

Запорізький національний університет
Міністерства освіти і науки України

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

В і с н и к
Запорізького національного
університету

Телефон
для довідок:
(061) 289-12-52

- **Фізико-математичні науки**

Факс: (061) 764-45-46

№ 1, 2017

Запоріжжя 2017

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2017. – 384 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у наступних наукометричних базах:

- CiteFactor (<http://www.citefactor.org/>);
- ResearchBib (<http://paper.researchbib.com/>);
- Journal Factor (<http://www.journalfactor.org/>).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 13 від «20» червня 2017 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

Головний редактор	– Грищак В.З.,	доктор технічних наук, професор
Заступник головного редактора	– Гребенюк С.М.,	доктор технічних наук, доцент
Відповідальні редактори	– Гоменюк С.І., Приварников А.К., Клименко М.І., Чопоров С.В.,	доктор технічних наук, професор доктор фізико-математичних наук, професор кандидат фізико-математичних наук, доцент кандидат технічних наук, доцент

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Андріанов І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина)
Ванько В.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)
Гіржон В.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гоман О.Г.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гудрамович В.С.	– доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Козін І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Колаковські З.	– доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)
Кондрат'єва Н.О.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузьменко В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Маневич Л.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)
Морачковський О.К.	– доктор технічних наук, професор
Ольшанецький В.Ю.	– доктор технічних наук, професор
Перепелиця В.О.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Толок О.В.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)
Швидка С.П.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЗМІСТ

АКУЛЕНКО Л. Д., ЛЕЩЕНКО Д. Д., КОЗАЧЕНКО Т. А., БАЗИЛЕВИЧ Ю. Н. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ	6
АЛЬ-АТАМНЕХ Б. Г. М. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОПИСАНИЯ R-ФУНКЦИЙ С ПОДДЕРЖКОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.....	15
БАРАНЕНКО В. О., ВОЛЧОК Д. Л. ВАГОВА ОПТИМІЗАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ СКЛОПЛАСТИКУ ЗА УМОВИ ОДНОГО ГРАНИЧНОГО СТАНУ І НЕВИЗНАЧЕНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ЩОДО ВИХІДНИХ ДАНИХ.....	22
БЕЗВЕРХИЙ О. І., КОРНІЄНКО В. Ф. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ВТРАТ.....	35
БЛАШ О. В. ПЛАСТИНА З ТРИЩИНОЮ ПІД ДВОВІСНИМ РОЗТЯГОМ ТА ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ СИЛАМИ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ В ЇЇ ВЕРШИНАХ.....	49
ВОРОБЬЕВ Ю. С., БЕРЛИЗОВА Т. Ю., ОВЧАРОВА Н. Ю. ВЛИЯНИЕ АЗИМУТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ОСЕЙ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ОХЛАЖДАЕМОЙ ЛОПАТКИ...	57
ГАЛИШИН А. З., СКЛЕПУС С. Н. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И ОБОЛОЧЕЧНОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРОВ	64
ГЛУХОВ А. Ю. ВІСЕСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ В КОМПОЗИТНИХ НЕСТИСЛИВИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ЗА УМОВИ НЕПОВНОГО КОНТАКТУ МІЖ ШАРАМИ.....	73
HODES A. YU., LOBODA V. V. AN ARC CRACK AT THE INTERFACE BETWEEN TWO ELECTROSTRICTIVE MATERIALS	81
ГРИГОРЕНКО О. Я., БОРИСЕНКО М. Ю., БОЙЧУК О. В., ПРИГОДА О. П. ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕКРУГОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ТОРЦЯМИ.....	94
ГРИГОР'ЄВА Л. О. НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ПЛОСКОГО БАГАТОШАРОВОГО П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОГО ПІДКРІПЛЮЮЧОГО ШАРУ І АКУСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА.....	103
ГРИЩАК Д. Д. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ АЕРОКОСМІЧНИХ СИСТЕМ НА БАЗІ ГІБРИДНИХ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ.....	110
ГРОМОВ В. А. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАТИВНОГО ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА	119
ДЕМИДОВ О. В., ПОПОВ В. Г. НЕСТАЦІОНАРНИЙ ЗАКРУТ СКИНЧЕННОГО ЦИЛІНДРУ З КРУГОВОЮ ТРИЩИНОЮ.....	131
ДЕМ'ЯНЕНКО А. Г. С. П. ТИМОШЕНКО ТА СУЧАСНА ІНЖЕНЕРНА ОСВІТА В УКРАЇНІ: ДЕЯКІ РЕАЛІЇ, ПРОБЛЕМИ, ТЕНДЕНЦІЇ ТА ПЕРСПЕКТИВИ.....	142
ЄМЕЦЬ О. О., БАРБОЛІНА Т. М. СТОХАСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ НА РОЗМІЩЕННЯХ: ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ЗАДАЧ.....	147
ЄМЕЦЬ О. О., ЄМЕЦЬ ОЛ-РА О., ВАНЖА С. В. СИМПЛЕКСНА ФОРМА МНОГОГРАННИКА СПОЛУЧЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ	158

