

**Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний педагогічний університет
імені Володимира Гнатюка**

**Фізико-математичний факультет
Кафедра інформатики та методики її навчання**

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на тему:
«КЕЙС-ТЕХНОЛОГІЇ ПРИ ВИВЧЕННІ ОСНОВ ТЕОРІЇ ГРАФІВ В
ПРОФІЛЬНОМУ КУРСІ ІНФОРМАТИКИ»**

**Спеціальність: 014.09 Середня освіта (Інформатика)
Освітня програма «Інформатика, математика, STEM-освіта»**

**Здобувача другого (магістерського)
рівня вищої освіти
Данильчука Олександра Івановича**

**НАУКОВИЙ КЕРІВНИК:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Грод Інна Миколаївна**

**РЕЦЕНЗЕНТ:
методист (завідувач) Центру ІКТ
ТОКІППО
Кривокульський Любомир
Євстахович**

Тернопіль – 2025

Зміст

Введення.....	3
Розділ 1. Теоретичні аспекти використання кейс-технологій у навчальному процесі	5
1.1. Поняття кейсових технологій, види	5
1.2. Кейс-технології в освітньому процесі	7
1.3. Зміст, принципи створення та методи кейс-технологій	11
1.4. Аналіз досвіду вивчення і використання теорії графів у середній ...	15
школі	
Розділ 2. Методологічні особливості використання кейс-технологій у процесі вивчення основ теорії графів	21
2.1. Основні етапи розв’язування задач	21
2.2. Теоретичні відомості про графи	26
2.3. Олімпіадні завдання на застосування графів	31
2.4. Розробка кейсів для проведення занять факультативу	41
2.5. Приклади використання кейсів	54
2.6. Методичні розробки по темах факультативу	63
2.7. Технологічна карта заняття	69
Висновок	83
Література	84

Вступ

Актуальність дослідження. Шкільний курс інформатики не передбачає ґрунтовного вивчення основ теорії графів. Лише в деяких підручниках є завдання, розв'язки яких ґрунтуються на представленні даних задачі у вигляді графів. Але навіть ці задачі містяться в цих підручниках в дуже невеликій кількості і в основному у вигляді додаткової інформації. Незважаючи на це, завдання, що розв'язуються за допомогою графів, дуже поширені на математичних олімпіадах. У зв'язку з цим стає очевидною, що існує проблема того, що графи недостатньо розглядаються в загальноосвітній школі для успішної участі в олімпіаді. Тому виникають питання, як і коли можна навчити учнів основам теорії графів? Як зацікавити учнів у вивченні цього матеріалу? Найбільш ефективною формою організації таких занять є факультативи. Однією з ефективних педагогічних технологій в даному випадку буде використання кейсів при вивченні даної теми. При використанні методу кейс-технологій школярі мають можливість розвивати комунікативні навички, вміння творчо мислити, вміння працювати як самостійно, так і в команді, вміння діяти і приймати рішення в умовах нестачі або, навпаки, надлишку інформації. При цьому головна перевага методу кейс-технології полягає не тільки в тому, що він дозволяє показати взаємозв'язок між теоретичними знаннями і навичками, але і в можливості навчитися застосовувати отримані теоретичні знання в реальному житті, тим самим підвищуючи мотивацію у вивченні даної теми.

При всіх перевагах використання даного методу в освіті, розроблених кейсів на тему «Графи» дуже мало, що обумовлює актуальність обраної теми дослідження: «Кейс-технології при вивченні основ теорії графів в загальноосвітній школі».

Об'єкт дослідження: процес вивчення основ теорії графів.

Предмет дослідження: кейс-технології при вивченні основ теорії графів у 9 класі.

Мета даного дослідження: розробити факультативний курс по темі "Основи теорії графів" з використанням методу кейс технологій.

Завдання:

- вивчити літературу по темі дослідження,
- проаналізувати підручники та олімпіади з інформатики та математики на предмет наявності задач, які розв’язуються за допомогою графів,
- розробити факультативний курс на тему «Основи теорії графів» з використання кейс-технологій,
- дати методичні рекомендації щодо використання кейс-технологій при вивченні основ теорії графів у 9 класі.

Наукова новизна дослідження полягає в розробці факультативного курсу «Основи теорії графів» з використанням кейс-технологій.

Практична значущість зумовлена можливістю використання методичних напрацювань у процесі навчання дев'ятикласників з метою підвищення мотивації у вивченні графів, ефективності занять та підвищення якості знань учнів.

Розділ 1. Теоретичні аспекти використання кейс-технологій у навчальному процесі

1.1. Поняття кейс-технологій, види.

Розглянемо визначення поняття «кейс-техніка», дане різними авторами. Наприклад, за А. М. Деркачем, кейс-технологія – це «активний метод навчання, заснована на організації учителем в групі учнів обговорення завдання, яке є описом конкретної ситуації з явною або прихованою проблемою» [4].

Івасик В.Б. визначає кейс-технологію як «сучасну освітню технологію, засновану на аналізі проблемної ситуації, яка поєднує в собі одночасно рольові ігри, проектні методи і ситуаційний аналіз» [6].

Сурмін Ю. П дає таке визначення: кейс-технологія – це «технологія взаємодії для короткочасного навчання на основі вигаданих або реальних ситуацій, спрямована не тільки на засвоєння знань, а й на формування в учнів нових якостей і навичок» [14]. Основне призначення цієї технології – розвивати вміння працювати з різними проблемами та знаходити їх вирішення.

Кейс-технологія, з точки зору більшості дослідників, являє собою аналіз конкретної ситуації, який змушує піднімати шар отриманих знань і застосовувати їх на практиці.

Тому поняття кейс-технології можна розглядати як сучасну інтерактивну технологію короткострокового навчання, яке ґрунтується на аналізі проблемних ситуацій і спрямована не тільки на засвоєння учнями знань, а й на формування у них нових якостей і вмінь.

Основні види кейсів за ознаками класифікації представлені в таблиця 1.

Таблиця 1 – Види кейсів

За цілями навчання			
кейс, спрямований на розвиток оцінювальної і аналітичної діяльності	кейс, який спрямований на розвиток умінь прийняття рішень, і знаходження розв'язку проблеми	кейс, який слугує ілюстрацією до задачі та способу її розв'язання	
За поєднанням прийомів і засобів навчання			
<u>кейс-виклад.</u> Це кейс, який представлений у вигляді розповіді про ситуацію і можливі дії в умовах цієї ситуації, а також про висновки за результатами розв'язання ситуації.	<u>кейс-ілюстрація.</u> Даний кейс має ряд відомостей, на підставі яких можна створити свій розв'язок	<u>кейс-практична частина.</u> Цей кейс містить інформацію, що передбачає всебічний її аналіз та пошук найбільш ефективного рішення	<u>кейс з питаннями.</u> В цьому кейсі обов'язково є структуровані завдання у вигляді питань після основного об'єму інформації
За близькістю до практичної діяльності			
практичні кейси		Науково-дослідні кейси	
За типом одержуваного результату кейси поділяються на			
<u>проектні</u> У цьому випадку в результаті отримують програму дій для подолання проблеми, що виникла в ситуації.		<u>проблемні</u> В даному випадку результатом роботи над кейсом є визначення і формулювання проблеми і обов'язково оцінка складності розв'язку.	
За джерелом інформації			

<u>реальні.</u>	<u>умовно реальні.</u>	<u>видумані.</u>
В основі кейсу лежить реальна ситуація в реально існуючій компанії, інформація про яку отримується безпосередньо від джерела в ході цілеспрямованого збирання інформації.	В основі кейсу лежить знайдена, відібрана і структурована в кейс інформації, що з'являється в засобах масової інформації: газетах, журналах, в порталах новин, буклетах, інформації з презентацій та виставок, а також на сайтах самих організацій	Ситуації, що є умовними, розробленими вчителями з дидактичною метою

1.2. Кейс-технології в освітньому процесі

Вперше робота з кейс-технологіями як частина навчального процесу була реалізована в Гарвардській школі бізнесу в 1908 році.

В Україні цю технологію почали використовувати зовсім недавно, лише в останні роки.

Кейс-технології – це один із методів, який допомагає школярам впоратися з розривом між теорією та практикою, між застарілими освітніми програмами та життєвими ситуаціями.

Таким методом останнім часом став широко використовуватися в шкільній освіті.

«Ця технологія розвиває в учнів творче та логічне мислення, вміння вислухати альтернативну точку зору і сформулювати власну, застосовувати і аналізувати ефективність застосування власних логічних, аналітичних та творчих здібностей і вмінь; а також, розвиває вміння комунікації і роботи в команді для пошуку найбільш раціонального розв'язку» [14]. Цей метод в даний час широко використовується в практиці викладання в середній і вищій освіті, і може бути успішно застосований при викладанні різних дисциплін в школі.

«Школярі, особливо в старших класах, позитивно ставляться до цього методу, кейс-технологія дозволяє їм формувати, проявляти і доводити свою думку, що сприяє формуванню особистості, формує позитивне відношення і мотивацію до навчання.

Кейс-метод передбачає вивчення досвіду конкретної організації і застосування тих чи інших розв'язків при виникненні певної задачі, а також вивчення абстрактної ситуації і її аналіз. Кейс-метод не завжди має на увазі творчий підхід до пошуку самого розв'язку або альтернативного розв'язку, в той час як метод конкретних ситуацій має на увазі не тільки аналіз конкретної ситуації і аналіз її розв'язку співробітниками організації, але і вироблення власного рішення.

Кейс-метод має на увазі використання вигаданих ситуацій для того, щоб навчитися розв'язувати найбільш типові, в методі конкретних ситуацій вигадані випадки, як правило, не використовуються, беруться тільки ті, що дійсно відбулися, тобто конкретні ситуації» [5].

Кейс-метод може не мати на увазі наявності готового розв'язку в принципі, або спиратися на існуючий розв'язок, в методі конкретних ситуацій завжди є розв'язок, так як ситуація виникла і була вирішена співробітниками організації, але в кейс-методі учні або пропонують розв'язок, або аналізують те, що було зроблено, в методі конкретних ситуацій вони аналізують прийняте рішення, аналізують як ситуацію, так і розв'язок, шукають недоліки і переваги в прийнятому розв'язку і розробляють свій варіант.

Основні переваги та недоліки використання методу кейс-технологій в навчанні представлені в таблиці 2.

Таблиця 2 – Переваги та недоліки

Переваги	Недоліки
1. Кейс-технології мають яскраво виражену практичну спрямованість, так як учень на деякий час стає лідером цієї ситуації і повністю сам нею керує.	1. Кейс може мати кілька рішень розв'язку, а не один конкретний розв'язок і вчителю оцінити розв'язок учня непросто (або знаходити компроміс між

	запланованим і запропонованим розв'язком кейсу)
2. Учні за рахунок застосування кейс-технологій не тільки вивчають, а й застосовують вивчену теорію на конкретних практичних прикладах, відпрацьовують як стандартні, так і нестандартні схеми розв'язування різних завдань, а також вчиться знаходити альтернативи типовим розв'язкам.	2. На розробку кейсів у вчителя зазвичай йде багато часу.
3. Учень отримує можливість вільно спілкуватися з усіма учасниками в процесі дискусії, а також йому надається можливість висловити свою точку зору на розв'язок в даній ситуації.	3. Не всі теми, які вивчають у шкільній програмі, можна описати за допомогою кейсів
4. Учитель має можливість систематично оцінювати знання, вміння та навички школярів як на основі спостереження за дискусіями, так і на підставі захисту звітів по розв'язуванню кейсу. Він також отримує можливість використання колективного розуму і практичного досвіду, набутого самими учнями в процесі розв'язування кейсу.	4. Постійне використання кейсів може привести до того, що учні можуть звикнути до постійної яскравої мотивації в навчанні і втратять зовсім інтерес до тем, які викладаються без кейс-технологій.
5. Використання кейсів економить час на навчання, оскільки кейси зазвичай даються учням перед початком уроку.	

Виділимо деякі особливості кейс-методу:

1. Цей метод є одним із різновидів дослідження діяльності, а також його

можна віднести до одного з різновидів проектної технології, так як він передбачає розробку алгоритму розв'язування поставленої в кейсі задачі. Тобто, кейс в даному випадку виступає і як проблема дослідження, і як джерело інформації для створення плану дій (як в проектній діяльності).

2. Кейс-метод може використовуватися як для колективного, так і для індивідуального навчання.

3. Кейс-метод сприяє створенню ситуації успіху. А ситуація успіху служить основою для формування позитивної мотивації навчальної діяльності, пізнавальної та дослідницької активності.

Звичайно ж, головне завдання вчителя при застосуванні цього методу полягає в тому, щоб створити максимально цікаву ситуацію для учнів.

Кейс-технології дозволяють розвинути такі навички:

- *аналітичні навички*: вміння відрізнити дані від інформації, класифікувати, виділяти суттєву і другорядну інформацію, аналізувати, представляти і витягувати її, знаходити прогалини в інформації і вміти їх відновлювати, мислити ясно і логічно.
- *практичні навички*: рівень складності поставленої у справі проблеми, який навмисно занижується в порівнянні з реальною ситуацією, сприяє більш легкому формуванню на практиці навичок використання теорії, методів і принципів, дозволяє подолати бар'єр складності теорії.
- *творчі навички*: для вирішення ситуації також дуже важливо вміти застосовувати творчі навички для генерації альтернативних рішень.
- *комунікативні навички*: вміння вести дискусію, переконувати інших, відстоювати власну точку зору, переконувати опонентів, складати короткий, переконливий звіт.
- *соціальні навички*: вміння слухати, підтримувати в дискусії або аргументувати протилежну думку, володіти собою тощо
- *самоаналіз*: незгода в дискусії сприяє усвідомленню та аналізу думок інших та своїх власних.

Таким чином, освітній ефект кейс-методу полягає в наступному (рис. 1):



Рис. 1 – Освітній ефект кейс-методу

1.3. Зміст, принципи створення і методи кейс-технологій

Зміст кейсів. Повний комплект кейсу для освітнього процесу повинен включати в себе наступне:

- текст з ситуацією, проблемою для обговорення,
- у разі необхідності, додатки, в яких надається додаткова інформація,
- висновки у вигляді запропонованого розв'язку та можливі наслідки прийнятого розв'язку,
- методичні пояснення для вчителя, а також аналіз ситуації з точки зору автора.

Принципи створення кейсу. Можна виділити кілька етапів в організації занять з використання кейс-технологій: підготовчий та етап проведення, який поділяється на ознайомчий, аналітичний і підсумковий, вони представлені на рис. 2.



Рис. 2 – Етапи організації занять з використанням кейс-методу

Розглянемо докладніше.

На підготовчому етапі педагоги створюють кейс, а саме: формулюється саме завдання, описується ситуація в цьому завданні, а також формуються його навчальні основи і розробляються методичні рекомендації щодо розв'язування цього кейсу і його оцінювання.

Потім учитель оформляє суть проблемної ситуації у вигляді головного питання або переліку питань, на які учні повинні будуть знайти відповідь.

На етапі реалізації спочатку відбувається ознайомлення із кейсом. Учитель занурює учнів в описану в кейсі ситуацію і стимулює їх до її розв'язання.

Розв'язування кейсу зазвичай проводиться в наступному порядку:

1. Ознайомлення з обстановкою, занурення в сюжет.
2. Пошук основної проблеми ситуації – самим вчителем або групою учнів в ході дискусії (де в ситуації є протиріччя, в чому складність проблеми).
3. Формулювання проблеми і відбір найбільш точних уявлень про проблему в результаті фронтального мозкового штурму та обговорення.
4. Пошук гіпотетичних розв'язків і виходів із ситуації на основі мозкового штурму та презентація розв'язків від малих груп.
5. Перевірка представлених робочих гіпотез під час фронтального

обговорення під контролем і при участі вчителя. Пошук додаткової інформації з інших джерел, за потреби – викладач повинен враховувати необхідність надання додаткових посібників, літератури, довідників. Іноді додаткова інформація роздруковується заздалегідь і пропонується учням в той момент, коли вони доходять логічним аналізом до необхідності її використання

6. Приймається спільний колективний розв'язок.
7. Здійснюється його доведення та аргументація.
8. Проводиться рефлексія над ходом розв'язування кейсу.

