S_n}.$$

Оскільки, за умовою $\sum a_n$ є розбіжним, то $S_n\to+\infty$, а значить $\frac{1}{S_n}\to 0$. Отже, $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_o\in N$: $\forall n\ge n_o$, $\forall p\in N\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}^2}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}^2}+\ldots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}^2}<\varepsilon$, а це за критерієм Коші означає, що ряд $\sum\frac{a_n}{S_n^{\ 2}}$ є збіжним.

В зв'язку з цією задачею, виникає така думка, що насправді збіжним буде ряд $\sum\frac{a_n}{S_n^{\ 1+\alpha}}$, де $\alpha>0$. На це наштовхує приклад гармонійного ряду, для якого $S_n=\ln n+c_n$ (c_n^{-} — збіжна послідовність). Тоді ряд $\sum\frac{a_n}{S_n^{\ 1+\alpha}}=\sum\frac{1}{n\ln^{1+\alpha}n}$ — а цей ряд є збіжним.

Якщо подивитись на відомі нам ознаки збіжності знакододатніх рядів, то всі вони одержуються з використанням ознаки порівняння. Однією з таких ознак, що використовує це і дає хороші результати є ознака Куммера.

Нехай маємо знакододатній ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (всі члени якого $\neq 0$) і c_n^{-} — довільна послідовність додатніх чисел. Позначимо через $K_n=c_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}$. Тоді, якщо $\exists\delta>0$, таке що $\forall n \in N$, справедлива нерівність $K_n \geq \delta$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо ж послідовність c_n, крім того, така, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ є розбіжний і для $\forall n \in N$, $K_n \leq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — розбіжний.

Підбираючи різні c_n можна утворювати різні за швидкістю розбіжності ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$, а отже, в результаті, різні за силою ознаки. Якщо візьмемо в якості c_n послідовність $c_n = 1$, то отримаємо ознаку Даламбера. Взявши $c_n = n$ будемо мати ознаку Раабе, яка сильніша за попередню, в чому можна легко переконатися і, крім того, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ повільніше розбіжний, ніж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Якщо ж візьмемо послідовність $n \ln n$ отримаємо ознаку Бертрана, що сильніша за дві попередні ознаки. Виникає думка, що таким чином можна утворювати все сильніші ознаки. Тобто, можна знайти такий ряд, який чудово підійде для виведення наступної після Бертрана ознаки, яка можливо буде «сильнішою» за усі попередні.

Візьмемо в ознаці Куммера в якості $C_n = n \ln n \ln(\ln n)$ і розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

Дослідимо цей ряд на збіжність, використовуючи відомий критерій збіжності знакододатнього ряду з монотонно спадною послідовністю членів. Будемо мати,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k \ln 2^k \ln(\ln 2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2 \ln(\ln k + \ln\ln 2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2 \ln k + k \ln 2 \ln\ln 2}.$$

Порівняємо останній ряд з відомим розбіжним рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$, матимемо,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k \ln k}{k \ln 2 \ln k + k \ln\ln 2 \ln 2} = \lim_{k \to \infty} \frac{k \ln k}{\ln 2 + \frac{\ln\ln 2 \ln 2}{\ln k}} = \frac{1}{\ln 2} \in (0; +\infty)$$

Отже, даний ряд є розбіжний, тому ним можна скористатися при виведенні нової ознаки із ознаки Куммера. Для цього здійснимо наступні перетворення,

$$K_n = n \ln n \ln(\ln n)\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - (n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1) = \ln\ln n\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - 1\right) -$$

$$- (n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1) + \ln\ln n + \ln n \ln\ln n + n \ln n \ln\ln n.$$

Здійснимо наступні перетворення,

$$(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)-\ln\ln n-\ln n\ln\ln n-n\ln n\ln\ln n=$$
$$=(n+1)\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\ln\ln(n+1)-\ln\ln n-\ln n\ln\ln n-n\ln n\ln\ln n=$$
$$=\left(n\ln n+\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)\ln\ln(n+1)-\ln\ln n-\ln n\ln\ln n-n\ln n\ln\ln n=$$
$$=(n\ln n\ln\ln(n+1)-n\ln n\ln\ln n)+(\ln n\ln\ln(n+1)-\ln n\ln\ln n)+$$
$$+(\ln\ln(n+1)-\ln\ln n).$$