КАГАДИЙ Т. С., БЕЛОВА О. В., ЩЕРБИНА И. В. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ.....	168
КВАШНІВСЬКА Н. М. ЗМІНА ЕЛЕКТРОХІМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ GASE ЗА РАХУНОК МОДИФІКАЦІЇ ПОВЕРХНІ.....	175
КЛИМЕНКО М. И., ГРЕБЕНЮК С. Н., БОГУСЛАВСКАЯ А. М. ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ИЗОТРОПНОЙ МАТРИЦЕЙ И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ВОЛОКНОМ..	179
КОНОНОВ Ю. Н., ЛИМАРЬ А. А. КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ	190
КОСТРОВА М. М., АХУНДОВ В. М. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНОГО ЦИЛИНДРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ.....	205
КУЗЬ І. С., КУЗЬ О. Н., ПИЗ Н. Я. МІЦНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З ДВОМА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ РОЗРІЗАМИ (ТОНКИМИ ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ) ЗА ВСЕБІЧНОГО РОЗТЯГУ	213
КУРАПОВ С. В., ДАВИДОВСКИЙ М. В. СПЕКТР РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА И ЗАДАЧА ИЗОМОРФИЗМА.....	222
КУРЕННОВ С. С. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАХЛЕСТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИНОК РАЗНОЙ ШИРИНЫ. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ.....	235
ЛАТИФОВ Ф. С., ГУЛИЕВА З. М. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСИЛЕННЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР И НАГРУЖЕННОЙ ОСЕВЫМИ СЖИМАЮЩИМИ СИЛАМИ ОРТОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ	244
ЛЕВАДА В. С., ЛЕВИЦКАЯ Т. И., ПОЖУЕВА И. С., ХИЖНЯК В. К. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ	252
ЛЕОНТЬЕВА В. В., КОНДРАТЬЕВА Н. А. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОТДЕЛЬНОГО КЛАССА СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ.....	261
МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО К. В., ШЕЙКО Т. И. R-ФУНКЦИИ, ТВЭЛ С ПОЛИЗОНАЛЬНЫМ ОРЕБРЕНИЕМ ОБОЛОЧКИ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ.....	277
ОБОДАН Н. И., АДЛУЦКИЙ В. Я., КОЗАКОВА Н. Л. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО СЛОЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ	285
ОПАНАСОВИЧ В. К., НИКОЛИШИН М. М., СЛОБОДЯН М. С., АЛЬФАВЦЬКА С. О. ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ ТА ЗЛИТИХ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН МІЖ НИМИ.....	296
ОПАНАСОВИЧ В. К., СЛОБОДЯН М. С., ЯРЕМА Є. Б. ПРО ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ	303
СМЕТАНКІНА Н. В. ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ	312
СУЛИМ Г. Т., ПІСКОЗУБ Й. З., ПІСКОЗУБ Л. Г. АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ БІМАТЕРІАЛУ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИМ МІЖФАЗНИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ.....	319
ХОМА Н. Г., ХОМА–МОГИЛЬСЬКА С. Г., ХОХЛОВА Л. Г. ІНТЕГРО-ОПЕРАТОРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ.....	328
ХОМЧЕНКО А. Н., ЛИТВИНЕНКО Е. И., АСТИОНЕНКО И. А. ГЕОМЕТРИЯ КОНОИДА И ФИЗИЧЕСКАЯ НЕАДЕКВАТНОСТЬ СТАНДАРТНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	337