Використання кейсів в процесі навчання вимагає підготовленості учнів, наявність у них навиків самостійної роботи, вміння працювати з текстом, комунікативної взаємодії, навиків розв'язування проблемних питань. Недостатня підготовка учнів, недорозвиненість їх мотивації можуть призвести до поверхневого обговорення кейсу.

Прийоми і засоби навчання при застосуванні кейсового методу. Існує 3 можливі стратегії використання комбінацій різних прийомів і засобів навчання, що використовуються вчителем:

1. Учитель дасть підказки у формі додаткових питань або (додаткової) інформації в процесі роботи учнів над кейсом.
2. Учитель буде сам давати відповідь або підтверджувати, чи правильно обраний напрям дій учнів.
3. Учитель надає учням повну свободу дій, та оцінює розв'язування кейсу на етапі його презентації та рефлексії.

Отже, можна сказати, що кейс-технологія – це інструмент застосування теоретичних знань, умінь та навиків для розв'язування практичних задач шляхом використання ключових компетентностей, освоєних на певному рівні. Ця технологія розвиває в учнів готовність та здатність мислити креативно та нестандартно, вміння висловлювати і вислуховувати думку, робити і аргументувати висновки. Кейс-технологія сприяє оволодіння оціночною, аналітичною, дослідницькою та пізнавальною активністю та діяльністю, розвиває

вміння працювати в команді та шукати найбільш ефективний і раціональний шлях розв'язування представленої задачі.

Для середньої школи **основними методами** кейс-технологій є такі методи (рис. 3):



Рис. 3 – Основні методи кейс-технологій

Основна **увага в інцидентному методі** приділяється процесу отримання інформації. Його метою є пошук інформації самим учнем: збір, систематизація та аналіз інформації. Школярам не видається кейс в повному обсязі. Він може бути усним або письмовим, наприклад, «Сталося...» або «Так сталося...».

Основою **методу розбору ділової кореспонденції** є робота з офіційними паперами, документами, пов'язаними з тією чи іншою організацією, ситуацією.

Учасники отримують від викладача папки з однаковим набором документів. Його основна мета – зайняти позицію людини, відповідальної за роботу з «вхідними документами» і впоратися з усіма завданнями, які має на увазі ця робота.

Метою кейсу **ігрового проектування** є процес створення або вдосконалення проектів.

Учасники діляться на групи, і кожна група розробляє свій проект, причому проекти можуть бути різних типів: дослідницькі, пошукові, творчі, аналітичні, прогностичні.

Ситуативно-рольова гра. Метою ситуаційно-рольової гри є те, щоб у вигляді інсценування створити ситуацію перед аудиторією, а потім дати можливість оцінити дії і поведінку учасників гри.

Найбільш поширеним видом цього методу є рольові ігри.

Метод дискусії представляє собою обмін думками з будь-якого питання у відповідності до більш або -менш визначеними правилами процедури. Групові та міжгрупові дискусії відносяться до інтенсивних технологій навчання.

1.4. Аналіз досвіду вивчення і використання теорії графів у середній школі

Аналіз досвіду вивчення і використання теорії графів у середній школі дозволив виділити такі напрями:

1. *Графи як об'єкт вивчення.* Дослідники даного напрямку вивчають питання збагачення змісту шкільного курсу математики, інформатики та інших предметів за рахунок впровадження окремих розділів теорії графів, розробляють методику їх вивчення (Н.Р. Балик, Л. О. Савенкова, В. М. Приходько, Івасик В.Б., О. Оре, Ж. Папі, Ковальова К.).

2. *Графи як засіб моделювання навчального матеріалу.* Дослідники даного напрямку використовують можливості моделювання та структурування навчального матеріалу за допомогою графів для удосконалення способів та методів його викладання (Михайлова Е. А., Кузьменко І. М.).

3. *Використання графових моделей у спеціальних задачах методики навчання математики.* Дослідники даного напрямку використовують можливості моделювання структури різних дидактичних і методичних об'єктів за допомогою графових моделей і на цих моделях вивчають властивості цих об'єктів, а також шукають шляхи удосконалення процесу навчання (Івасик В.Б., Кузьменко І. М.).

Слід відмітити, що при вивченні інформатики та математики учні постійно зустрічаються з простими поняттями та задачами теорії графів: задача комівояжера, знаходження найкоротших шляхів у мережах, проблема чотирьох

фарб, подання алгоритму у вигляді блок-схеми, відображення ієрархії даних у вигляді дерева, розв'язування логічних, текстових, комбінаторних задач з використанням графових моделей.

Разом з тим питання вивчення елементів теорії графів так і не знайшли широкого впровадження в навчальний процес школи, зокрема, шкільну інформатику. Це було зумовлено тим, що не вистачало часу на уроках математики, не існувало ефективних засобів для вивчення теорії графів в позаурочний час. Тому вивчення цих питань довгий час залишалося лише фрагментарним.

У сучасних науково-методичних дослідженнях знову звертаються до проблем вивчення в середній школі, зокрема в шкільному курсі інформатики, окремих питань теорії графів, що зумовлено такими факторами:

1. Методи дискретної математики у зв'язку із впровадженням засобів ЦТ знаходять широке застосування у різних галузях людської діяльності.

2. Поняття графа завдяки його наочності і узагальненості використовується в інформатиці для описання структури складних об'єктів (мережі, логічні схеми, ієрархічні структури тощо) і функціонування систем (граф переходів автомата, граф гри тощо).

3. Вивчення елементів теорії графів відкриває широкі можливості для ознайомлення учнів з новими поняттями, які знаходяться на більш вищому ступені абстракції, з якісно новими задачами і методами їх розв'язування. Задачі теорії графів є для учнів найбільш доступними і популярними із всіх розділів дискретної математики.

4. Моделювання за допомогою графів реалізує одну із важливих потреб – потребу наочності. Малюнок графа є знаком, матеріальним предметом, який чуттєво сприймається і виступає як посередник між реальною дійсністю і математичною моделлю. Використання малюнків графів нерозривно пов'язане з процесами абстрагування і деталізації, за допомогою яких відбувається відокремлення тих ознак об'єкта, що моделюється, і які потім відобразатимуться в моделі. Графові моделі забезпечують зв'язок мислення з

реальними ситуаціями. Вони служать засобом отримання нового знання, збагачують процеси мислення багатьма цінними деталями, що втрачаються в абстрактних поняттях.

5. Елементи теорії графів носять пропедевтичний характер в плані вивчення інших тем шкільного курсу інформатики (штучний інтелект, експертні системи).

6. Широке використання засобів і методів ЦТ у навчальному процесі дозволяє створювати і розробляти нові ефективні методики навчання природничо-наукових дисциплін, в тому числі елементів теорії графів.

Вивчення елементів теорії графів як одного з найбільш вагомих розділів дискретної математики дозволяє посилити теоретичну базу знань учнів з інформатики та ефективно формувати головні компоненти їхньої інформаційної культури за рахунок використання цієї теорії як засобу:

- поглиблення розуміння сутності інформації, її дискретизації;
- інформаційного моделювання реальних систем;
- розвитку алгоритмічних навичок;
- розвитку прикладного напрямку шкільної інформатики.

Оскільки елементи теорії графів не входять до освітньої програми з інформатики середньої школи, то їх вивчення можливе як предмет за вибором учнів або як факультативний курс. Хоча є доцільним ввести вивчення деяких понять та питань елементів теорії графів (наприклад, поняття дерева, ейлерового і гамільтонового циклів, алгоритмів пошуку в глибину та в ширину тощо) до шкільної програми загальноосвітньої школи.

Одним із ключових моментів методичної системи навчання елементів теорії графів є використання засобів ЦТ, що відкриває широкі перспективи щодо удосконалення змісту навчання, методів і організаційних форм, поглиблення та розширення теоретичної бази знань та надання результатам навчання практичної значущості, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу учнів з урахуванням їх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів і здібностей.

Серед засобів ЦТ особливе місце посідають ППЗ. Так називається програмний засіб, у якому відображається деяка предметна галузь, у тій або іншій мірі реалізується технологія її вивчення, забезпечуються умови для здійснення різних видів навчальної діяльності. Доцільність використання ППЗ визначається мірою педагогічної і методичної ефективності у порівнянні з традиційними формами навчальної діяльності, а також у плані їх доповнення та удосконалення.

На даний час розроблена значна кількість програмних засобів з теорії графів, які дозволяють розкрити сутність та методи теорії графів. Проведений методичний аналіз показав доцільність використання в навчальному процесі таких навчальних програмних засобів як Graph, Grin, Petersen, ColourFul Mathematics.

У зв'язку із стрімким розвитком телекомунікацій є доцільним використання інформаційних матеріалів глобальної мережі Інтернет при вивченні елементів теорії графів. До можливих форм використання мережі Інтернет в навчальному процесі можна віднести:

- пошук учнем основних понять, питань і проблем з елементів теорії графів в WWW-системі, у віртуальних бібліотеках та інших джерелах інформації;
- проведення конференцій, олімпіад з теорії графів у мережі;
- організація дистанційного навчання.

Незважаючи на багаторічний досвід використання різноманітних засобів НІТ у навчальних цілях, їх потенційні можливості залишаються невичерпаними. Причиною цього є:

- невідповідність вчителів до використання засобів ЦТ у навчальному процесі;
- недоступність і нерозповсюдженість ППЗ, призначених для вивчення теорії графів;
- програмні засоби, призначені для вивчення теорії графів, не повністю враховують педагогічні проблеми і не завжди зручні для навчання;

- початкова орієнтованість програмних засобів на фахівців високої кваліфікації в галузі теорії графів або на студентів вищих навчальних закладів;
- відсутність розроблених методик використання ППЗ в навчальному процесі.

Ці недоліки зумовлені передусім недостатньою розробкою відповідних психолого-педагогічних і методологічних проблем.

Виділимо деякі психолого-педагогічні фактори, з урахуванням яких повинна будуватися методика навчання елементів теорії графів з використанням засобів ЦТ:

1. Комп'ютерна графіка підвищує унаочнення інформації, поглиблює рівень оволодіння навчальним матеріалом, забезпечує поєднання графічної інформації із знако-символьною, сприяє значному посиленню уваги при сприйнятті навчального матеріалу, дозволяє ілюструвати залежності, співвідношення, які не досить точно передаються вербальним шляхом. Особливу роль наочні образи відіграють на тих етапах пізнання навчального матеріалу, які характеризуються найбільш суб'єктивною трудністю, а інформація носить абстрактний характер.

2. Засоби ЦТ надають учням ширші можливості щодо проведення різних чисельних експериментів з графовою моделлю. З'являється можливість головну увагу приділити не прийомам опрацювання інформації, а питанням побудови графової моделі задачі та її аналізу.

3. Використання комп'ютера дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату та методів теорії графів. Комп'ютерні програми роблять окремі розділи і методи теорії графів доступними, зрозумілими, легкими і зручними для використання, а той, хто розв'язує задачу, стає користувачем математичних методів, можливо не володіючи їхньою будовою і обґрунтуванням, аналогічно до того, як він використовує інші комп'ютерні програми, не знаючи, як і за якими принципами вони побудовані, якими мовами програмування описані, які теоретичні положення покладено в їхню основу.

4. Розв'язуючи навчальні задачі за допомогою комп'ютера, учні залучаються до дослідницької діяльності, під якою розуміється всяка діяльність, направлена на отримання нового знання і яка здійснюється не за алгоритмом, а на основі самоорганізації (здатності раціонально планувати свою діяльність, здійснювати самоконтроль, регулювати і змінювати свої дії та ін.)

5. Систематично використовуючи комп'ютер і відповідне програмне забезпечення для розв'язування конкретних задач з теорії графів, учні набувають навичок інформаційного пошуку – однієї з найважливіших функцій творчості. При цьому, звичайно, визначну роль відіграє розумовий процес, який додає нову інформацію до вже наявної, а засоби ЦТ стають оперативним і гнучким інструментом формування мислення та інтелектуального розвитку учнів.

Розділ 2. Методологічні особливості використання кейс-технологій у процесі вивчення основ теорії графів

2.1 Основні етапи розв'язування задач

Що означає володіння математикою? Це є вміння розв'язувати задачі, причому не тільки стандартні, але і ті, які вимагають певної незалежності думки, здорового глузду, оригінальності, винахідливості [1].

Під терміном "завдання" розуміємо багатогранне явище навчання, яке займає велике місце в навчальному процесі і виступає як спосіб організації та управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів, носій дій, адекватних змісту викладання математики, засобом цілеспрямованого формування знань, умінь і навичок, однієї з форм методів навчання, засобом зв'язку теорії з практикою [1].

Фундаментом будь-якого завдання є своєрідне зіткнення між тим, що дається спочатку, і тим, що повинно бути отримано. Це протистояння служить поштовхом для розвитку думки.

Схематично структура задачі представлена на рис. 1



Рис. 1. Структура математичної задачі

Сьогодні розв'язування задач є одним із стовпів вивчення математики. У методологічній літературі виділяють розв'язування задач в трьох трактуваннях: розв'язування задачі як план, спосіб, метод реалізації вимоги завдання; розв'язання

задачі як процес реалізації вимоги поставленого завдання, як процес виконання плану розв'язку; розв'язання задачі як результат реалізації плану розв'язку [1].

Розв'язати математичну задачу означає знайти таку послідовність математичних суджень (визначень, аксіом, теорем, правил, законів, формул), застосування яких до умови задачі або до їх наслідків (проміжних результатів розв'язку), отримує те, що вимагається в задачі – її відповідь [2].

При розв'язуванні задач прийнято виділяти певні етапи. Залежно від конкретизації етапів автори диференціюють їх по-різному:

Одні виділяють чотири етапи: спочатку потрібно зрозуміти (проаналізувати) проблему; по-друге, скласти план розв'язку; по-третє, реалізувати план; по-четверте, озирнутися назад [7].

Інші пропонують шість етапів: перший – аналіз тексту задачі; другий – пошук розв'язку задачі; третя – реалізація плану розв'язку; четвертий – перевірка розв'язку задачі і запис відповіді; п'ятий – дослідження задачі; шосте – рефлексія.

Треті нараховують їх аж вісім. На початковому етапі слід проаналізувати умову задачі. Другий етап передбачає схематичну фіксацію стану (побудова моделі задачі за допомогою схем, графіків тощо.) Третій етап полягає в пошуку способу її розв'язку, знаходженні його теоретичної основи. На четвертому етапі здійснюється розв'язок задачі. Наступний, п'ятий крок містить перевірку запропонованого розв'язку. На шостому етапі необхідно дослідити задачу і отриманий розв'язок. Сьомий етап – формування відповіді задачі. Останній, восьмий етап полягає у виконанні пізнавального аналізу задачі та її розв'язку.

З наведеної класифікації різних авторів видно, що тільки чотири етапи: аналіз задачі, пошук розв'язку, реалізація розв'язку, вивчення розв'язку є загальними і обов'язковими, а решта етапів є необов'язковими, і включаються в алгоритм тільки при розв'язуванні складних завдань. Розглянемо докладніше кожен з чотирьох основних етапів:

На першому етапі розв'язування задачі необхідно проаналізувати наявну умову, тобто усвідомити її і зрозуміти вимоги. Важливо чітко розуміти, що є шуканим. Корисно відповісти на такі питання, як: Що невідомо? Що дано? Яка

умова? [7]. Обрані дані стануть основою для другого етапу знаходження розв'язку. Культура розв'язування задачі полягає в тому, що пошук розв'язку здійснюється на основі глибокого і всебічного попереднього аналізу проблеми [1].