Обчислимо далі такі границі,

$$\lim_{n\to\infty}(\ln\ln(n+1)-\ln\ln n)=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)}{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln n\ln\ln(n+1)-\ln n\ln\ln n)=\lim_{n\to\infty}\ln n(\ln\ln(n+1)-\ln\ln n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\ln n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln n\ln\ln(n+1)-n\ln n\ln\ln n)=\lim_{n\to\infty}n\ln n(\ln\ln(n+1)-\ln\ln n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}n\ln n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1.$$

Отже,

$$K=\lim_{n\to\infty}K_n=\lim_{n\to\infty}\ln\ln n\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-1\right)-1.$$

Якщо позначити $M=\lim_{n\to\infty}\ln\ln n\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-1\right)$, то $K=M-1$.

Звідси, застосувавши ознаку Куммера в граничній формі отримуємо наступну можливо ефективнішу ознаку:

Нехай маємо знакододатній ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (всі члени якого $\neq 0$) і послідовність $C_n = n\ln n \ln(\ln n)\ (n \geq 3)$ додатніх чисел і $\exists \lim_{n\to\infty} M_n = M$, тоді якщо:

$M > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;

$M < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний;

$M = 1$, то відповіді немає.

Можна перевірити, що ця ознака буде ефективна тоді, коли ефективні і всі попередні ознаки, але її використання доволі трудомістке, оскільки результат отримаємо аж після великої кількості непростих перетворень, пов’язаних з пошуком числа *M*. Тому, корисним є розгляд інших ознак, не пов’язаних з ознакою Куммера, якими можна було б ефективно користуватися, коли вищезгадані не діють або їх застосування зв’язане з громіздкими викладками.

Нехай маємо ряд із загальним членом $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$. Використовувати в даному випадку ознаку Даламбера недоцільно, тому спробуємо ознаку Коші

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\ln n)^{-\ln(\ln n)}} = \lim_{n\to\infty} (\ln n)^{-\frac{\ln(\ln n)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(\ln n)\left(-\frac{\ln(\ln n)}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln^2(\ln n)}{n}}.$$

Знайдемо окремо границю показника, скориставшись декілька разів правилом Лопіталя. Будемо мати,

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -2\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n\ln n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln n + 1)} = 0.$$

Значить $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln^2(\ln n)}{n}} = e^0 = 1$, тому $K = 1$.

Бачимо, що відповіді ми не отримали. Ознаки Раабе і Бертрана застосувати до цього ряду буде надзвичайно важко. Добре було б мати якусь іншу конструктивну ознаку. Такою, зокрема, для цього прикладу є наступна, яка, як ми побачимо, надзвичайно просто отримується.

Логарифмічна ознака. Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textbf{(1)}$$

знакододатній ряд. Якщо $\exists \alpha > 0$ таке, що

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha, \text{ для } \forall n \geq n_0,$$

то ряд (1) збіжний , якщо ж

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1 \text{ для } \forall n \geq n_0,$$

то ряд (1) — розбіжний.

Доведення:

З умов випливає , що $\forall n \geq n_0$ будемо мати,

$\log_n a_n^{-1} \geq 1+\alpha$, звідси, $a_n \leq \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$. Оскільки $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ загальний член узагальнено-гармонійного ряду, який, як відомо, є збіжним при $\alpha > 0$, то за ознакою порівняння ряд (1) теж збіжний.

В другому випадку $a_n \geq \dfrac{1}{n}$, тобто порівнюємо з розбіжним гармонійним рядом, і отримуємо, що ряд (1) розбіжний.

Ознака доведена.

Для зручності її можна використовувати і в граничній формі.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) знакододатній ряд і існує $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = L$, тоді якщо

$L > 1$ — ряд (1) збіжний;

$L < 1$ — ряд (1) розбіжний.

$L = 1$ — відповіді немає.

Застосуємо її до вищенаведеного ряду. Будемо мати,

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n)^{\ln(\ln n)}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2(\ln n)}{\ln n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Застосуємо двічі правило Лопіталя,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln(\ln n)\dfrac{1}{n\ln n}}{\dfrac{1}{n}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n\ln n}}{\dfrac{1}{n}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1,$$

тому ряд розбіжний.

