ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Домбровський В.

Науковий керівник – Качурівський Р.І.

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Диференціальні рівняння першого порядку відіграють важливу роль у дослідженні навколишнього середовища. З теорії таких рівнянь відомо, що вони мають нескінченну множину розв'язків, проте на практиці при дослідженні певного конкретного процесу особливий інтерес викликає лише один із них. (див. [5]) Тому, щоб виділити деякий конкретний розв'язок, потрібно на нього накласти певні умови. Одним з перших, хто займався цією проблемою, був французький математик Огюстен Луї Коші, який і запропонував таку умову, яка пізніше, разом з диференціальним рівнянням, була названа задачею Коші. (див. [4])

Цікаво було б перенести задачу Коші на систему звичайних диференціальних рівнянь, розглянути умови, при яких існує розв'язок цієї системи і, звичайно, випадок, коли він єдиний, про що і йтиметься у даній статті.

Нехай D – область простору R^{1+n}, в якому задано координати $(t,x)=(t,x_1,x_2,...x_n)$. Кожне відображення $f:D\to R^{1+n}$ визначає в D нормальну *n*-вимірну систему диференціальних рівнянь першого порядку (векторне рівняння) (див. [2])

$$x' = f(t,x). \qquad (1)$$

Розписана покомпонентно вона має вигляд

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t,x_1,x_2,...x_n), \\ x_2' = f_2(t,x_1,x_2,...x_n), \\ x_3' = f_3(t,x_1,x_2,...x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t,x_1,x_2,...x_n). \end{cases}$$

Означення. Вектор-функція $x=\varphi(t)$, яка визначена на проміжку I, називається розв'язком системи (1), якщо виконуються наступні умови:

1) $\varphi(t)$ диференційована у всіх точках проміжку;

2) для довільних $t\in I \ \ (t,\varphi(t))\in D$;

3) $\varphi'(t)=f(t,\varphi(t)),\ t\in I$.

Зауваження. Диференційовність (інтегровність) вектор-функції $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...x_n(t))$ на інтервалі I означає диференційовність (інтегровність) на цьому інтервалі кожної її компоненти $x_i(t),\ i=\overline{1,n}$. (див. [6])

Розглянемо задачу знаходження розв'язку системи (1), який задовольняє початкову умову (див. [4])

$$\varphi(t_0)=x_0,\ (t_0,x_0)\in D. \qquad (2)$$

Число t_0 та вектор x_0 називають початковими даними, а саму задачу називають задачею Коші.

Має місце така теорема. (див. [1])

Теорема Пікара. Нехай виконуються умови:

вектор-функція $f : D \to R^n$ є неперервною за всіма змінними;

для довільних $x_1, x_2 \in R^n$ має місце співвідношення $\left|f(t,x_2) - f(t,x_1)\right| \le L\left|x_2 - x_1\right|$, де L – деяка додатня стала;

$2Lh \le \delta < 1$;

Тоді на відрізку $[t_0 - h, t_0 + h]$ існує єдиний розв'язок задачі (1) – (2)

Доведення. Покажемо, що задача (1) – (2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \quad (3)$$

Для цього розглянемо неперервну на I функцію $x(t)$, яка є розв'язком (1) – (2). Інтегруванням обох частин (1) у межах t_0 до t з урахуванням (2) переконуємося в тому, що функція $x(t)$ задовольняє рівність (3) при всіх $t \in I$. Це означає, що $x(t)$ – розв'язок системи (3) на відрізку I.

Нехай тепер функція $x(t)$ задовольняє (3) на відрізку I. Оскільки в правій частині рівності (3) фігурує неперервно-диференційована вектор-функція, то й сама функція $x(t)$ автоматично буде неперервно-диференційованою на I. Після диференціювання обох частин (3) дістанемо (1), а поклавши у (3) $t = t_0$, матимемо (2).

Таким чином, задача (1) – (2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь (3).