Алгоритм аналізу може бути наступним:

1. аналіз описуваної ситуації в цілому;
2. визначення умови, а також вимог завдання;
3. встановлення виду і типу проблеми;
4. фіксація висновків, зроблених під час аналізу задачі.

Важливо зробити зауваження. Необхідно відповісти на наступні питання: чи можна задовольнити умову задачі? Чи є вона достатньо повною? Чи містить вона протиріччя? [2].

На другому етапі відбувається пошук, складання плану розв'язку задачі. Як правило, цей етап особливо складний для студентів, тому що пошук розв'язку довільної задачі не представлений чіткою послідовністю дій, що вимагає від учнів прояву творчого підходу. При цьому важко сподіватися на появу доброї думки при наявності слабких знань предмета, і зовсім неможливо це зробити при відсутності відповідних знань. Продуктивні ідеї ґрунтуються на минулому досвіді та отриманих знаннях, наприклад, доведених раніше теорем або розв'язаних задач. Якщо спочатку не вдається знайти зв'язок між даним і невідомим, то розгляд аналогічної, але більш легкої задачі може виявитися корисним. В результаті потрібно прийти до плану розв'язку. У цьому допоможе ряд питань, таких як: Чи доводилося стикатися з цим або подібним завданням раніше? Чи можна вдатися до його методу розв'язування? Чи можна ввести допоміжний елемент для того, щоб використовувати вихідне завдання? Як переформулювати завдання? Чи можна частково розв'язати проблему? Чи використали всі дані? [1]. Важливо цілеспрямовано розвивати в учнів навички пошуку розв'язання задач.

Рішення стандартних завдань відбувається по відповідному традиційному алгоритму. Послідовний пошук шляхів розв'язання нестандартних завдань, в свою чергу, здійснюється в рамках таких напрямків, як:

1. співвідношення конкретної задачі з теорією, а також іншими завданнями;

2. вивчення проблемного питання;
3. дослідження умови задачі;

Розглянемо ці аспекти детально.

Перший з них (співвідношення конкретної задачі з теорією, а також з іншими задачами) визначає набір питань (Чи знайоме таке завдання? Аналогічне? Чи можна застосувати його спосіб розв'язку? тощо), які підштовхують до використання методу аналогії. Зазначений метод можна легко відобразити на схемі (рис. 2)

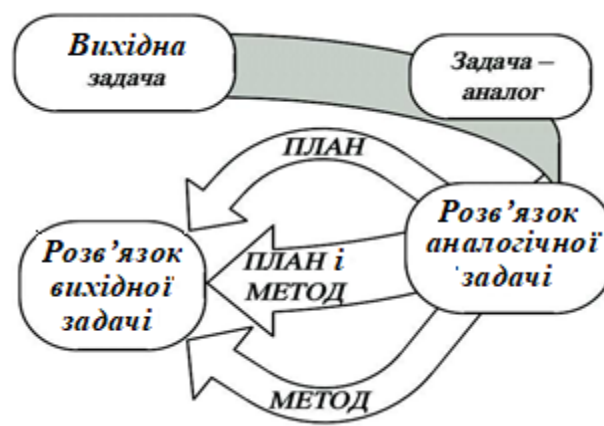


Рис. 2. Схематичне зображення методу аналогії при пошуку розв'язку задачі

Другий аспект (вивчення проблемного питання) має на увазі використання аналітичного методу, що виражається в висхідному (аналіз Паппа) або низхідному (аналіз Евкліда). Висхідний (досконалий) аналіз базується на пошуку необхідних підстав справедливості висновку. У той же час необхідно визначити, що необхідно (достатньо) знати, щоб відповісти на поставлене питання? [8]. В результаті ми отримуємо аналіз, який «піднімається» від наслідку до головного. Низхідний (недосконалий вид) аналіз базується на знаходженні достатніх умов для істинності твердження з подальшою перевіркою конвертованості тверджень (якщо останнє є справжнім), або висновком про хибність цього припущення (метод від супротивного).

Третій аспект (дослідження умови задачі) визначає використання евристичних схем для знаходження плану розв'язку задачі [8]. Це може бути варіант із система евристичних методів, які включають:

1. метод поділу задачі на підзадачі;
 - а) поділ умов на частини;
 - б) розбиття вимог на частини;
2. метод перетворення задачі;
3. метод моделювання;
4. метод введення допоміжних елементів.

Також може бути задіяний спосіб із системи евристичного методу Г. Д. Балка, який містить:

1. метод аналогії;
2. метод індукції;
3. прийом граничного випадку;

На третьому етапі розв'язування задачі відбувається складання плану розв'язання. Для цього продуманий план розв'язку повинен бути гранично точно викладеним і оформлений належним чином. Необхідно терпляче розглядати кожен елемент до тих пір, поки не будуть переглянуті усі потаємні місця, що приховують можливі помилки, і всі силогізми стануть очевидними. Важливо, щоб учень був гранично впевнений у достовірності кожного кроку свого розв'язку. Для цього можна задати питання: чи зрозуміло вам, що зроблений крок правильний? І чи здатні ви довести, що він правильний? [8].

Завершальним з обов'язкових етапів є четвертий етап – вивчення отриманого розв'язку. Цей етап містить такі компоненти, як:

1. перевірка розв'язку;
2. аналіз задачі;
3. формулювання відповіді [7].

Аналізуючи існуючий розв'язку, учні поглиблюють свої знання, закріплюють необхідні навички. Для дослідження задаються такі питання: Чи можна перевірити отриманий результат? Чи можна перевірити хід розв'язування задачі? Чи є інший спосіб отримати такий самий результат? Чи можна використовувати отриманий результат або метод його знаходження при розв'язуванні інших задач? [1].

Ключовими факторами для розвитку необхідних навиків розв'язування задач є другий і четвертий етапи.

2.2 Теоретичні відомості про графи

Перша робота з теорії графів належить Леонарду Ейлеру. Вона з'явилася в 1736 р в публікаціях Петербурзької академії наук і почалася з розгляду проблеми Кенігсберзьких мостів, яка полягала в наступному: була дана схема мостів міста Кенігсберга (рис. 3) Потрібно було вияснити, чи можна пройти по кожному з цих мостів рівно один раз?

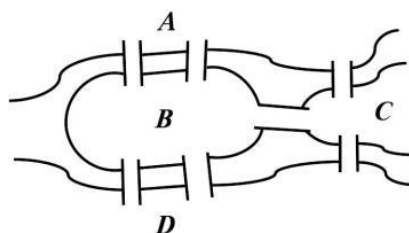


Рис. 3. Схема мостів в місті Кенігсберг

Ейлер довів, що не можна закінчувати шлях на місці старту при проходженні через кожен міст по одному разу.

Його метод полягав у наступному: мости були позначені лініями, а місця, які вони сполучають, математик позначив точками. В результаті утворилася фігура, яка називається графом (рис. 4)

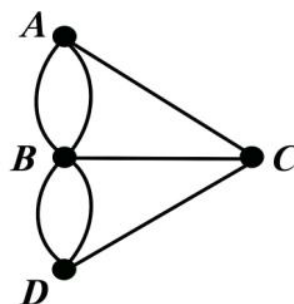


Рис. 4. Кенігсберзькі мости, які представлені графовим методом

Граф — це геометрична фігура, що складається із скінченної множини точок, а також ліній, що з'єднують деякі з них. Точки графа є його вершинами, а лінії — ребрами. В якості відомих і повсякденних прикладів графа можна назвати схеми метрополітену, авіаліній, залізниць, сузір'я на картах зоряного неба, генеалогічне

дерево тощо.

Всі графи можна диференціювати. Наприклад, якщо граф представлений тільки ізольованими вершинами (тобто вершинами, які не є кінцями будь-якого ребра), то він називається нульовим (рис. 5).

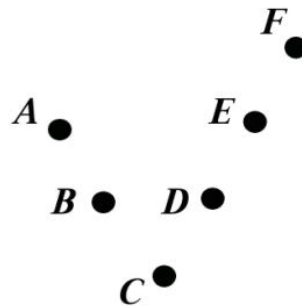


Рис. 5. Нульовий граф

У випадку, коли на графі не побудовані всі можливі ребра, він називається неповним (рис. 6).

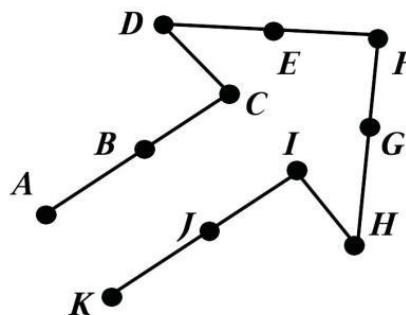


Рис. 6. Неповний граф

Граф, в якому побудовані всі можливі ребра, вважається повним (рис. 7).

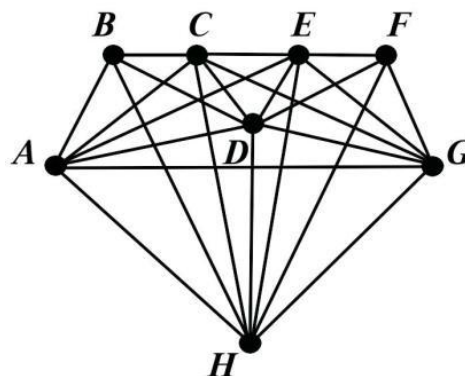


Рис. 7 Повний граф

У разі, коли на ребрах графа нанесені стрілки, що визначають напрямок

ребер, він називається орієнтовним (рис. 8).

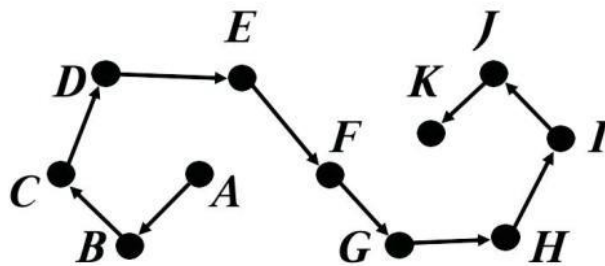


Рис. 8. Орієнтовний граф

Число ребер, які виходять з вершини графа, називається степенем вершини. Вершина графа з непарним степенем називається непарною, відповідно, з парним степенем – парною. Коли степені всіх вершин графа рівні, він називається однорідним. Тому кожен повний граф можна вважати однорідним. Якщо граф можна побудувати олівцем, не відриваючи його від паперу, то він називається унікурсальним (рис. 9).

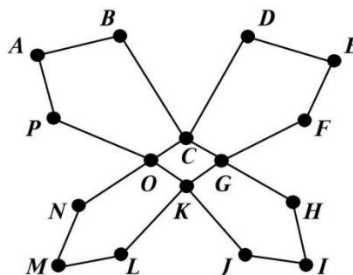


Рис. 9 Унікурсальний граф

Коли будь-які дві вершини графа можуть бути з'єднані шляхом (тобто послідовність ребер, кожне з яких починається з кінця попереднього), то граф називається зв'язним (рис. 10.1). В іншому випадку – незв'язним (рис. 10.2).

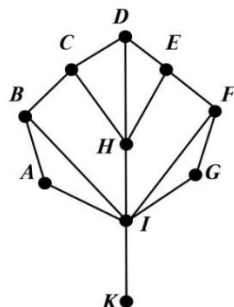


Рис. 10.1 Зв'язний граф

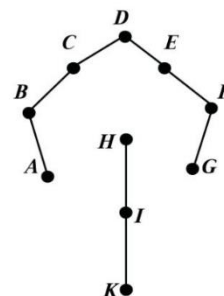


Рисунок. 10.2 Незв'язаний граф

Якщо після виключення ребра із зв'язного графа він стає незв'язним, то таке ребро називається мостом. На малюнках 10.1 і 10.2 мостами є AI , GI .

Зв'язний граф, кожна вершина якого має парне число степенів, називається графом Ейлера. Так як граф, представлений на рис. 9, зв'язний і степені вершин P , A , B , D , E , F , H , I , J , L , M і $N = 2$, а степені вершин O , C , G і $K = 4$, то його можна вважати ще і графом Ейлера.

Кожен зв'язний граф, який не має циклів (тобто шляхів, в яких початок і кінець збігаються), називається деревом (рис. 11). Граф, що складається з однієї вершини, є деревом.

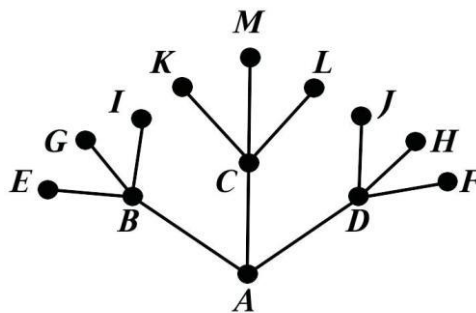


Рис. 11. Дерево

Якщо із вершини виходить тільки одне ребро, то його називають висячим. На малюнку 11 цими вершинами є E , G , I , K , M , L , J , H і F .

У випадку, коли два графи мають однакову кількість вершин, які можна пронумерувати числами від 1 до n , так, щоб вершини одного графа з'єднувалися ребром при одночасному злитті аналогічних вершин другого графа, то такі графи називають ізоморфними (рис. 12)

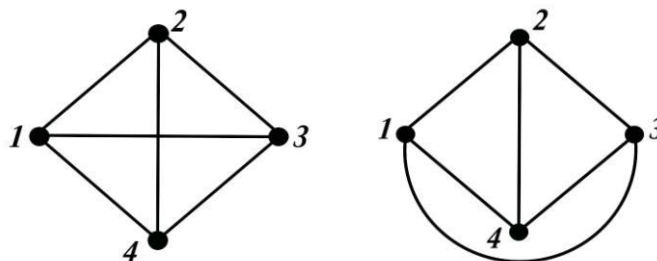


Рис. 12. Ізоморфні графи

Граф, який будується так, що його ребра перетинаються виключно у вершинах, називають плоским або планарним. Так, граф, зазначений другим на рисунку 12, є плоским.

За допомогою описаних вище графів розв'язуються завдання наступних видів:

1. побудова фігури без відриву олівця від паперу;
2. логічні;
3. про мости;
4. про будинки і колодязі;
5. про «правильну» розмальовку фігур.

Надалі, аналізуючи підручники та додаткову літературу, ми розглянемо кілька прикладів із представлених типів задач. Проаналізувавши етапи розв'язування задач, можна прийти до висновку, що чотири з них (етапи аналізу задачі, пошуку розв'язку, реалізація розв'язку, формулювання відповіді) є загальними і обов'язковими. Вони проявляються (в явній або неявній формі) в процесі розв'язання будь-якої задачі. Решта етапів – необов'язкові, і включаються в алгоритм тільки при розв'язуванні складних завдань. Особлива складність для учнів полягає в реалізації етапу пошуку розв'язку задачі.

Відобразимо етапи розв'язання задачі в схематичному вигляді (рис. 13).

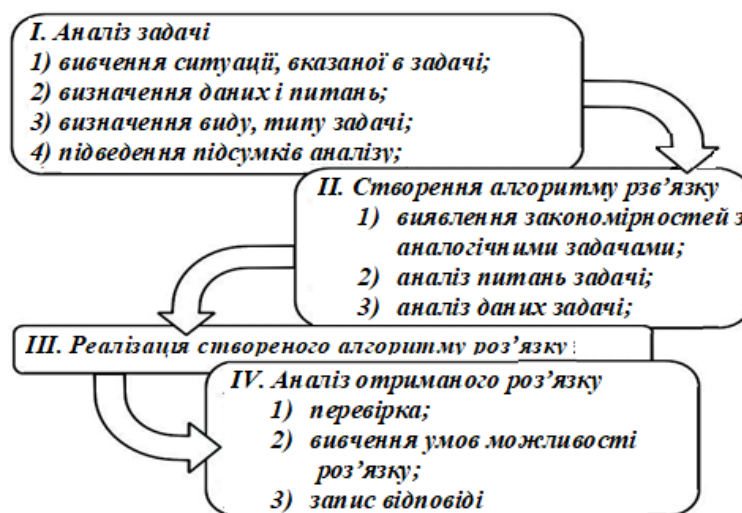


Рис. 13. Схема етапів розв'язування задач

Важливими факторами для розвитку навичок розв'язування задач є другий і четвертий етапи [7].