ШАЦЬКИЙ І. П., МАКОВІЙЧУК М. В., ЩЕРБІЙ А. Б. ВЗАЄМОДІЯ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН У СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ.....	342
ШВАЙКО В. Н., ГУРІДОВА В. О. МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ ҐРУНТУ ЗМІННОЇ МАСИ ЗА ПРЯМОЛІНІЙНИМ ЛЕЗОМ РОБОЧОГО ОРГАНУ	351
ШЕВЧЕНКО А. Г., ШНЕЙДЕР В. П. ОБРАЗОВАНИЕ ШЕЙКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНКИ...	358
ШУЛЬЖЕНКО М. Г., ГОНТАРОВСЬКИЙ П. П., ГАРМАШ Н. Г., МЕЛЕЖИК І. І. РОЗРАХУНКОВА ОЦІНКА РОЗВИТКУ ТРІЩИНИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ В ПЛОСКИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ	365
ЯРЕЦЬКА Н. О. ТИСК ЖОРСТКОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПІВПРОСТІР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ	374
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ».....	381

УДК 517.944

ИНТЕГРО-ОПЕРАТОРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ

¹Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, ¹Хома–Могильська С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
²Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

¹Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна,

²Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка,
вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Досліджуються крайові періодичні задачі для лінійного та квазілінійного рівнянь гіперболічного типу, використовуючи аналітичні методи. Побудовано оператор, що переводить клас 2π -періодичних функцій у самого себе. Встановлено оцінки, необхідні для доведення теореми існування розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі.

Ключові слова: крайова періодична задача, квазілінійне рівняння, властивості розв'язку, інтегральний оператор, аналітичний метод.

ИНТЕГРА-ОПЕРАТОРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

¹Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, ¹Хома–Могильская С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
²Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

¹Тернопольский национальный экономический университет,
ул. Львовская, 11, г. Тернополь, 46020, Украина,

²Тернопольский национальный педагогический университет им. Владимира Гнатюка,
ул. М. Кривоноса, 2, г. Тернополь, 46027, Украина

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Исследуются краевые периодические задачи для линейного и квазилинейного уравнений гиперболического типа, используя аналитические методы. Построен оператор, переводящий класс 2π -периодических функций в себя. Установлено оценки, необходимые для доказательства теоремы существования решения квазилинейной краевой периодической задачи.

Ключевые слова: краевая периодическая задача, квазилинейное уравнение, свойства решения, интегральный оператор, аналитический метод.

INTEGRA-OPERATOR RESEARCH OF BOUNDARY-VALUE PERIODIC PROBLEM

¹Khoma N. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
¹Khoma-Mohylska S. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
²Khokhlova L. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

¹Ternopil national economic university,
Lvivs'ka str., 11, Ternopil', 46020, Ukraine,

²Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university,
M. Krivonos str., 2, Ternopil', 46027, Ukraine

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

We obtain some results concerning the investigation the boundary-value periodic problems for the linear and quasilinear non-homogeneous second order hyperbolic equations using analytical method.

The boundary-value periodic problem for differential equations in partial derivatives, including hyperbolic equations, are complicated and controversial subject of study. Boundary problems with data throughout the border region as well as the problem of non-local (including integrated) conditions for hyperbolic equations in limited areas are, generally speaking, relatively correct. Many authors link the

solvability of such problems with the problem of small denominators and use the methods of nonlinear functional analysis, the theory of implicit functions, variation methods.

We use the analytical methods in the research of periodic boundary-value problems for second order hyperbolic equations. We build the integrated operators and seek the solution in specially spaces of continuously differentiated periodic functions. By studying the properties of the internal integral of the

function $\tilde{u}_H(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau) d\xi$ the operator which transforms a class of periodic function

$Q_{2\pi \times 2\pi}^- = \{u : u(x,t) = -u(-x,t) = u(x+2\pi,t) = u(x,t+2\pi)\}$ into itself is constructed. Estimations used in the proof of the existence theorem of periodic solutions to quasi-linear boundary-value periodic

problem $v_{tt} - v_{xx} = F[v, v_t, v_x](x,t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s,s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s,s)) ds$,

$v(0,t) = v(\pi,t) = 0$, $v(x,t+2\pi) = v(x,t)$, $(x,t) \in \mathbf{R}^2$, are established. Obtained result can be used for further research the uniqueness of the solution to quasi-linear boundary-value periodic problem.