Розв'язок (3) будемо шукати у вигляді ряду

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t), \qquad (4)$$

де

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,0)ds,$$

$$x_2(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s)) - f(s,0)\, ds,$$

…………………………………….

$$x_n(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \sum_{k=1}^{n-1} x_k(s)) - f(s, \sum_{k=1}^{n-2} x_k(s)) \right] ds.$$

Покажемо, що ряд (4) є рівномірно збіжним при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Для цього достатньо показати, що при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ мають місце оцінки :

$$\left|x_k(t)\right| \le M\delta^{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots \quad (5)$$

Справді, при $k = 1$ маємо:

$$|x_1(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,0)ds \right| \le |x_0| + \left| \int_{t_0}^{t} f(s,0)ds \right| \le |x_0| + M \left| \int_{t_0}^{t} ds \right| = |x_0| + M|t - t_0| \le$$

$$\le |x_0| + M2h \le M.$$

Припустимо, що нерівність (5) доведена для $k = 1,2,...n$. Покажемо, що вона є справедливою для $k = n+1$:

$$|x_{n+1}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \sum_{k=1}^{n} x_k(s)) - f(s, \sum_{k=1}^{n-1} x_k(s)) \right] ds \right| \le \int_{t_0}^{t} \left| f(s, \sum_{k=1}^{n} x_k(s)) - f(s, \sum_{k=1}^{n-1} x_k(s)) \right| ds \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L \left| \sum_{k=1}^{n} x_k(s) - \sum_{k=1}^{n-1} x_k(s) \right| ds \le L \int_{t_0}^{t} |x_n(s)| ds \le M\delta^{n-1} L |t - t_0| \le M\delta^{n-1} L2h \le M\delta^{n}$$

Отже, нерівність (5) має місце для кожного $k \in N,\ t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажемо, що вектор-функція $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ є розв'язком системи (3). Для цього достатньо показати, що рівномірно збіжним є ряд

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,0)ds + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s)) - f(s,0)\ ds + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s) + x_2(s)) - f(s, x_1(s))\ ds$$

$$+ ... + \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \sum_{k=1}^{n-1} x_k(s)) - f(s, \sum_{k=1}^{n-2} x_k(s)) \right] ds + ...$$

і його сума дорівнює $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$.

Для довільного $m \in N$ маємо:

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s,0) + (f(s, x_1(s)) - f(s,0)) + (f(s, x_1(s) + x_2(s)) - f(s, x_1(s))) +$$

$$... + (f(s, \sum_{k=1}^{m-1} x_k(s)) - f(s, \sum_{k=1}^{m-2} x_k(s)))]ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \sum_{k=1}^{m-1} x_k(s))ds.$$

Для будь-якого $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{2Lh} > 0$ розглянемо

$$\left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \sum_{k=1}^{m-1} x_k(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, \sum_{k=1}^{m-1} x_k(s)) - f(s, \varphi(s)))ds \right| \le$$

$$\le 2Lh \left| \sum_{k=1}^{m-1} x_k(s) - \varphi(s) \right|.$$

Оскільки ряд $\sum_{r=1}^{\infty} x_k(s)$ є рівномірно збіжним до функції $\varphi(s)$, то $\forall \varepsilon > 0$, зокрема і для $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{2Lh}$, $\exists m_0 \in N$, таке що $\forall m \geq n_0$ $\left| \sum_{k=1}^{m-1} x_k(s) - \varphi(s) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2Lh}$, тобто

$$\left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \sum_{k=1}^{m-1} x_k(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds \right| < \varepsilon.$$

Таким чином ряд

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,0)ds + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s)) - f(s,0)\, ds + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s) + x_2(s)) - f(s, x_1(s))\, ds$$

$$+ \ldots + \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \sum_{k=1}^{n-1} x_k(s)) - f(s, \sum_{k=1}^{n-2} x_k(s)) \right] ds + \ldots$$

є рівномірно збіжним до функції $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds$, а це означає, що $\varphi(t)$ є розв'язком системи (3):

$$\varphi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds$$

Для доведення єдиності припустимо що існує $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$, яка також є розв'язком системи (3).

Тоді

$$|\varphi(t) - y(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s)) - f(s, y(s))| ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L |\varphi(s) - y(s)| ds \leq \max_{s} |\varphi(s) - y(s)| 2Lh$$

Звідси $\max |\varphi(t) - y(t)| \leq \max |\varphi(t) - y(t)| 2Lh,$ а це можливо лише коли $|\varphi(t) - y(t)|$, значить $\varphi(t) \equiv y(t)$, а це означає, що наше припущення не вірне, отже існує єдиний розв'язок системи (3) і відповідно задачі (1) – (2).