2.3 Олімпіадні завдання на застосування графів

Незважаючи на те, що використання графів при розв'язуванні задач дозволяє більш наочно оформити розв'язок, більшість шкільних підручників не містять інформації про графи. Лише в деяких підручниках представлені завдання, які розв'язуються за допомогою графів, але ці математичні об'єкти ніяк не позначені. Тому учні навіть не підозрюють про існування графів.

Проведемо огляд деяких завдань, які розв'язуються за допомогою графів.

Завдання 1. Скільки трьохзначних чисел можна скласти з цифр 2, 4, 6, 8, якщо цифри в позначенні числа не повторюються? [7]

Розв'язок. Першою цифрою числа може бути будь-яка із чотирьох даних цифр, другою – будь-яка із трьох інших, а третьою – будь-яка із двох, які залишилися. Виходить подання комбінацій у вигляді графа, яке називається деревом (рис. 4).

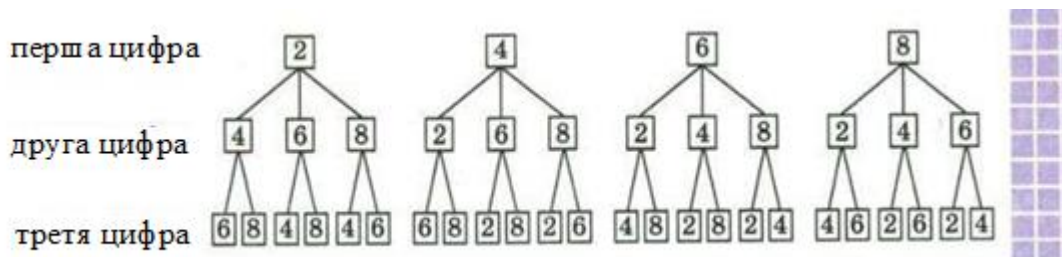
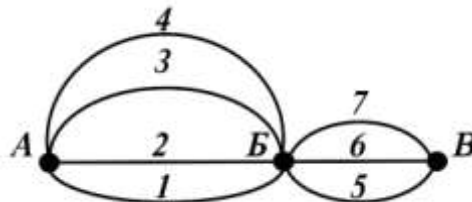


Рис. 14 – Граф для розв'язання задачі №1

Всього із даних цифр можна скласти $4 \times 3 = 24$ трьохзначних чисел [8].

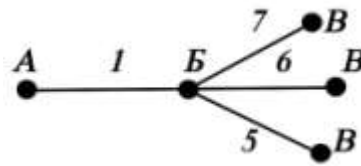
Завдання 2. З села Андріївка до села Бабіне ведуть чотири дороги, а з села Бабіне до села Верховоди – три дороги як показано на рисунку. Скількома способами можна дістатися з Андріївки до Верховодів через село Бабіне? [8]



Розв'язок: якщо із А в Б добиратися першою дорогою, то продовжити шлях є три способи.

Розмірковуючи аналогічно, отримуємо по три способи продовжити шлях,

почавши добиратися і по другій, і по третій, і по четвертій. Значить, всього виходить $4 \times 3 = 12$ способів добратися з Андріївки до Верховодів.



Завдання 3. Сім'ї, яка складається з бабусі, тата, матері, доньки та сина, подарували 5 різних горнят. Скількома способами можна поділити горнята між членами сім'ї? [7]

Розв'язок. У першого члена сім'ї, наприклад, бабусі є 5 варіантів вибору, у наступного (нехай це буде тато) залишається 4 варіанти вибору, наступний (наприклад, мама) буде вибирати вже із 3 горнят, наступний – із двох, останній отримає одне горня, яке залишилося.

Варіанти вибору горнят для всіх членів сім'ї можна зобразити у вигляді наступного графа (рис. 15).

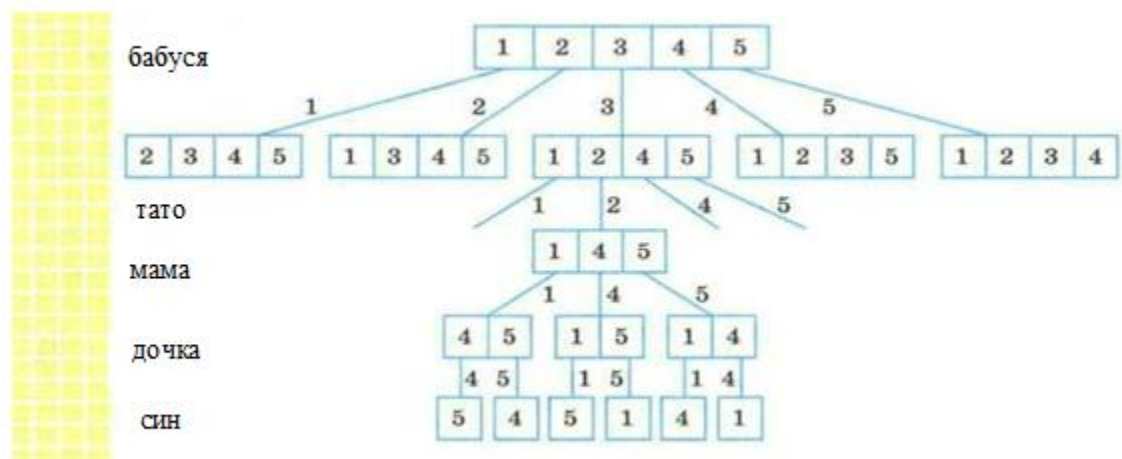


Рис. 15 – Граф-дерево для розв'язання задачі №3

Отримали, що кожному вибору горняти бабусею відповідає чотири можливі вибори тата, тобто всього 5×4 способів. Після того, як тато вибрав горня, у мами є три варіанти вибору, у дочки – два, у сина – один, тобто всього $3 \times 2 \times 1$ способів. Остаточного отримаємо, що для розв'язування задачі треба знайти добуток $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, тобто горнята між членами сім'ї можна розділити 120 способами.

Завдання №4. Визначити, які із зображених графів є унікурсальними (рис. 16), намалювати фігури, не відриваючи олівець від паперу (рис. 17).

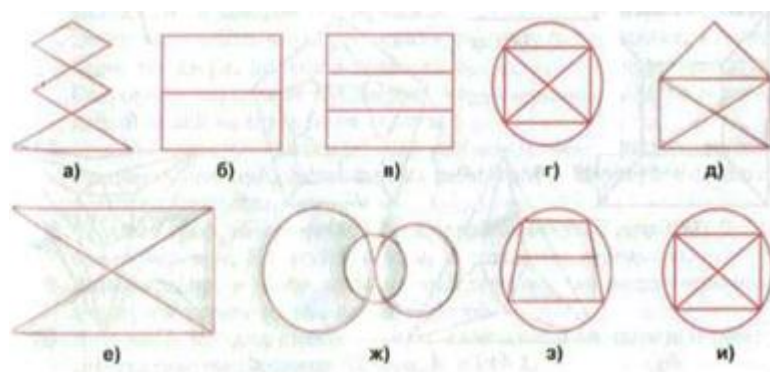


Рис. 16 – Знайдіть унікурсальні графи.

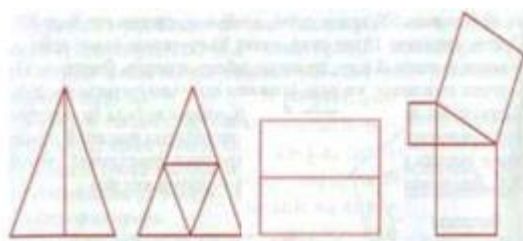


Рис. 17 – Намалювати фігури, не відриваючи олівець від паперу.

Проаналізувавши олімпіади школярів, було зауважено, що майже на кожній олімпіаді була хоч одна задача, розв'язок якої ґрунтувався на використанні графів.

Розглянемо деякі з них:

Завдання 1. У компанії 100 дітей, деякі діти дружать. Відомо, що при виділенні будь-якої дитини решту 99 дітей можна розділити на 33 групи по три людини так, щоб в кожній групі всі троє дружили попарно. Знайти найменш можливу кількість пар дітей, які дружать. [4]

Розв'язуємо з допомогою графів. Будуємо граф, в якому вершини будуть відповідати дітям, а ребра – їх дружбі. При виключенні будь-якої із вершин даного графа, з тих вершин, що залишилися, складають 33 групи, де кожна із вершин є суміжною із двома іншими. Потрібно визначити мінімальне число ребер у визначеному графі.

Можливі варіанти.

Наприклад, є єдина група, яка складається із трьох вершин. В цьому

випадку, для можливості виконання умови необхідно додати ще одну вершину, яка суміжна до всіх трьох вершин групи (рис.18).

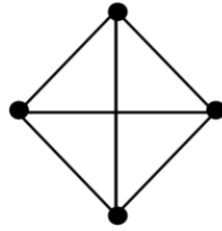


Рис. 18. – Вершина, суміжна до всіх трьох вершин групи

Тоді, якщо така група трьох вершин єдина, то граф складається із 4 вершин і 6 ребер. У випадку двох таких груп і вершини, суміжної до кожної з них, будемо мати граф, який представлений на рис. 19.

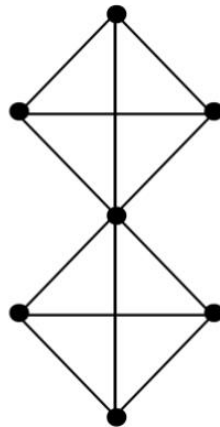


Рис. 19. – Дві групи вершин, суміжна з кожною із них

Граф на рис. 26 має 7 вершин і 12 ребер.

Тепер беремо три групи і вершину, яка суміжна до кожної групи. Отримуємо граф, зображений на рис. 20.

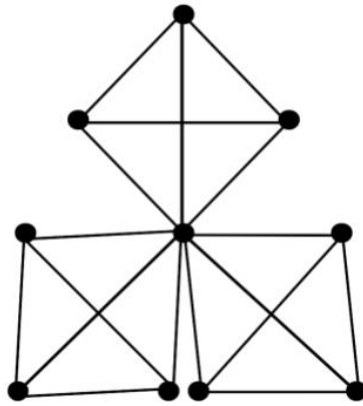


Рис. 20 Три групи і вершина, яка суміжна до кожної з них

У випадку трьох груп граф містить 10 вершин і 18 ребер.

Зауважимо закономірність, кожен раз при додаванні однієї групи число вершин можна визначити за формулою $3n+1$, де n – кількість груп. Число ребер рівне $6n$.

З умови маємо 100 вершин, тобто 33 групи і єдина вершина, суміжна з кожною з них. Число ребер рівне $6 \times 33 = 198$.

Завдання 2. У королівстві живуть графи, герцоги та маркізи. Одного разу кожен граф бився в поєдинку з трьома герцогами і кількома маркізами. Кожен герцог бився в поєдинку з двома графами і шістьма маркізами. Кожен маркіз бився в поєдинку з трьома герцогами і двома графами. Відомо, що всі графи билися з рівною кількістю маркізів. Зі скількома маркізами бився кожен граф?

Розв'язок. Нехай в королівстві x графів, y герцогів і z маркізів. Кожен граф бився з трьома герцогами, тому між графами і герцогами було $3x$ дуелей. Але кожен герцог бився з двома графами, значить, цих дуелей було $2y$. Тоді $3x = 2y$.

Кожен герцог бився із шістьма маркізами. Значить, дуелей між герцогами і маркізами було $6y$. Кожен маркіз бився з трьома герцогами, тому таких дуелей було $3z$. Тоді $6y = 3z$, звідси $z = 2y = 3x$.

Кожен маркіз бився з двома графами, тому дуелей між графами і маркізами було $2z = 6x$. Значить, кожен граф бився із шістьма маркізами [1].

Розв'язок, отриманий з допомогою графів. Будуємо граф поєдинків, в якому графам поставимо у відповідність вершини A_n ? Герцогам – B_n , маркізам –

C_n . Так як кожен граф бився з трьома герцогами, то проставимо вершини B_1, B_2, B_3 . А, оскільки кожен герцог зустрічався з двома графами, то маємо дві вершини A_1 і A_2 (рис. 21.а). Кожну із вершин B_1, B_2, B_3 з'єднуємо ребром, яке означає дуель, з вершинами A_1 і A_2 (рис. 21.б). Кожен герцог бився із шістьма маркізами, тому позначасмо вершини $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ (рис. 21.в). З'єднуємо ребром кожную із вказаних вершин з B_1, B_2, B_3 (рис. 21.г). Зараз кожна із вершин $C_1 - C_6$ має степінь три, тому що кожен маркіз бився з трьома герцогами. А ще кожен маркіз зустрічався із двома графами, тому з'єднуємо ребром відповідні вершини (рис. 21.д).

Оскільки кожна із вершин A_1 і A_2 , які позначають графів, з'єднані з шістьма вершинами $C_1 - C_6$, які відповідають маркізам, то кожен граф бився з шістьма маркізами.

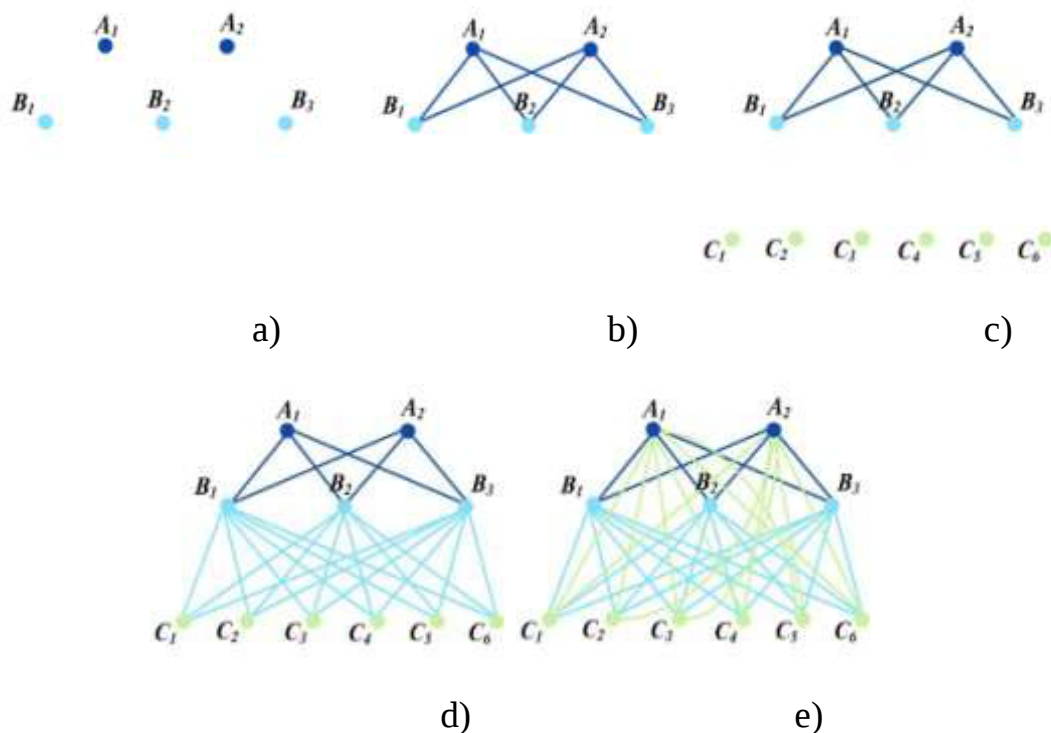


Рис. 21 – Графи зустрічей

Завдання 3. Архіпелаг складається з кількох маленьких островів і одного великого. Було вирішено побудувати мости між островами так, щоб великий острів з'єднувався з кожним маленьким островом двома мостами, а будь-які два маленьких острова з'єднувалися одним мостом. [3]

До 1 листопада були побудовані всі мости між маленькими островами і

кілька (хоча б одного) мостів, що ведуть на великий острів – всього 28 мостів. Скільки всього островів на архіпелазі?