Key words: boundary-value periodic problem, quasi-linear equation, solution properties, integral operator, analytical method.

ВСТУП

Крайові періодичні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема гіперболічних рівнянь, є складним та неоднозначним об'єктом дослідження. Крайові задачі з даними на всій границі області, а також задачі з нелокальними (в тому числі інтегральними) умовами для гіперболічних рівнянь в обмежених областях є, взагалі кажучи, умовно коректними. Багато авторів пов'язують розв'язність таких задач з проблемою малих знаменників [1-3] та використовують при цьому методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи. Починаючи з 80-х років ХХ ст. ряд вчених [4-6] при дослідженні крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку використовують аналітичні методи та у своїх роботах будують інтегральні оператори і розв'язок шукають у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

У даній роботі, яка є продовженням праць [7-11], використано результати та методи робіт [6, 10, 11].

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При дослідженні крайових періодичних задач виду $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,t+2\pi) = u(x,t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$, стверджується, що єдиний класичний ($u \in C^2$) розв'язок вказаних задач може існувати лише при додаткових умовах. Зокрема, у роботі О. Вейводи та М. Штедри [4] такими умовами є спеціальний клас функцій $A_3 = \{g : g(x,t) = g(\pi-x,t+\pi) = g(x,t+2\pi)\}$ та твердження, що розв'язок

$$u^0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx \tag{1}$$

відповідної однорідної крайової періодичної задачі $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, $u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0$, $u^0(x,t+2\pi) = u^0(x,t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$, є тривіальний (тобто $a_k = b_k = 0$, $k \in \mathbf{N}$). З іншого боку, в роботі П. Рабиновича [1] доведено, що класичний розв'язок крайової періодичної задачі $u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,t+2\pi) = u(x,t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$, існує у вигляді $u(x,t) = u^0(x,t) + \varepsilon w(x,t)$ без введення спеціального класу функцій і без обмеження на $u^0(x,t)$. Нами раніше встановлено [6], що результат О. Вейводи і М. Штедри вимагає додаткових умов і залежить від методу дослідження. А також показано, що і результат П. Рабиновича справедливий.

Якщо питання існування єдиного розв'язку досліджувати у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \quad u_k(t+2\pi) = u_k(t), \quad (2)$$

то звідси випливає, що він належить класу обмежених функцій вигляду

$$\mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^- = \{u : u(x, t) = -u(-x, t) = u(x+2\pi, t) = u(x, t+2\pi)\}. \quad (3)$$

Використовуючи введений клас функцій (3) і клас $\mathcal{Q}_{2\pi}^- = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(z+2\pi)\}$, встановимо ряд тверджень, на основі яких можна побудувати оператор, що переводить клас періодичних функцій $\mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^-$ у цей же клас функцій та покажемо використання одержаних результатів для дослідження квазілінійних крайових періодичних задач.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для кожної непарної і 2π -періодичної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R}) \cap \mathcal{Q}_{2\pi}^-$ та $f(x, t) \in C^{1,0}(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^-$ лінійна крайова задача

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2 \quad (4)$$

має єдиний класичний розв'язок, який задається формулою

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv u^0(x, t) + \tilde{u}_H(x, t), \quad (5)$$

де $u^0(x, t)$ – розв'язок відповідної однорідної крайової задачі ($f(x, t) \equiv 0$), а $\tilde{u}_H(x, t)$ – частинний розв'язок лінійної неоднорідної крайової задачі (4).

Вивчаючи властивості внутрішнього інтегралу функції (оператора Даламбера)

$$\tilde{u}_H(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \quad (6)$$

можна дослідити існування 2π -періодичних розв'язків крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. Скористаємося позначенням

$$K(x, t, \tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi.$$

Лема 1. Якщо $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{Q}_{2\pi \times 2\pi}^-$, то

- 1) $K(x+2\pi, t, \tau) = K(x, t, \tau)$;
- 2) $K(x, t+2\pi, \tau) = K(x, t, \tau)$;
- 3) $K(x, t, \tau+2\pi) = K(x, t, \tau)$;
- 4) $K(-x, t, \tau) = -K(x, t, \tau)$.