Теорема доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Диференціальні рівняння: Підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
2. Борисенко С. Д., Дудкін М. Є. Системи диференціальних рівнянь: Навч. Посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 1999. – 25 с.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. – 718 с.
4. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкиовенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкиса, О. А. Олейиик. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.

5. Сясєв, А. В. Конспект лекцій із курсу „Вища математика”. Диференціальні рівняння першого порядку [Текст] / А.В. Сясєв. – Д.: РВВ ДНУ, 2012. – 44 с.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. – 472 с.

Волянюк А

Науковий керівник – Радченко О.Я.

НОВИЙ ПІДРУЧНИК З ФІЗИКИ – ВИМОГА ЧАСУ

На сучасному етапі розвитку системи освіти, школа виходить на світовий рівень. З розвитком інформаційних технологій змінюються вимоги і до засобів навчання. При цьому підручник відходить на задній план, хоча, на нашу думку, функціонування школи неможливе без використання підручників у навчально-виховному процесі. Навчальна книжка – не тільки джерело знань, а й засіб інтелектуального, соціального і духовного розвитку особистості. Тому потрібна навчальна література нового покоління, що стане базою модернізації змісту, форм, методів і технологій освітньої системи України. Ось чому важливого значення набуває проблема створення й адекватного використання навчальної книжки і відмова від усталеної практики вітчизняного творення підручників та інших навчальних книг.

Якісний підручник – необхідна передумова ефективного функціонування освітньої системи. З іншого боку, створення навчальної книги не може бути відособленим, здійсненим за межами конкретної освітньої моделі, на яку вона зорієнтована і яка має бути практичним підтвердженням її реалізації [4, с.5].

Вимоги щодо створення сучасних підручників знайшли відображення у науковому доробку вчених.

Зазначена проблема тісно пов’язана з теорією шкільного підручника. Науковцями вивчались, зокрема, питання сутності підручника, структури та функціонального забезпечення (В.Г.Бейлінсон, В.П.Беспалько, Д.Д.Зуєв, В.С.Цетлін та ін.); його місця і ролі у навчальному процесі (Ю.К.Бабанський, І.Я.Лернер, О.Я.Савченко, М.М.Скаткін та ін.); проблема розвивального підручника (А.В.Фурман); особливостей підручника з фізики (О.С.Лозинська, С.В.Каплун, Н.Сосницька, О.Сєргєєв, О.Волинко).

Традиційно склалось уявлення про підручник як про книгу, в якій розкриваються основи наук. І дотепер у багатьох офіційних документах і наукових дослідженнях це уявлення зберігається. Зміст традиційного підручника, що відібраний для інформаційного стилю навчання, розрахований на пам’ять учня, але недостатньо сприяє формуванню пізнавальної активності школярів і почасти не відповідає наявним у них психофізіологічним можливостям оволодіння знаннями та вміннями.

Саме тому зміст і структура підручника нового покоління покликані насамперед розвивати психічні процеси і властивості людини, формувати й підтримувати пізнавальний інтерес у школярів та їхнє прагнення до саморозвитку. За А.В.Фурманом, він має відповідати розвивальній системі, впровадження якої дає змогу учням повно активізувати потенціал розвитку і яка є інноваційною у більшості розвинених країн світу [6, с.18]. Традиційний підручник у цьому плані – протилежність розвивальному.

Таким чином, відсутність спеціальних досліджень з аналізованої проблеми, з одного боку, та потреби практики, з іншого, зумовили вибір теми дослідження, метою якого є обгрунтування вимог до підручника з фізики.

Вважаємо, що основною проблемою є те, що нині в Україні створюються багато проектів, спрямованих на підготовку нових підручників, яка зводиться лише до модернізації окремих фрагментів змісту традиційних підручників і майже не передбачає змін їх структури, функцій, оформлення, спрямування. Це пов’язане з тим, що за останні роки не відбулася належна переорієнтація і прогресивний розвиток теорії, методології, технології і практики створення інноваційних підручників.

Аналіз чинних підручників з фізики [1; 3; 5], показав, що більшість з них пропонують зміст в готовому вигляді, тим самим зумовлюючи лише репродуктивну навчальну діяльність. Науковці (Д. Д. Зуєв, І.Я.Лернер, О.Я.Савченко та ін.) неодноразово висловлювали думку про те, що підручник повинен вчити дитину мислити, аргументувати власну точку зору. А тому ми вважаємо, що необхідно створювати та впроваджувати в школи розвивальні підручники, у яких