Розв'язок. Занумеруємо малі острови архіпелагу. Якщо міст з'єднує острови з номерами a , b , напишемо на цьому мості менше із двох чисел. Припустимо, що число малих островів на архіпелазі не більше шести. Тоді мостів з номером 1 не більше 5, мостів з номером 2 не більше 4 і т.д. На великий острів веде не більше 12 мостів. Тоді вирішено побудувати не більше $5+4+3+2+1=27 < 28$ мостів, що суперечить умові. Припустимо, що число малих островів на архіпелазі не менше 8. Тоді мостів з номером 1 не менше 7, мостів з номером 2 не менше 6 і т.д. На великий острів побудовано не менше двох мостів, тому загальне число побудованих мостів не менше $7+6+5+4+3+2+1=30 > 28$, що також суперечить умові. Значить, малих островів на архіпелазі 7, а всього островів – 8 [3].

Розв'язок, виконаний за допомогою графів: скористаємося теоремою, яка стверджує, що сума степенів всіх вершин графа рівна подвоєній кількості всіх ребер. Так як мостів (ребер) 28, то подвоєна їх кількість рівна 56. Значить, сума степенів всіх вершин повного графа рівна добутку 8 і 7. Оскільки в повному графі кожна із 7 вершин не може мати степінь, яка рівна 8, то граф складається із восьми вершин. Перевіримо це, побудувавши повний граф (рис. 22).

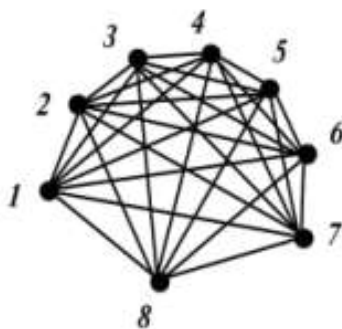


Рис. 22 – Граф із зображенням островів архіпелагу

Завдання 4. Дівчинка хоче розфарбувати вісім кругів на малюнку в три кольори так, щоб будь-які два круги, з'єднані відрізком, були пофарбовані в різні кольори. Які два круги на рис. 23 обов'язково будуть пофарбовані в один колір?

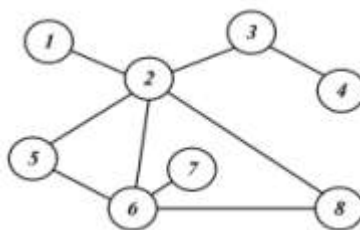


Рис. 23 – Схема до задачі

Розв'язок. На рисунку представлений зв'язний граф, тому почнемо з вершини 1 і 4. Так як вони є висячими, то можуть бути розфарбовані в будь-які із трьох кольорів. Оскільки вершини 1 і 2 є суміжними, то вершину 2 фарбуємо в колір, який не співпадає з вершиною 1. Степінь вершини 3 рівна 2, тому її колір не повинен співпадати із суміжними до неї вершин 2 і 4. Також вершина 2 з'єднана ребрами з вершинами 5, 6 і 8. Звичайно ж, їх кольори, за умовою, мають відрізнятися від вершини 2. При цьому вершина 6 є суміжною і відносно вершин 5 і 8, значить, вона повинна мати інший колір в порівнянні з ними. Степінь вершини 7 рівна 1, тобто відрізняється тільки від з'єднаною з нею вершиною 6. Таким чином, при будь-яких комбінаціях розфарбування, одночасно в один і той же колір будуть розфарбовані вершини 5 і 8.

Наведемо декілька прикладів розфарбування даного графа(рис. 24):

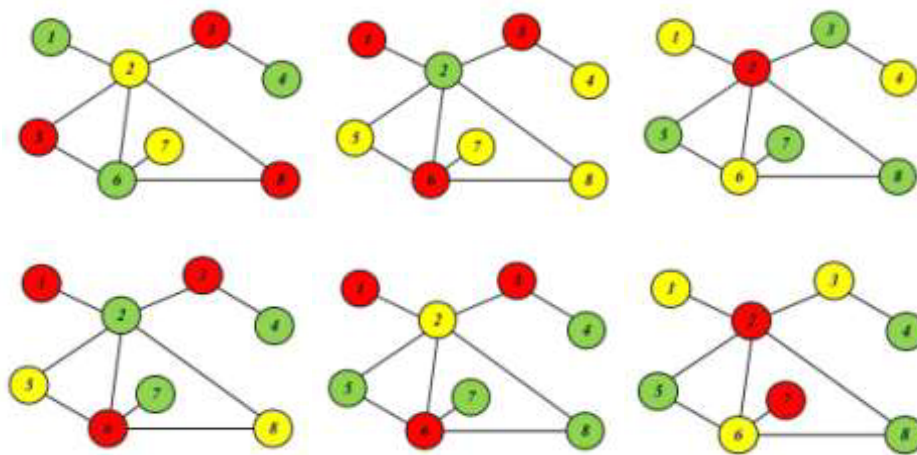


Рис. 24 – Варіанти розфарбовування графів

2.3. Розробка факультативного курсу "Вивчення основ теорії графів"

Головною особливістю факультативного курсу «Вивчення основ теорії графів» є побудова занять з використанням кейс-технології, яка являє собою

інтерактивну технологію короткострокового навчання, яка базується на розв'язанні фантазійних або реальних ситуацій. Кейс-технологія є досить новою і ще не так поширена в застосуванні. У цьому і полягає головна відмінність даного факультативу від будь-якого іншого.

Факультативний курс «Вивчення основ теорії графів» розрахований на 10 уроків для учнів 9 класу загальноосвітніх шкіл. При цьому кожне заняття обов'язково проводиться з використанням кейс-методу.

Мета курсу: ознайомити учнів з основними термінами та фактами з теорії графів, а також показати їх можливу практичну спрямованість та застосування у житті.

Завдання:

- навчання розв'язуванню задач з використанням теорії графів;
- розвиток абстрактного мислення, уяви;
- формування аналітичних здібностей.

Форми організації діяльності учнів: групові і індивідуальні.

У кейс-технологію успішно інтегровані такі методи: моделювання, системний аналіз, метод опису, дискусія, проблемний, ігрові методи, «мозковий штурм».

Серед переваг кейс-технології, яка застосовується для даних факультативних занять, можна виділити: колективний характер пізнавальної діяльності, творчий підхід до пізнання, поєднання теоретичних знань і практичних навиків. Робота учня з кейсом передбачає опрацювання кожного етапу розв'язування задач: ознайомлення з ситуацією, описаною в задачі; висвітлення проблеми; пропозиція концепцій (теми для «мозкового штурму»; розв'язання; аналіз).

Факультативний курс «Вивчення основ теорії графів», розрахований на проведення в 9 класах загальноосвітніх шкіл, по 2 години кожен.

По своєму вмісту розроблений факультатив охоплює такі теми:

1. Графи. Базові визначення. Лема про рукопотискання.

Поняття графа. Вершини і ребра графа. Суміжні вершини. Степінь вершини. Порожній граф. Зв'язний граф. Повний граф. Підрахунок кількості ребер. Лема про

рукопотискання. Дводольний граф.

2. Орієнтовні графи. Поняття про дерево.

Орієнтовні графи. Визначення дерева. Кількість ребер в дереві. Висяча верхівка дерева. Остовне дерево. Алгоритм Краскала.

3.. Обхід графів.

Означення графа Ейлера. Цикл Ейлера. Обмальовка фігури без відриву олівця від паперу. Задачі про мости. Задачі про лабіринти.

4. Розташування графів.

Плоскі графи. Планарні графи. Теорема Понтрягіна-Куратовського. Теорема Ейлера. Метод пошуку в ширину.

5. Фарби. Графи з кольоровими ребрами. Правильне розфарбування. Задача розфарбовування карт і плоского графа. Складання розкладу.

Теми, що розглядаються в рамках факультативного курсу, самі по собі не передбачені шкільною програмою. Однак, теорія графів має виключно прикладну спрямованість.

Тематичне планування запропонованого курсу наведено в таблиці 1.

**Таблиця 1 – Тематичне планування навчального плану
факультативного курсу**

№ п/п	Тема заняття	Кількість годин
1.	Граф та його елементи. Деякі властивості і теореми.	2
2.	Обхід графа. Ейлеровий і гамільтоновий цикли. Задачі про мости. Малювання фігур без відривання олівця від паперу.	2
3.	Історія лабіринтів. Геометрична постановка задачі про лабіринт. Способи проходження лабіринту. Лабіринти і графи.	2
4.	Графи та правильне розфарбування карти. Завдання про чотири фарби. Графи з кольоровими ребрами.	2
6.	Дерево і ліс. Використання дерев при розв'язуванні різних завдань.	2
7.	Графи ілогічні задачі.	2
9.	Застосування теорії графів у різних галузях науки і техніки.	2
10.	Квест.	4

2.4. Розробка кейсів для проведення занять факультативу

Заняття 1. *Граф та його елементи. Деякі властивості і теореми. Орієнтовані графи.*

Спочатку ми виконуємо з учнями завдання, розв'язання яких ґрунтується на графічному поданні даних у вигляді графа. Звертаємо увагу школярів на те, що при використанні графічного представлення розв'язок задачі дуже легкий.

Далі даємо визначення графа, пояснюємо учням, що таке вершини і ребра графа. Закріплюємо інформацію реальними прикладами використання графів (транспортні мережі, соціальні відносини тощо).

Після цього можна дати стислу історичну довідку про графи.

Далі вводимо визначення порожнього графа. Деякі вершини порожнього графів з'єднуємо ребрами і додаємо поняття суміжних вершин. З'єднуємо вершини, що залишилися, і отримуємо повноцінний граф. Розглядаємо визначення степеня вершини на прикладах повних графів.

Розв'язуємо кейс-задачу про шаховий турнір, представлену на слайді, зображеному на рис. 25.

У школі проводиться шаховий турнір між учнями 9-го класу за круговою системою. Кожна пара гравців зустрічається один з одним рівно один раз. У турнірі беруть участь семеро школярів. Відомо, що Іван провів шість партій, Арсен – п'ять, Олексій і Дмитро – по три, Семен та Ілля – по дві, Женья – одну.

Завдання.

Необхідно визначити, з ким грав кожен учасник.



Рис. 25 – Кейс-задача про шаховий турнір

Очікуваний розв'язок.

У процесі розв'язування учні складають граф зустрічей, в яких 1 відповідає Івану, 2 – Арсену, 3 і 4 – Олексію і Дмитру, 5 і 6 – Семену та Іллі, 7 – Євгену. З графа школярів видно, що Іван грав з кожним із дітей. Арсен грав з усіма, крім Жені. Олексій і Дмитро грали один з одним, а також з Іваном і Арсеном. Семен і Ілля грали один з одним, а також з Іваном і Арсеном. Євген грав тільки з Іваном. Отримуємо граф, показаний на рис. 26.

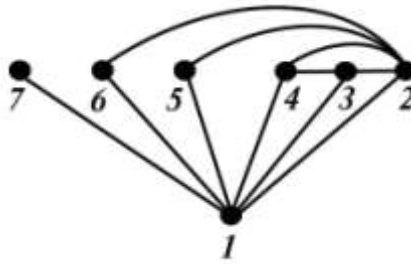


Рис. 26 – Зв'язний граф

Додаємо поняття про зв'язний граф до вивчених понять.

Потім знайомимо учнів з лемою про рукостискання.

На цьому ж занятті можна розглянути і поняття дводольного графа.

Потім учні, поділившись на групи, виконують наступне кейс-завдання:

У змаганнях за круговою системою з дванадцятьма учасниками провели всі зустрічі. Скільки зустрічей було зіграно? [10]

Очікуваний розв'язок.

Учні знаходять кількість ребер у графі з 12 вершинами. Далі обчислюють $\frac{12 \times 11}{2} = 66$ ребер, що відповідає 66 зустрічам.

Після цього в групі виконується наступна кейс-задача:

У тенісному турнірі кожен гравець команди "синіх" тисне руку перед початком зустрічі кожному гравцю команди "червоних". Кількість гравців у командах однакова і не більше восьми. «Сині» виграли в чотири рази більше ігор, ніж «червоні»[10]. Необхідно знайти, із скількох гравців складається кожна команда і графічно зобразити рукостискання всіх членів команди із суперниками.

Очікуваний розв'язок.

Спочатку знаходимо кількість ребер в графі n^2 . Отже, $4x + x = n^2$. Звідси

отримуємо, що $n = 5$. Учні складають дводольний граф, що представляє дружнє рукостискання обох команд (рис. 27), і повторюють його так, як зазначено в графі.

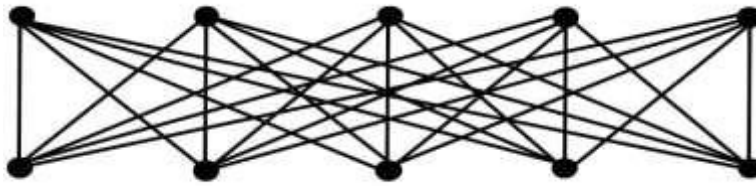


Рис. 27 – Граф $K_{5,5}$, який зображає склад команд

На цьому занятті вчитель може запропонувати учням розв'язати самостійно наступний практичний кейс – виклад методу інциденту. Він пропонує школярам, щоб вони допомогли вирішити проблему, пов'язану з розсаджуванням гостей. Учитель надає учням інформацію по цьому кейсу у вигляді наступного слайду (рис. 28)

Тернопіль. Кафе «Смачна кава». 18.00

Керуючий: Пане директоре, я підготував звіт за минулий місяць.

Директор: Глянемо, що у вас там. Так, кафе переживає не кращі часи.

Керуючий: Не дивлячись на постійні акції, людей зовсім мало. Але сьогодні приходив один чоловік, який готовий замовити столик при одній умові.

Директор: Цікаво, яка ця умова.

Керуючий: Він сказав, що в їхній компанії буде 12 людей. І серед будь-яких трьох людей цієї компанії двоє будуть знайомі один з одним і двоє побачаться вперше. Кожен з них хоче сидіти за столом поряд зі своїм знайомим. Якщо ми зуміємо їх так розсадити, то можемо розраховувати на замовлення. Ми повинні запропонувати їм план.

Директор: Ми повинні постаратися отримати це замовлення.

Завдання: Чи існує варіант такого розсаджування компанії за круглим столом?



Рис. 28 – Граф плану розсаджування гостей

Очікуваний розв'язок.

Щоб знайти необхідне замовнику розташування місць, ми побудуємо граф, де люди позначені вершинами, а ребра з'єднують вершини – знайомства

відповідних гостей. Згідно з умовою задачі, підграф (з трьох вершин) не може бути ні повним, ні порожнім. Так як серед будь-яких трьох гостей двоє знайомі (з'єднуємо дві відповідні вершини графа), а двоє – ні (переходимо до двох інших вершин), тоді ми отримуємо граф розсаджування гостей по колу. Тому гостей можна розсадити, як просить замовник.

Вводити поняття орієнтованого графа можна з розв'язування наступного кейсу. Після розв'язування цього кейсу учні самі побачать головну відмінність неорієнтованого графа від орієнтованого.

Кейс-задача на введення поняття орієнтованого графа представлена на слайді, показаному на рис. 29.

За вікном сильна гроза. Ви – коментатор. Триває хокейний матч. На льоду перебувають п'ятеро гравців. Хокеїст №1 виконав пас, потім гру перехопили інші хокеїсти команди (кожен з них зробив по одному удару по шайбі), так, що в підсумку гол був забитий хокеїстом №5. Але через погодні умови трансляція була перервана, і глядачі не знають, як проходить розіграш.

Завдання.