Інколи використовуючи ознаку Коші в результаті отримуємо $K = 1$, а значить, вона тут неефективна. З іншої сторони, буває так, що використовувати сильніші ознаки, отримані з ознаки Куммера, надзвичайно важко. Тому в таких випадках може допомогти наступна

Ознака Жаме. Знакододатній ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, якщо $\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\dfrac{n}{\ln n} \geq p > 1$ при $\forall n > n_0$ і розбіжний, якщо $\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\dfrac{n}{\ln n} \leq 1$ при $\forall n > n_0$.

Доведення:

З умови маємо для $\forall n > n_0$,

$$\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln n} \geq p.$$

Виконаємо перетворення

$$\frac{n}{\ln n} - \frac{n\sqrt[n]{a_n}}{\ln n} \geq p, \quad \frac{n\sqrt[n]{a_n}}{\ln n} \leq \frac{n}{\ln n} - p.$$

Будемо мати

$$0 \leq a_n \leq \left(1 - \frac{p\ln n}{n}\right)^n \forall n > n_0.$$

Оскільки $1 - \dfrac{p\ln n}{n} > 0$, бо $\dfrac{p\ln n}{n} \to 0$ $(n\to\infty)$, то

$$0 \le a_n \le e^{n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)}. \qquad \textbf{(2)}$$

Подивившись на праву частину останньої нерівності і скориставшись асимптотичною формулою $\ln(1-x) = -x + O(x^2)$ $(x \to 0)$, будемо мати,

$$\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right) = -\frac{p\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right),$$

тому,

$$n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right) = -p\ln n + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

Значить,

$$e^{n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)} = e^{-p\ln n}\cdot e^{O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = \frac{1}{n^p}\cdot e^{O(o(1))} = \frac{1}{n^p}\cdot e^{o(1)}.$$

Поскільки $e^{o(1)} \to e^0 = 1$, при $n \to \infty$, то взявши $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)}}{\frac{1}{n^p}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^0 = 1$, за ознакою порівняння рядів в граничній формі маємо, що ряд із загальним членом $e^{n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)}$ є збіжним при $p > 1$. Тому з нерівності (2) за ознакою порівняння рядів маємо, що заданий ряд теж збіжний при $p > 1$.

Якщо ж $\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\dfrac{n}{\ln n} \le 1$, то виконаємо наступні перетворення

$$1-\sqrt[n]{a_n} \le \frac{\ln n}{n},\ \sqrt[n]{a_n} \ge 1-\frac{\ln n}{n}.$$

Будемо мати

$$a_n \ge \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n \ \forall n > n_0.$$

Оскільки $1-\dfrac{\ln n}{n} > 0$, бо $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, то

$$a_n \ge e^{n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}. \qquad \textbf{(3)}$$

Подивившись, як і в першому випадку, на праву частину останньої нерівності і скориставшись тією ж асимптотичною формулою $\ln(1-x) = -x + O(x^2)$ $(x \to 0)$, будемо мати, $\ln\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right) = -\dfrac{\ln n}{n} + O\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$, тому

$$n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right) = -\ln n + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

Отже,

$$e^{n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)} = e^{-\ln n}\cdot e^{O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = \frac{1}{n}\cdot e^{O(o(1))}.$$

Оскільки $e^{o(1)} \to e^0 = 1$, при $n\to\infty$, то взявши $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^0 = 1$, за ознакою порівняння рядів в граничній формі маємо, що ряд із загальним членом $e^{n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)}$ є розбіжним. Тому з нерівності (3) за ознакою порівняння рядів маємо, що заданий ряд теж розбіжний.

Отже, ознака доведена.

Для зручності її можна використовувати і в граничній формі:

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) знакододатній ряд і існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\dfrac{n}{\ln n} = G$, тоді якщо

$G > 1$ — ряд (1) збіжний;

$G < 1$ — ряд (1) розбіжний;

$G = 1$ — відповіді немає.

Видно, що якщо ефективна ознака Коші, то й ефективна ознака Жаме. Справді, якщо ефективна ознака Коші і, наприклад, ряд збіжний , то $1-\sqrt[n]{a_n}$ прямує до якогось додатного числа, а $\dfrac{n}{\ln n}\to\infty$, значить $G\to+\infty$, і тому ознака Жаме теж ефективна. Аналогічно для розбіжного ряду, тоді $1-\sqrt[n]{a_n}$ прямує уже до якогось від'ємного числа, а значить $G\to-\infty$, а тому і тут ознака Жаме ефективна. Отже, ознака Жаме не слабкіша ознаки Коші.