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконуємося у справедливості твердження 1) леми 1. Доведемо друге твердження:

$$K(x, t+2\pi, \tau) = \int_{x-(t+2\pi)+\tau}^{x+(t+2\pi)-\tau} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{x-t+\tau-2\pi}^{x-t+\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x+t-\tau}^{x+t-\tau+2\pi} f(\xi, \tau) d\xi =$$

$$= \int_{-2\pi}^0 f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{2\pi} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi = K(x, t, \tau).$$

Аналогічно доводиться твердження 3) і 4) леми 1.

Лема 2. Нехай $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$. Тоді оператор, визначений формулою

$$\begin{aligned} (Pf)(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

при кожній функції $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}^-$ переводить функцію f із класу $Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ в клас $Q_{2\pi \times 2\pi}^-$, причому

$$(Pf)(0, t) = 0, \quad (Pf)(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Доведення. Покажемо, що функція (Pf) задовольняє крайові умови (8). На основі (7) при $x = 0$ одержуємо

$$(Pf)(0, t) = 0 + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{-(t-s)}^{t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau. \quad (9)$$

Оскільки при $f(x, t) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ інтеграл

$$\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \tau \in \mathbf{R}, \quad (10)$$

то на основі (9) і (10) маємо $(Pf)(0, t) = 0$, тобто функція (Pf) задовольняє першу крайову умову (8). Тепер, покладаючи $x = \pi$ у формулі (7), одержуємо

$$(Pf)(\pi, t) = \frac{1}{2} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{\pi-t+s}^{\pi+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau. \quad (11)$$

Доведемо, що при $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ та $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}^-$ інтеграли

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv 0; \quad \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha &= \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv 0; \\ \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi &= \int_{-t+\tau}^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta = \int_{-t+\tau}^0 f(\pi+\eta, \tau) d\eta + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta = \\ &= \int_0^{t-\tau} f(\pi-\zeta, \tau) d\zeta + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta = - \int_0^{t-\tau} f(\pi+\zeta, \tau) d\zeta + \int_0^{t-\tau} f(\pi+\eta, \tau) d\eta \equiv 0. \end{aligned}$$

Отже, на основі (11) і доведених рівностей маємо $(Pf)(\pi, t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$. Таким чином, і друга крайова умова (8) виконується.

Доведемо тепер справедливості рівностей

$$(Pf)(x+2\pi, t) = (Pf)(x, t); \quad (12)$$

$$(Pf)(x, t+2\pi) = (Pf)(x, t); \quad (13)$$

$$(Pf)(-x, t) = -(Pf)(x, t). \quad (14)$$

Оскільки $(Pf)(x, t) \equiv u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, то спочатку доведемо, що властивостями (12)-(14)

володіє розв'язок $u^0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha$ однорідної крайової періодичної задачі $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$, $u^0(x, t+2\pi) = u^0(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$.

Нехай $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap \mathcal{Q}_{2\pi}^-$. Тоді

$$\begin{aligned} u^0(x+2\pi, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x-2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{t-x-2\pi}^{t-x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{t+x}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \\ &= 0 + u^0(x, t) + 0 = u^0(x, t), \end{aligned}$$

$$u^0(x, t+2\pi) = \frac{1}{2} \int_{t-x+2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\eta+2\pi) d\eta = u^0(x, t);$$

$$u^0(-x, t) = \frac{1}{2} \int_{t+x}^{t-x} \mu(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha = -u^0(x, t),$$

що й потрібно було довести.

Тепер покажемо, що властивостями (12)–(14) володіє і розв'язок

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau. \quad (15)$$

Справді,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x+2\pi, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(K(x+2\pi, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x+2\pi, t, s) ds \right) d\tau = \tilde{u}(x, t); \\ \tilde{u}(x, t+2\pi) &= \frac{1}{2} \int_0^{t+2\pi} \left(K(x, t+2\pi, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t+2\pi, s) ds \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau + \frac{1}{2} \int_t^{t+2\pi} \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau = \\ &= \tilde{u}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau = \\ &= \tilde{u}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(K(x, t, \tau) - \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \equiv \tilde{u}(x, t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(-x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{-x-t+s}^{-x+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(-\eta, \tau) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x+t-s}^{x-t+s} f(-\eta, s) d\eta \right) d\tau = -\tilde{u}(x, t), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Використовуючи доведені властивості для функцій $u^0(x, t)$ і $\tilde{u}(x, t)$ та зображення оператора $(Pf)(x, t) \equiv u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$ переконуємося у справедливості тверджень леми 2.