Запропонуйте вболівальникам варіант передачі шайби, зобразивши схему розіграшу



Рис. 29 – Орієнтований граф

При розв'язуванні передачу від одного хокеїста до іншого в даній задачі вже необхідно зображати за допомогою ребра, вказуючи напрямок. В результаті учні отримують зображення орієнтованого графа.

Заняття 2. Поняття про дерево і ліс.

Далі введемо визначення дерева (наведемо приклади використання такого графа: генеалогічне дерево, опис алгоритмів тощо). Вчимо визначати кількість ребер в дереві. Даємо визначення висячої верхівки дерева.

Для цього можна запропонувати задачу про стежки в парку, схема цього

парку додається. І задати питання: чи можна обійти всі стежки тільки по одному разу і повернутися назад до входу в парк?

Вводимо поняття дерева. Знайомимо учнів з алгоритмом Краскала (кейс-задача, розв'язок якої пов'язаний з побудовою остовного дерева та використанням алгоритму Краскала).

Це практичний кейс-ілюстрація, метод ситуаційного аналізу. Опис кейсу є на слайді, зображеному на рис. 30.

Будівельна компанія будує житловий комплекс, який буде складатися із 14 будинків. Сім із них вже побудовані, а інші сім знаходяться на етапі будівництва. В побудованих будинках завершилася прокладка основних комунікацій і тепер компанії залишилося прокласти інтернет-кабель, який буде з'єднувати всі вже побудовані будинки. Щоб кабель випадково не пошкодили під час будівельних робіт, зробити це потрібно вздовж дороги. Також компанія зацікавлена в тому, щоб прокласти інтернет-кабель з найменшими затратами.

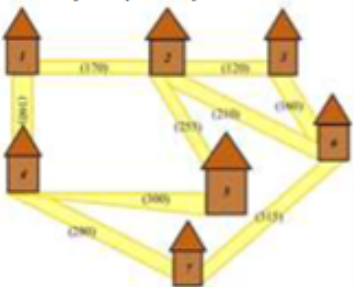


Схема участку представлена на рисунку (числа, які стоять в дужках, показують віддаль між будинками).

Завдання. Запропонуйте компанії схему проведення інтернет-кабеля, щоб його довжина при цьому була мінімальною.

Рисунок 30 – Схема ділянки

Очікуваний розв'язок.

Для розв'язування цієї задачі нам спочатку потрібно побудувати граф, який відображає схему даної ділянки. Вершинами цього графа є будинки, побудовані на ділянці, а ребрами – наявні там дороги. Отримаємо граф, зображений на рис. 31.а.

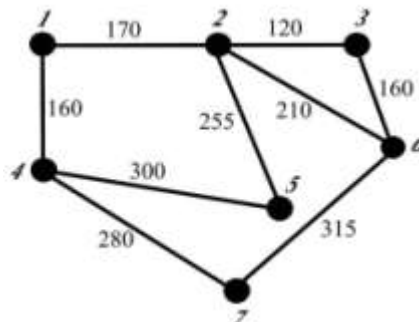


Рис. 31.а – Граф, що відображає схему доріг

Після цього потрібно побудувати мінімальне остовне дерево,

використовуючи алгоритм Краскала.

Для цього беремо ребро з мінімальною довжиною, в нашій задачі це (2, 3).

Другим і третім ребрами, відповідно, беруть (3, 6) і (1, 4), в будь-якому порядку, так як їх довжини рівні. Четвертим вибираємо ребро (1, 2), п'ятим – ребро (2, 5), шостим – ребро (4, 7). На рис. 30.6 показаний граф, на якому виділені ребра отриманого мінімального остовного дерева. Отже, отримуємо схему мінімального інтернет-кабелю.

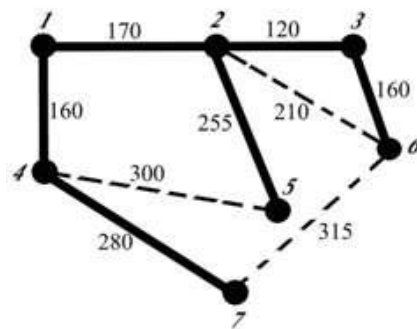


Рис. 30.6 – Граф, що відображає схему мінімального остовного дерева

Заняття 3. Обхід графів

Даємо визначення ейлерового графа. Вводимо поняття ейлерового циклу. Тоді аналізуємо основні шляхи розв'язування завдань про лабіринти і задач про мости.

Надалі вчитель пропонує розв'язати практичний кейс-ілюстрацію методу ситуаційного аналізу. Умова даного кейсу і завдання до нього представлені на слайдах, зображених на рис. 31 і рис. 32.

В місті є парк, що розташований на шести островах, що з'єднані мостами. У вихідні в парку відбуваються різні міроприємства, де на кожному острові представлений свій вид діяльності (танці, спектакль, кіноперегляд, аква-грим, спортивні змагання, кулінарні шоу).

Для того, щоб потрапити на міроприємство, потрібно придбати спеціальний пропуск, який дає право один раз пройти по кожному із мостів.

Для власників парку виникло питання, чи зможуть відвідувачі побувати на всіх міроприємствах?

Схема парку представлена на рисунку.

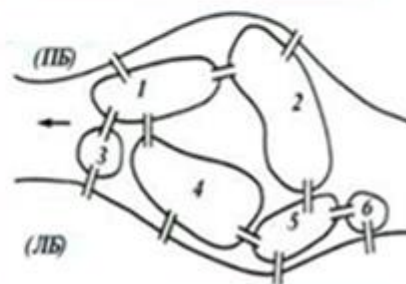


Рис. 31 – Умова до кейсу про парк

Завдання.

1. Визначити, чи зможуть відвідувачі, почавши із одного із островів парку, побувати на всіх міроприємствах, представлених в парку, і повернутися на вихідний острів.
2. У випадку негативної відповіді визначити, яку кількість мостів потрібно побудувати власникам парку, щоб у відвідувачів з'явилася така можливість.
3. Намалюйте маршрут відвідувачів парку в цьому випадку.



Рис. 32 – Завдання для кейсу про парк

Очікуваний розв'язок.

1) Спочатку учні будують граф, який відповідає умові (рис. 33), де вершинами позначені острови, а мости – ребрами.

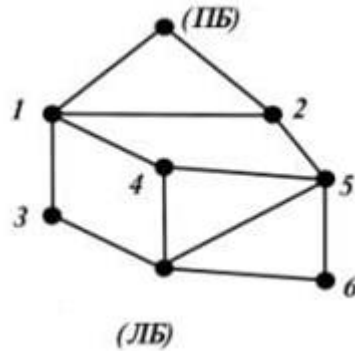


Рис. 33 – Граф, що відповідає схемі доріг парку

Питання задачі перефразовуються так: «Чи є цей граф ейлеровим чи ні?» Для цього на основі теореми потрібно просто з'ясувати: чи кожна вершина має парну степінь? З'ясовують, чи граф не ейлеровий. Роблять висновок, що відвідувачі не зможуть побувати на всіх міроприємствах.

2) Для того, щоб у відвідувачів була така можливість, потрібно, щоб всі вершини були парними. Для цього потрібно з'єднати друга і четверту вершини ребром. Отриманий граф показаний на рис. 34.

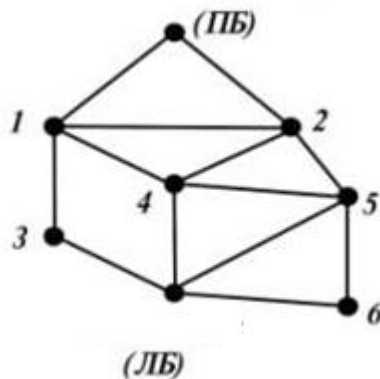


Рисунок 34 – Кількість мостів

Відповідь: потрібно побудувати один міст.

3) Учні намічають новий маршрут (рис. 35)

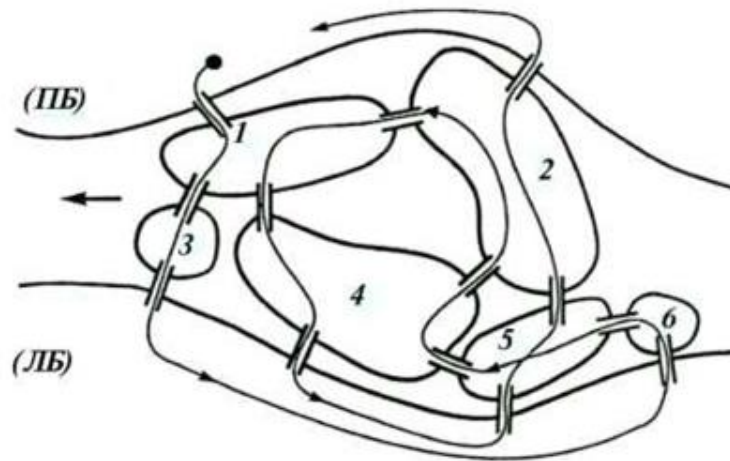


Рисунок 35 – Маршрут відвідувача парку

На цьому ж занятті можна розглянути практичні завдання малювання фігур без відриву олівця від паперу. Запропонувати намалювати фігури, показані на рис. 36 (унікурсальні графи).

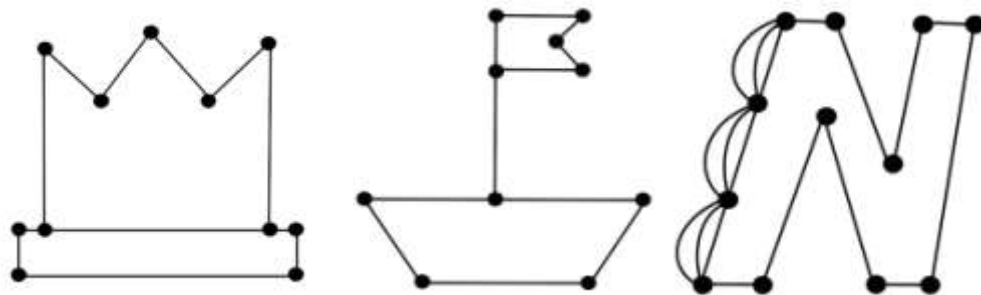


Рис.36 – Завдання малювання фігур без відриву олівця від паперу

Заняття 4. Розташування графів.

На цьому занятті інтуїтивно вводимо поняття гомеоморфних графів, обов'язково розглянути це поняття на прикладах. Далі ми введемо поняття плоского або планарного графа. Обов'язково супроводжуємо все прикладами.

Тоді пропонується кейс №1: «Є три будинки і три криниці. Кожен власник користується будь-якою з трьох криниць. В якийсь день мешканці будинків посварилися і вирішили прокласти свої стежки до криниць так, щоб вони не перетиналися» [11].

Завдання до кейсу №1: з'ясувати, чи можливо власникам знайти шляхи від свого будинку до криниць, не перетинаючись із сусідами.

Розв'язок ґрунтується на доведенні того, що граф не є планарним, тому це неможливо.

Далі можна розглянути із школярами теорему Понтрягіна-Куратовського.

Кейс №2: Винахідник створив плату, що містить 9 приладів і 17 провідників. Схема винаходу наведена на рис. 37.

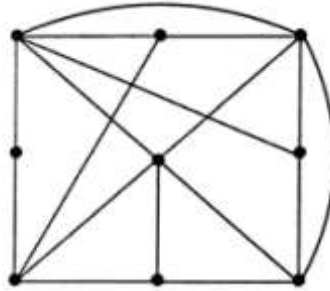


Рис. 37 – Схема винаходу

Винахідник планує модернізувати свій винахід так, щоб всі його провідники були на одній стороні.

Завдання для кейсу №2: з'ясувати, чи можливо це зробити.

Для того, щоб розв'язати цей кейс, необхідно довести, що граф не є планарним. Тому поява такого виробу неможлива.

Для закріплення теореми Ейлера можна запропонувати такий кейс.

Кейс №3: «Місто має 155 перехресть і 260 ділянок вулиць між перехрестями. Мерія прийняла рішення будувати в кожному кварталі міста супермаркети.» [11].

Завдання до кейсу №3: знайти кількість побудованих супермаркетів.

Коментар до розв'язку. Якщо припустити, що ми побудували граф, що відповідає карті міста, то цей граф буде плоским. Це означає, що до нього можна застосувати теорему Ейлера: $f = m - n + 2 = 260 - 155 + 2 = 106$. *Відповідь:* 106.

Також на цьому занятті зі школярами можна розглянути метод «пошуку в ширину».

Для закріплення використання даного методу пропонується наступний практичний кейс-задача, метод ділового листування. Умова і завдання представлені на слайдах (рис. 38, 39).

Шановний, Михайленко А.В.

Поспішаємо повідомити, що ви успішно пройшли всі етапи співбесіди і прийняті на посаду Дистриб'ютора Space Group. Приступати до виконання своїх посадових обов'язків можна прямо зараз.

Повідомляємо, що 10 космонавтів нашої компанії матимуть дві експедиції на Міжнародну космічну станцію.

У зв'язку з тим, що членам екіпажу доведеться провести на МКС 6 місяців, причому в невеликому і обмеженому просторі, необхідно враховувати психологічну сумісність членів команди при формуванні групи.

З цієї причини співробітники психологів компанії провели ряд психологічних тестів для кандидатів.

Надсилаємо Вам висновок наших психологів у вигляді таблиці.



Рис. 38 – Умова до кейсу-задачі про ділове листування

Знак «-», розташований на перетині і рядка і j стовпця, означає, що космонавти під номерами i і j психологічно несумісні і їх об'єднання в одну групу небажано.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Ваше посадове завдання.

Сформувані дві групи космонавтів для участі в експедиції з урахуванням результатів їх психологічного тестування.



Рис. 39 – Завдання до кейсу про об'єднання космонавтів в одну групу

Очікуваний розв'язок.

Складається граф, де кожному космонавту ставиться у відповідність вершина графа, і якщо обидва вони несумісні, то вершини з'єднуються ребром. Вийде граф, представлений на рис. 40.

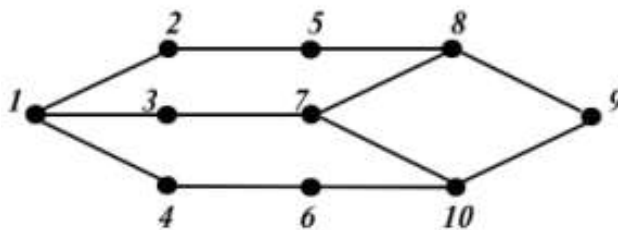


Рис. 40 – Дводольний граф

Після цього школярі ділять космонавтів на дві групи, причому так, щоб граф вийшов дводольним, для цього необхідно, щоб кожне ребро з'єднувало вершини з різних груп.

Для побудованого графа застосований метод "пошук в ширину". Вершина №1 відноситься до групи I, а сусідні вершини (тобто №2, №3 та №4) відносяться до II групи. Вершини №5, №6 та №7 (зверніть увагу, що вони є сусідами з вершинами №2, №3 або №4) додаються до II групи. Алгоритм повторюється до тих, поки всі вершини графа не будуть розподілені по групах. В результаті отримуємо в групі I вершини 1, 5, 7, 6 і 9, а в II групі – 2, 3, 4, 8 і 10. Пропонований граф зображено на рис. 41. Використання графа робить наочним і зручним розв'язання цього кейсу.

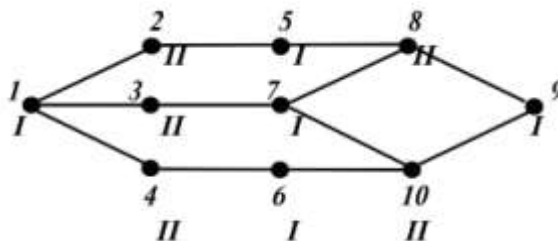


Рис. 41 – Граф, що показує поділ вершин на групи.

Заняття 5. Фарби. Графи з кольоровими ребрами.

На даному занятті вводиться поняття мінімального розфарбовування, а також розглядаються основні принципи розв'язування задач на розфарбовування карт і плоского графа.