Те, що вона сильніша ознаки Коші, демонструє наступний приклад.

Дослідити на збіжність знакодатній ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}$.

Спочатку переконаємося, що ознака Коші неефективна. Справді,

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1^1 = 1,$$

і, значить, ознака Коші відповіді не дає.

Спробуємо скористатися ознакою Жаме. Будемо мати,

$$G = \lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}}\right)\frac{n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)\frac{n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-e^{\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}}}\right)\frac{n}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{n-1}{n}\ln\frac{n-1}{n+1}}-1}{\frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\left(-n\right)\ln\dfrac{n-1}{n+1}}{\ln n}.$$

Перший з множників, як відомо збігається до 1, другий — теж, тому залишається, що

$$G=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\frac{n-1}{n+1}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2n}{n+1}}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln e^2}{\ln n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0.$$

Оскільки $G=0<1$, то ряд розбіжний і ознака Жаме виявилася ефективною.

Таким чином, як випливає із дослідження, описаного в цій роботі, не потрібно особливо захоплюватися створенням якоїсь шкали все сильніших і сильніших ознак збіжності числових рядів, побудованих на якійсь одній ідеї, а варто використовувати якісь інші конструкції, які швидше приводили б до позитивних відповідей на запитання збіжний чи розбіжний той чи інший числовий ряд.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа.: М., «Наука»,1972 р. —544 с.
2. Ляшко И.И., Боярчук А.К. Сборник задач по математическому анализу. Часть 1.: М., «Издательский дом «Вильямс»», 2001 р. – 432 с.
3. Рудин У. Основы математического анализа.: М., «Мир», 1976 р. — 328 с.

Янік Д.

Науковий керівник – доц. Кальба Я. Є.

ВПЛИВ МАС-МЕДІА НА ФОРМУВАННЯ СВІДОМОСТІ ТА МОРАЛЬНОЇ ПОВЕДІНКИ ДОШКІЛЬНИКА

Постановка проблеми. Сучасний світ немислимий без медіа-засобів. На сьогодні засоби масової інформації та комунікації відіграють важливу роль у соціалізації особистості. Сучасний ринок праці вважає конкурентно спроможними лише тих осіб, які володіють новітніми інформаційними технологіями, вмінням швидко і якісно орієнтуватися у медійному просторі. Попри це, доступність, мобільність інформації, легкість її пошуку почасти звужують інтерес молоді до системного навчання, а надмірне занурення у віртуальний світ породжує профанацію реальності.

У науково-методичному вимірі означену проблему розглядають у двох напрямках. Насамперед, це питання експозиції контакту із засобами мультимедіа (непродуктивне використання часу, розлади вольового контролю медіакористувачів, виникнення ігроманії, віртуальної залежності). З іншого боку, як головний об’єкт потенційних досліджень, розглядається проблема психіки медіакористувача в момент взаємодії із ЗМІ. Адже, на сьогодні поки що немає однозначної, науково обґрунтованої відповіді на запитання: що відбувається з користувачем, коли він занурений, наприклад, у конкретну комп’ютерну гру, телешоу, мультфільм тощо.

Вельми актуальною у цьому контексті видається проблема впливу засобів мультимедіа на дітей дошкільного віку, який розглядаємо як найбільш сенситивний період розвитку підростаючої особистості, формування її свідомості, моральної поведінки.

Мета статті – проаналізувати особливості впливу ЗМІ на свідомість та моральну поведінку дошкільника, зокрема, емпірично з'ясувати актуальність мультиплікаційної продукції *таких анімаційних студій як "Walt Disney", "Dream World", "Pixer", "Nickelodeon", "Мельниця" і "Союзмультфільм".*

Аналіз останніх досліджень. Теоретична та практична сторона вирішення заявленої проблеми вимагає, насамперед, уточнення змісту вказаних понять: мас-медіа, мультиплікаційна продукція.

Засоби масової комунікації та інформації, або ж мас-медіа, (англ. mass media, від лат. mass – маси, групувати та media – засіб, посередник) – засоби поширення соціокультурної інформації, розрахованої на масового споживача. Традиційно до них відносять пресу, книгодрукування, радіомовлення, телебачення та кіно, тобто засоби комунікації, що характеризуються високим рівнем технічного оснащення. Зауважимо, що поряд із