Одержані результати дозволяють використовувати аналітичний метод для дослідження нелінійних та квазілінійних крайових періодичних задач. Покажемо це на прикладі такої квазілінійної крайової 2π -періодичної задачі:

$$v_{tt} - v_{xx} = F[v, v_t, v_x](x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds, \quad (16)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad v(x, t+2\pi) = v(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2. \quad (17)$$

Теорема. Нехай для кожної функції $v(x, t) \in C^2(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ функція $F[v, v_t, v_x](x, t) = f(x, t, v(x, t), v_t(x, t), v_x(x, t)) \in C^1(\mathbf{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$. Тоді функція $v(x, t) = (PF[v, v_t, v_x])(x, t)$, визначена формулою

$$\begin{aligned} v(x, t) &= (PF[v, v_t, v_x])(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[v, v_t, v_x](\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v, v_t, v_x](\xi, s) d\xi \right) d\tau \equiv \\ &\equiv z(x, t) + (P_0 F[v, v_t, v_x])(x, t) \end{aligned} \quad (18)$$

є 2π -періодичним розв'язком задачі (16), (17).

Доведення. Те, що функція $v(x, t)$, визначена інтегральним рівнянням (18), задовольняє умови (17), було показано при доведенні тверджень леми 2. Тепер доведемо виконання рівності (16). Обчислимо похідні другого порядку v_{tt} та v_{xx} :

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \frac{1}{2} (\mu(t+x) - \mu(t-x)) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v, v_t, v_x](\xi, s) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau) + F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds \right) d\tau; \\ v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau + \\
& + \frac{1}{2} (F[v, v_t, v_x](x, t) + F[v, v_t, v_x](x, t)) - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) + F[v, v_t, v_x](x, t) - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau; \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_x(x, t) &= \frac{1}{2} (\mu(t+x) - \mu(t-x)) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau) - F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) - F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds \right) d\tau;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau. \tag{20}
\end{aligned}$$

На основі рівностей (19) і (20) знаходимо

$$v_{tt} - v_{xx} = F[v, v_t, v_x](x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds,$$

що й потрібно було довести.

Встановимо ряд оцінок, необхідних для доведення теореми існування розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі (16), (17).

Лема 3. Нехай $f(x, t)$ – неперервна на прямокутнику $\bar{\Pi}_{2\pi} = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ функція.

Тоді для ядра $K(x, t, \tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi$ оператора Д'Аламбера

$$(\tilde{P}f)(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \text{ справедлива оцінка}$$

$$|K(x, t, \tau)| \leq M_0 |t - \tau|,$$

де $M_0 = \max_{(x,t) \in \bar{\Pi}_{2\pi}} |f(x, t)|$.

Лема 4. Нехай $f(x, t)$ – неперервна на прямокутнику $\bar{\Pi}_{2\pi}$ функція. Тоді

$$\left| \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| \leq \frac{1}{2} (2\pi t - t^2) M_0 \equiv \frac{M_0}{2} \beta_1(t),$$

де $\beta_1(t) = 2\pi t - t^2$, причому $\beta_1(t) \leq \pi^2 \forall t \in [0, 2\pi]$.