Цікавим для школярів може стати завдання зі складання розкладу занять.

Для цього даємо їм кейс-практична задача, метод: ситуативного аналізу, представлений на слайді (рис. 42).

Школа іноземних мов Skyeng в Тернополі орендує приміщення в бізнес-центрі для своїх занять. У понеділок відбувається сім занять, кожне з яких триває одну годину. Список мов, що вивчаються: грецька, англійська, французька, німецька, китайська, італійська та польська. Деякі з них проводить один і той же викладач, є також слухачі, які відвідують кілька різних лекцій і т.д. Як наслідок, з'являються заняття, які не можна читати одночасно.



Рис. 42 – Задача для розфарбовування карт і плоского графа

Завдання і таблиця сумісності проведення занять представлені на наступному слайді (рис. 43):

Школа іноземних мов Skyeng в Тернополі

Заняття, які не можуть проводитися одночасно, в таблиці сумісності позначені знаком «-».

	Греч.	Англ.	Франц.	Німец.	Китай.	Італ.	Польськ.
Греч.		-		-			
Англ.	-		-		-	-	
Франц.		-			-	-	-
Німец.	-				-	-	
Китай.		-	-	-		-	
Італ.		-	-	-	-		
Польськ.	-		-				

Завдання. Визначити мінімальну кількість часу, протягом якого пройдуть всі заняття в понеділок.

Рис. 43 – Задача і таблиця сумісності проведення занять

Очікуваний розв'язок.

Використовуючи таблицю, побудуємо граф G , що показує заняття, які не можна проводити одночасно, де вершини представляють собою заняття, а ребра – несумісні заняття. Можливий результуючий граф представлений на рис. 44.

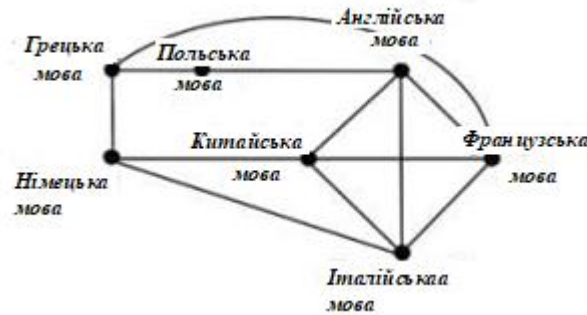


Рис. 44 – Графік несумісних занять

У цій задачі будь-яке правильне розфарбування визначає якийсь розклад занять: якщо вершини одного кольору, то відповідні до них лекції – сумісні. Вірне і обернене твердження: будь-який розклад визначає правильне розфарбування вершин графа. Мінімальна кількість годин, яка необхідна для проведення занять, становить $X(G)$. Оскільки граф G містить повний підграф K_4 , то його вершини неможливо правильно розфарбувати менше, ніж в чотири кольори. На рис. 45 показаний один з можливих варіантів розфарбування.

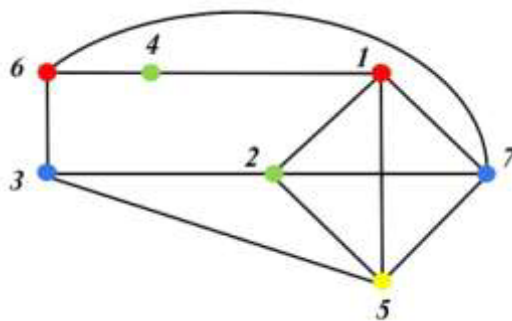


Рис. 45 – Варіант розфарбування

Як наслідок, всі заплановані заняття на понеділок можна провести мінімум за чотири години.

2.5 Приклади використання кейсів

Заняття 1. Графи. Базові визначення. Лема про рукопотискання.

Кейс-виклад

Вид кейсу: практичний

Метод: інцидента

Одного разу, в місті H . кафе «Веселка». 17:00.

Менеджер: Маріє Олексіївно, я підготувала звіт за попередній місяць.

Директор: Ну, що у нас тут? Так, кафе переживає не найкращі часи.

Менеджер: Незважаючи на постійні акції, клієнтів дуже мало. Криза. Замовлення на проведення заходу також було скасовано. Правда, сьогодні прийшла одна людина, але він готовий забронювати столик тільки за однієї умови.

Директор: Цікаво, що це таке?

Менеджер: Він сказав, що в їхній компанії буде дванадцять людей. Але серед будь-яких трьох людей з цієї компанії двоє будуть знати один одного і двоє побачать один одного вперше. І кожен з них хоче сісти за стіл поруч зі своїм знайомим. Якщо ми зможемо їх так посадити за наші круглі столи, ми можемо розраховувати на замовлення. Щоб підтвердити це, ми повинні надати план, як ми посадимо гостей.

Директор: З огляду на ситуацію, що склалася, треба дуже постаратися, але не пропустити це замовлення.

Завдання: Покажіть, чи є варіант розсадити компанію за круглим столом, щоб по обидва боки від кожної людини сиділи його знайомі.

Очікуване рішення. Щоб знайти правильну комбінацію того, як посадити гостей, ми побудуємо граф, вершини якого символізують людей, а ребра з'єднують вершини тільки в тому випадку, якщо відповідні гості знайомі один з одним. Згідно з умовою задачі, підграф (з трьох вершин) не може бути ні повним, ні порожнім. Так як серед будь-яких трьох гостей два знайомі (з'єднали дві відповідні вершини графа), а двоє – ні (переходимо до двох інших вершин), то отримуємо граф, показаний на рисунку 46. Цей граф є планом розсаджування гостей за круглим столом.

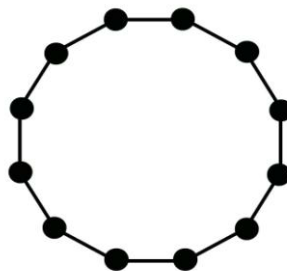


Рис. 46. Граф знайомств

Заняття 2. Поняття про дерево. Орієнтовні графи

Кейс-ілюстрація

Вид кейсу: практичний

Метод: ситуаційний аналіз

Будівельна компанія буде житловий комплекс, що складається з 14 будинків. Сім з них вже побудовані, а решта сім знаходяться на стадії будівництва. У побудованих будинках завершено прокладання основних комунікацій, і тепер компанія має прокласти інтернет-кабель, що з'єднає всі вже побудовані будинки. Щоб запобігти випадковому пошкодженню кабелю під час будівельних робіт, це необхідно робити уздовж доріг. Також компанія зацікавлена в тому, щоб прокласти інтернет-кабель з мінімальними затратами.

Схема ділянки представлена на рис. 47 (цифри в дужках показують відстань між будинками).

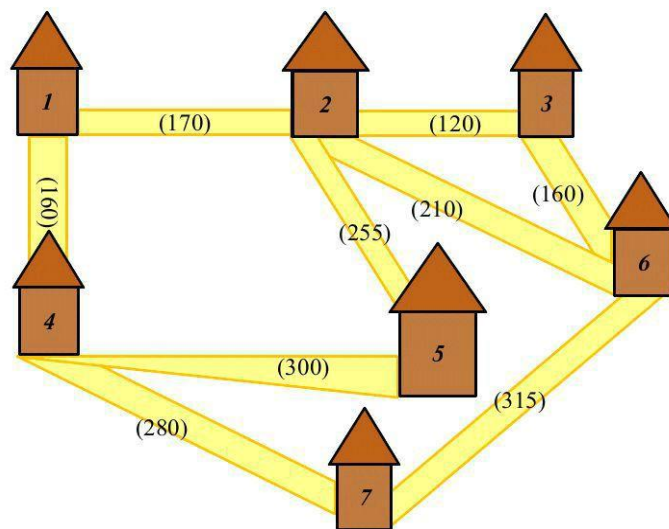


Рис 47. Схема будівельного майданчика

Завдання. Запропонуйте компанії схему прокладки інтернет-кабелю, щоб його довжина була при цьому мінімальною.

Розв'язування. Перш за все учням потрібно побудувати граф, який відображає схему будівельного майданчика. Вершинами цього графа будуть будинки, побудовані на ділянці, а ребра – це розташовані там дороги. Наприклад,

учні побудують граф, наведений на рис 48.

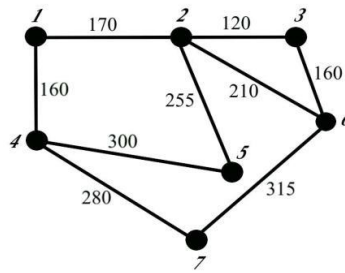


Рис. 48. Граф, що відображає схему будівельного майданчика

Подальший розв'язок передбачає побудову мінімального остовного дерева за допомогою алгоритму Краскала. Для цього беремо ребро з мінімальною довжиною, тобто (2, 3). Другим і третім беремо ребра (3, 6) і (1, 4) в будь-якому порядку, так як їх довжини рівні. Четверте – ребро (1, 2), а п'яте – (2, 5). З решти ребер мінімальну довжину має (4, 7), тому беремо саме його. На рис. 49 показано граф, на якому виділені ребра отриманого мінімального остовного дерева. Таким чином отримали схему мінімального інтернет-кабелю.

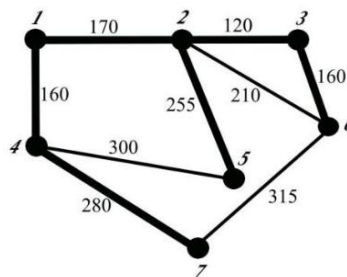


Рис. 49 Граф з виділеними ребрами мінімального остовного дерева

Заняття 3. Обходи графів

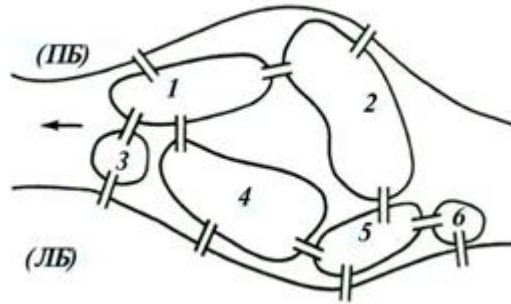
Кейс-ілюстрація

Тип кейсу: практичний

Метод: ситуаційний аналіз

У місті N знаходиться парк культури і відпочинку, розташований на шести островах, з'єднаних між собою мостами. У святкові дні в парку проводяться розважальні заходи, де кожен острів представляє свій вид активності (танці, спектакль, кінопоказ, аква-грим, спортивні змагання, кулінарне шоу). Для того, щоб потрапити на захід, потрібно придбати спеціальну перепустку, яка дає право пройти один раз по кожному з мостів. Власники парку задумалися, чи зможуть

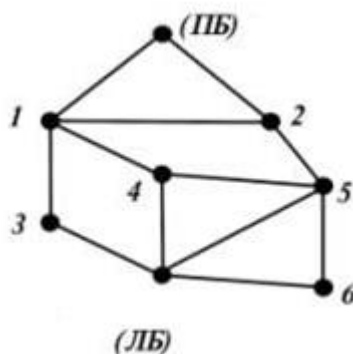
Схема парку показана на малюнку 50.



Завдання.

- 1) Визначити, чи зможуть відвідувачі, почавши з одного із островів парку, відвідати всі розваги, представлені на святі, і повернутися на вихідний острів.
- 2) Якщо відповідь негативна, визначити, скільки мостів потрібно побудувати власникам парку, щоб відвідувачі мали таку можливість.
- 3) Намалювати маршрут відвідувачів парку в даному випадку.

1) Перше, що потрібно зробити учням – побудувати граф, представлений на рис. 51.



Тут вершини позначають острови, а ребра – мости. Треба зрозуміти, чи є цей граф ейлеровим, тобто, чи має кожна з його вершин парну степінь. Розглянемо граф, де вершини 2 і 4 мають степінь три, що означає, що цей граф не є ейлеровим. Отже, відвідувачі парку не зможуть по одному разу перетнути кожен міст,

побувавши на всіх островах парку і повернутися назад.

2) Якщо з'єднати вершини 2 і 4 ребром, то отриманий граф буде ейлеровим, так як всі його вершини парні. Учні отримують такий граф (рис. 52).

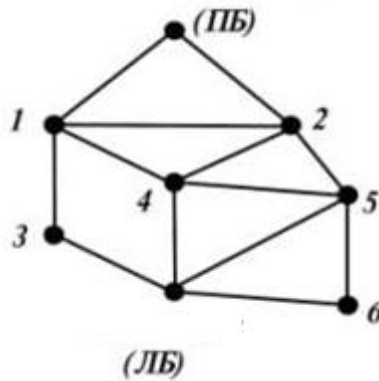


Рис. 52. Граф, отриманий після з'єднання вершин 2 і 4

Таким чином, щоб відвідувачі парку могли пройтися по кожному мосту один раз, відвідавши всі острови парку і повернувшись на початок шляху, власникам парку необхідно побудувати міст з острова 2 на острів 4.

3) Щоб знайти маршрут відвідувача парку, потрібно визначити цикл Ейлера в графі на малюнку 27. Почнемо з верхньої частини ПБ, виходячи з якої кожен раз вибираємо ще не задіяне ребро. Припустимо, ми отримуємо цикл $C1 = (ПБ, 1, 4, ЛБ, 5, 2, ПБ)$. Прибравши ребра заданого циклу, побудуємо ще один цикл в графі. З решти отримаємо $C2 = (1, 3, ЛБ, 6, 5, 4, 1)$. З циклів $C1$ і $C2$ складемо сумарний цикл $C = (ПБ, 1, 3, ЛБ, 6, 5, 4, 2, 1, 2, ЛБ, 5, 2, ПБ)$. Відповідно до побудованого циклу учні малюють маршрут, представлений на рис. 53.

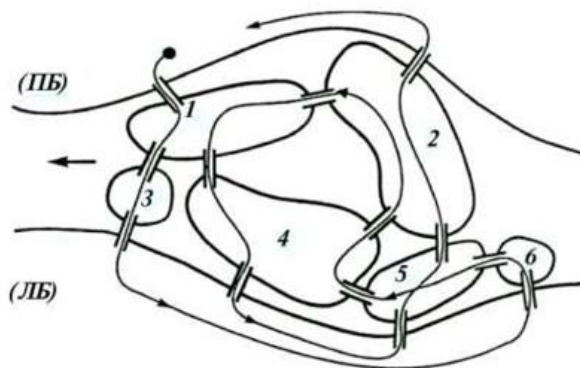


Рис. 53. Маршрут відвідувача парку

Заняття 4. Розміщення графів

Кейс – практична задача

Вид кейсу: практичний

Метод: ділове листування

Шановний, (прізвище, ім'я, по батькові учня)!

Поспішаємо повідомити, що ви успішно пройшли всі етапи співбесіди і були прийняті в компанію на посаду розпорядника формування груп. Приступати до виконання своїх посадових обов'язків можна прямо зараз.

Повідомляємо, що десять осіб нашої компанії матимуть дві експедиції. У зв'язку з тим, що членам екіпажу доведеться провести в експедиції 6 місяців, причому в невеликому і обмеженому колі, необхідно враховувати психологічну сумісність членів команди при формуванні групи. З цієї причини штатом психологів компанії було проведено ряд психологічних тестів для кандидатів. Надсилаємо Вам висновок наших психологів у вигляді Таблиці 2.

Таблиця 2. Висновок психологів компанії

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		—	—	—						
2	—				—					
3	—						—			
4	—					—				
5		—						—		
6				—						—
7			—					—		—
8					—		—		—	
9								—		
10						—	—		—	

Розшифровка даних таблиці: знак «—», розташований на перетині і-рядка і j-стовпця, означає, що кандидати психологічно несумісні і їх об'єднання в одну групу небажане.

Ваше посадове завдання. Сформувати дві групи кандидатів для участі в експедиції з урахуванням результатів їх психологічної перевірки.