Доведення. Враховуючи твердження леми 3, маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| &= \left| \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^t K(x, t, s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| = \\ &= \left| \int_0^t K(x, t, \tau) - \frac{t}{2\pi} \int_0^t K(x, t, s) ds - \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x, t, s) ds \right| \leq \\ &\leq \left(\left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) \int_0^t |K(x, t, \tau)| d\tau + \left| \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} |K(x, t, s)| ds \right| \right) \leq \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) M_0 \int_0^t |t - \tau| d\tau + \left| \frac{M_0 t}{2\pi} \int_t^{2\pi} |t - s| ds \right| = \\ &= \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) \left(-(t - \tau)^2 \right) \Big|_0^t + \frac{M_0 t}{4\pi} (s - t)^2 \Big|_t^{2\pi} = \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) t^2 + \frac{M_0 t}{4\pi} (2\pi - t)^2 = \\ &= \frac{M_0}{4\pi} \left((2\pi - t)t^2 + t(2\pi - t)^2 \right) = \frac{M_0}{4\pi} (2\pi t^2 - t^3 + 4\pi^2 t - 4\pi t^2 + t^3) = \\ &= \frac{M_0}{4\pi} (4\pi^2 t - 2\pi t^2) = \frac{M_0}{2} (2\pi t - t^2) \equiv \frac{M_0}{2} \beta_1(t), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Одержані оцінки ми використаємо в подальшому для доведення теореми єдиності розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1967. **20**, № 1. P. 145–205.
2. Brezis H., Coron J. M., Nirenberg L. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz. *Comm. Pure Appl. Math.* 1980. Vol. **33**. P. 667–689.
3. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наукова думка, 2002. 416 с.
4. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений. *Дифференциальные уравнения*. 1984. **XX**, № 10. С. 1733–1739.
5. Хохлова Л. Г., Хома Н. Г., Петрівський Я. Б. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі. *Волинський матем. вісник*. 1995. Вип. 2. С. 179–182.
6. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку I. *Укр. Мат. журн.* 2005. **57**, № 7. С. 912–921.
7. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Властивості 2π -періодичних розв'язків крайової задачі. *Доповіді НАН України*. 2010. № 10. С. 18–21.
8. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Окремий випадок існування 2π -періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку. *Доповіді НАН України*. 2012. № 2. С. 35–41.
9. Хома-Могильська С. Г. Представлення розв'язку крайової періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика*. 2014. Вип. 25, № 1. С. 133–136.
10. Khoma G. P., Khoma N. G., Khoma-Mohylska S. G. Existence T-periodic solutions of the second-order hyperbolic equations. *Modern scientific research and their practical application*. 2014. Vol. J21414-002. P. 9–13.
11. Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г., Хохлова Л. Г. Умови існування 2π -періодичного гладкого розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 257–264.

REFERENCES

1. Rabinowitz, P. (1967). Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, No. 1, pp. 145-205.
2. Brezis, H., Coron, J. M. & Nirenberg, L. (1980). Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 33, pp. 667-689.
3. Ptashnyk, B. Y., Ilkiv, V. S., Kmit, I. Ya. & Polishchuk, V. M. (2002). Unlocal regional tasks are for equalizations with the derivatives of part. Kiev: Naukova dumka.
4. Veyvoda, O. & Shtedry, M. (1984). Existence of classic periodic decisions of wave equalization. Connection of теоретико-числового character of period and geometrical properties of decisions.. *Differentsialnyye uravneniya*, XX, No. 10, pp. 1733-1739.
5. Khokhlova, L. H., Khoma, N. H. & Petrivskiy, Ya. B. (1995). Banal upshots of homogeneous regional periodic task. *Volynskiy matem. visnyk*, Iss. 2, pp. 179-182.
6. Mytropolskiy, Yu. O. & Khoma-Mohylska, S. H. (2005). Terms of existence of decisions of regional periodic task for heterogeneous linear hyperbolic equalization of the second order I. *Ukr. Mat. zhurn.*, 57, No. 7, pp. 912-921.
7. Samoilenko, A. M., Khoma, N. H. & Khoma-Mohylska, S. H. (2010). Properties of 2π -periodic decisions of regional task. *Dopovidi NAN Ukrainy*, No. 10, pp. 27-32.
8. Samoilenko, A. M., Khoma, N. H. & Khoma-Mohylska, S. H. (2012). A separate case of existence of 2π -periodic decisions of regional tasks is for hyperbolic equalization of the second order. *Dopovidi NAN Ukrainy*, No. 2, p. 35-41.
9. Khoma-Mohylska, S. H. (2014). Presentation of decision of regional periodic task is for hyperbolic equalization of the second order. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriya: Matematyka i informatyka*, Iss. 25, No. 1, pp. 133-136.
10. Khoma, G. P., Khoma, N. G. & Khoma-Mohylska, S. G. (2014). Existence T-periodic solutions of the second-order hyperbolic equations. *Modern scientific research and their practical application*, Vol. J21414-002, pp. 9-13.
11. Khoma, N. H., Khoma-Mohylska, S. H. & Khokhlova, L. H. (2016). Existence conditions of 2π -periodic smooth solution to the quasi-linear equation of hyperbolic type. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fyzyko-matematychni nauki*, No. 1, pp. 257-264.