Передбачуване розв'язання учнями. Для того щоб вирішити це завдання, учням необхідно скласти граф кандидатів. Кожному кандидату присвоюється вершина цього графа. У тому випадку, якщо обидва можливі учасники психологічно несумісні, вершини, що визначають їх, з'єднуються ребром. Таким чином, учні приходять до графу, представлений на малюнку 54.

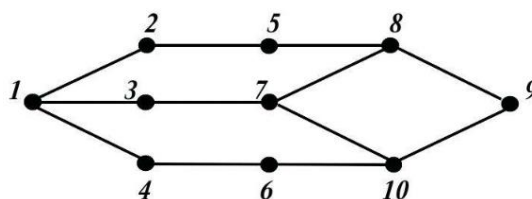


Рис.54. Граф, що дає наочне уявлення про учасників експедиції

Потім учні повинні розділити кандидатів (тобто вершини графа) на дві множини таким чином, що кожне ребро з'єднує вершини з різних груп. Таким чином, учні повинні продемонструвати, що цей граф є дводольним.

Далі учасники факультативу використовують метод пошуку в ширину. Вершину 1 поміщають в першу групу, а сусідні вершини (тобто 2, 3 і 4) – в другу. Вершини 5, 6 і 7, які є суміжними з вершинами 2, 3 або 4, додаються до другої групи. Алгоритм повторюється до тих пір, поки всі вершини графа не будуть розподілені між своїми групами. В результаті отримуємо вершини першої групи – 5, 7, 6 і 9, і вершини другої групи – 2, 3, 4, 8 і 10. Граф, який можна редагувати в процесі розв'язання, показаний на рис. 55, є надзвичайно зручним, ілюстративним розв'язком.

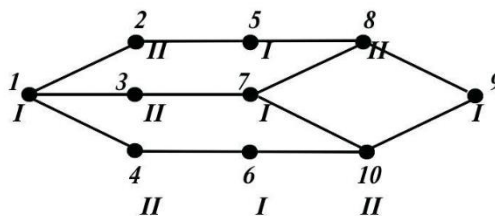


Рис. 55. Граф, що показує поділ вершин на групи (метод пошуку в ширину)

Заняття 5. Фарби. Графіки з кольоровими ребрами

Кейс – практична задача

Вид кейсу: практичний

Метод: ситуативний аналіз

Компанія «N» орендує приміщення в бізнес-центрі для проведення семінарів з вивчення іноземних мов. У понеділок вони читали сім лекцій, кожна тривалістю одна година (грецька, англійська, французька, німецька, китайська, італійська та польська). Деякі з них проводить один і той же викладач, є також слухачі, які відвідують кілька різних лекцій тощо. Таблиця 3 показує сумісність лекцій (тут знак «—» означає, що ці лекції не можуть проходити одночасно).

Таблиця 3. Сумісність лекцій

	Грецька	Англійська	Французька	Німецька	Китайська	Італійська	Польська
Грецька		—		—			—
Англійська	—		—		—	—	
Французька		—			—	—	—
Німецька	—				—	—	
Китайська		—	—	—		—	
Італійська		—	—	—	—		
Польська	—		—				

Завдання. Визначте мінімальну кількість часу, за який будуть прочитані всі лекції в понеділок.

Розв'язання. Спершу учням необхідно побудувати граф G несумісності лекцій за даними таблиці. Вершини цього графа представляють собою лекції. Суміжні вершини вказують на те, що ці лекції не можуть бути проведені одночасно. Граф, отриманий учнями, наведено на малюнку 56.

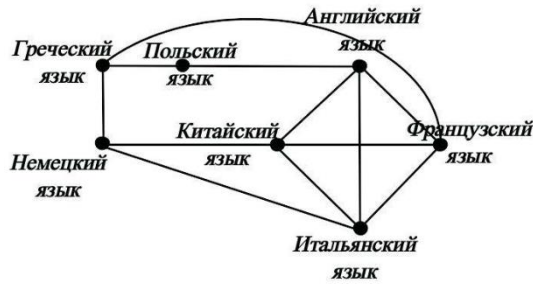


Рис. 56. Граф несумісності лекцій

У цій задачі будь-яке правильне забарвлення визначає деякі розклади занять: якщо вершини пофарбовані в один колір, то відповідні лекції сумісні. Вірно і обернене твердження: будь-який розклад задає правильне розфарбовування вершин графа G . Мінімальна кількість годин, необхідна для занять, становить $X(G)$.

Оскільки граф G містить повний підграф K_4 , то його вершини не можуть бути правильно розфарбовані менш, ніж чотирма кольорами. На рис. 57 показаний один із можливих варіантів розмальовки, з якого випливає, що всі лекції в понеділок можна прочитати мінімум за чотири години.

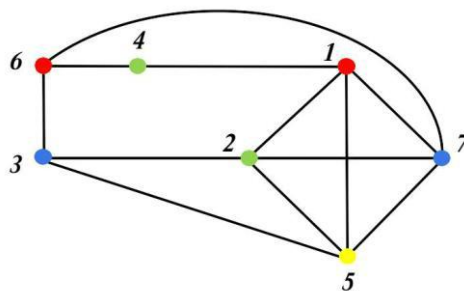


Рис. 57. Правильний варіант розфарбування

2.6 Методичні розробки по темах факультативу

1. Графи. Базові визначення. Лема про рукопотискання.

Спочатку виконуємо з учнями два кейс-завдання, після чого робимо висновок про загальний спосіб їх розв'язання (за допомогою точок і ліній). Звертаємо на це увагу школярів. Далі даємо визначення графа, пояснюємо учням, що таке вершини і ребра графа. Закріплюємо інформацію життєвими прикладами використання графів (транспортні мережі, соціальні відношення тощо). Знайомимо школярів з історичними відомостями про граф. Далі даємо визначення порожнього графа (ілюструємо це і кожне наступне визначення). З'єднуємо деякі вершини порожнього

графа ребрами і додаємо поняття суміжних вершин. З'єднуємо ті вершини, що залишилися, і отримуємо повний граф. Потім вчимо визначати степінь вершини на прикладах повних графів, отриманих у кейсах №1 і №2. Розв'язуємо власну кейс-задачу №3: Шаховий турнір проводиться за круговою системою. Кожна пара гравців зустрічається між собою рівно один раз. У турнірі беруть участь семеро школярів. Відомо, що Іван провів шість партій, Артем – п'ять, Олексій і Дмитро – по три, Семен та Ілля – по дві, Женя – одну [7]. Необхідно визначити, з ким грав кожен учасник. В ході розв'язування учні складають граф зустрічей, в якому 1 відповідає Іванові, 2 – Артему, 3 і 4 – Олексію і Дмитру, 5 і 6 – Семену і Іллі, 7 – Жені. З графа школярів видно, що Іван грав з кожним з дітей. Артем грав з усіма, крім Жені. Олексій і Дмитро грали один з одним, а також з Іваном і Артемом. Семен і Ілля грали один з одним, а також з Іваном і Артемом. Євген грав тільки з Іваном.

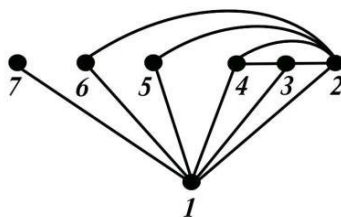


Рис. 14. Розв'язання кейс-задачі, запропонованої на занятті 1.

До вивчених понять додаємо поняття зв'язного графа. Тоді знайомимо школярів з лемою про рукопотискання. Перевіряємо твердження на графі, в результаті чого учні приходять до висновку, що лема достовірна. Покажемо, як рахувати кількість ребер і степінь вершин. Введення поняття про дводольний граф (побудова графа $K_{3,3}$, а також $K_{1,p}$, що називається зіркою). Розв'язуємо кейс-задачу №4 для побудови дводольного графа. Потім учні, поділені на групи, виконують кейс-завдання №5: У змаганнях за круговою системою з дванадцятьма учасниками були проведені всі зустрічі. Скільки зустрічей було зіграно? [7]. Учні знаходять кількість ребер в графі з 12 вершинами. Далі обчислюють $\frac{12 \times 11}{2} = 66$ ребер, що відповідає 66 зустрічам). Після цього група виконує кейс-завдання №6: У тенісному турнірі кожен гравець команди синіх зустрічається з кожним гравцем команди зелених. Кількість гравців у командах однакова і не більше восьми. «Сині» виграли в

«зелених» в чотири рази більше матчів, ніж «зелені» [7]. Необхідно знайти, із скількох гравців складається кожна команда і графічно зобразити рукопотискання всіх членів команди з суперниками. У процесі розв'язування учні обчислюють кількість ребер в графі n^2 . Отже, $4x + x = n^2$. $5x = n^2$, отже, $n = 5$. Школярі складають дводольний граф, який представляє дружнє рукопотискання обох команд (рис. 15) і повторюють його, як зазначено в графі.

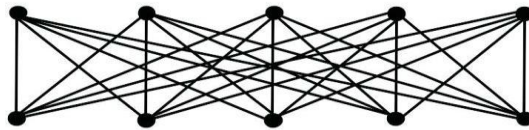


Рис. 15. Граф $K_{5,5}$ із зображенням складу команд у кейс-завданні (заняття 1)

Потім кожен учень самостійно виконує кейс-завдання №7 (кейс-задача, яку треба розв'язати на цьому етапі, представлена в параграфі 2.3 (урок 1)). Після цього учням задаються домашні завдання.

Заняття 2. Орієнтовні графи. Поняття про дерево

Почнемо з пояснення поняття орієнтовного графа. Ми пояснюємо, що вершини можуть з'єднуватися, крім ребер (без вказівки напрямку), також дугами (мають напрямок). Ілюструємо цю відмінність і виконуємо невелике кейс-завдання: На вулиці сильна гроза. Ви – коментатор. Триває хокейний матч. На льоду перебувають п'ятеро гравців. Хокеїст №1 виконав пас, потім гру перехопили інші хокеїсти команди (кожен з них зробив по одному удару по шайбі), так що в підсумку хокеїст №5 забив гол. Але через погодні умови трансляція була перервана, і глядачі не знають, як проходила гра. Запропонуйте вболівальникам спосіб передачі шайби, зобразивши схему гри. Вводимо визначення дерева (наводимо приклад використання такого графа: генеалогічне дерево, опис алгоритмів тощо). Вчимо визначати кількість ребер в дереві. Даємо визначення висячої вершини дерева. Розв'язуємо кейс-задачу: Розташування стежок в парку дозволяє відвідати будь-яке його місце, але при цьому не можна починати і закінчувати пішохідний маршрут біля єдиного входу в парк, так що кожна ділянка стежки між двома перехрестями можна проходити тільки один раз. Покажіть, що

деякі стежки в парку – це глухі кути. У процесі розв'язання учні будують граф (рис. 16), який вважається відповіддю на необхідне запитання.

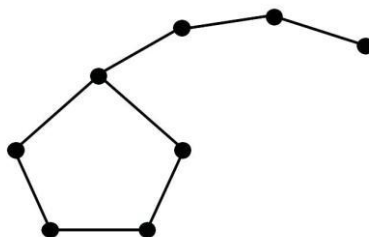


Рис. 16. Розв'язання кейс-задачі, запропонованої на уроці 2.

Вводимо поняття остовного дерева. Знайомимо учнів з алгоритмом Крускала (кейс-завдання, розв'язання якого пов'язане з побудовою остовного дерева і використанням алгоритму Крускала, наведеного в параграфі 2.3 (урок 2)). Після цього учням задаються домашні завдання.

Заняття 3. Обхід графа

Наведемо визначення графа Ейлера (проілюструємо його). Вводимо поняття Ейлерового циклу. Далі аналізуються основні способи (правила) розв'язування задач про лабіринти та задач про мости (кейс-задача, яку потрібно розв'язати, представлена в параграфі 2.3 (урок 3)). Пояснюємо правила малювання фігур без відриву олівця від паперу (учні виконують практичні завдання з обведення фігур, наведених на малюнку 17). Після цього учням задаються домашні завдання.

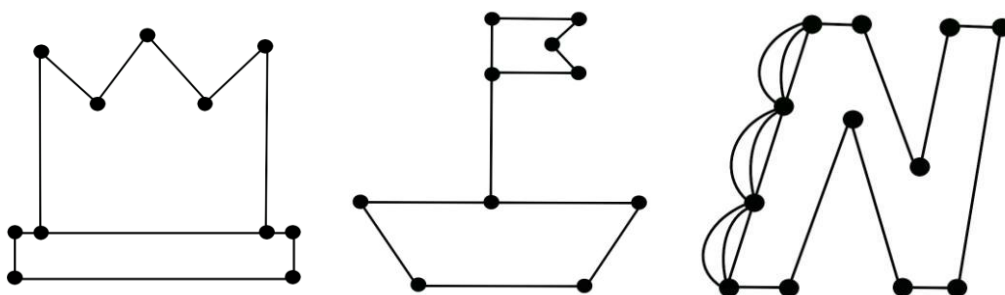


Рис.17 Завдання на малювання фігур без відриву олівця від паперу (унікурсальні графи, їх ще називають однопутними)

Заняття 4. Розташування графів

На початку дається поняття гомеоморфних графів і наводяться їх приклади. Тоді даємо визначення планарного (плоского) графа. Робимо відповідні ілюстрації.

(Виконується кейс-завдання: Є три будинки і три криниці. Кожен власник користується будь-якою з трьох свердловин. У якийсь момент мешканці будинків посварилися і вирішили прокласти свої стежки до колодязів так, щоб вони не перетиналися [7]. Запропонуйте сусідам шляхи від їхнього будинку до колодязя, якщо це можливо. В процесі розв'язання учні приходять до висновку, що граф не планарний, тому шляхи будуть перетинатися.) Знайомимо учнів з теоремою Понтрягіна-Куратовського. Розглядаємо граф K_5 і $K_{3,3}$. (Розв'язок кейс-завдання: Винахідник створив плату, на якій було 9 приладів і 17 провідників. Схема представлена на рис. 18.

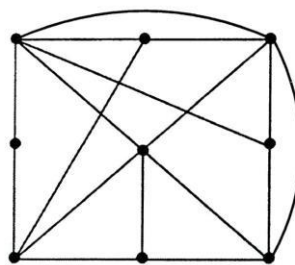


Рис. 18. Схема винаходу, представлена в кейс-задачі (заняття 4)

Тепер винахідник хоче модернізувати свій винахід так, щоб всі його провідники знаходилися з одного боку. Перевірте, чи можливо це. При розв'язуванні учні приходять до висновку, що граф не є планарним. Отже, поява такого винаходу неможлива).

Далі ми поговоримо про теорему Ейлера. Розв'язання кейс-задачі: Місто має 155 перехресть та 260 ділянок вулиць між ними. Мерією було прийнято рішення про побудову в кожному кварталі міста універсами. Визначити, скільки потрібно таких універсамів [7]. В процесі розв'язування учні застосовують теорему Ейлера для зв'язного плоского графіка, який відповідає карті міста в цій задачі, і отримують відповідь $f = m - n + 2 = 260 - 155 + 2 = 106$. Ознайомлення з методом пошуку в ширину. Приклад того, як використовувати метод пошуку в ширину при виконанні завдання. (Кейс-задача, яка вирішується за допомогою методу пошуку в ширину, представлена в параграфі 2.3 (Урок 4)). Після цього учням задаються домашні завдання.

Заняття 5. Фарби. Графи з кольоровими ребрами

Пояснення поняття правильного розфарбування. Роз'яснення на конкретних приклади принципів розв'язання задач розфарбовування карт і плоского графа. Учні розв'язують відповідні задачі та кейс-завдання: У деякій країні між будь-якими двома містами є рівно один рейс, який безпосередньо сполучає ці міста: або автобусом, або поїздом, або літаком. Відомо, що немає міста, що забезпечується всіма трьома видами транспорту, і в той же час немає трьох таких міст, будь-які дві пари яких пов'язані між собою одним і тим же засобом зв'язку [7]. Необхідно визначити кількість міст у зазначеній державі. В результаті розв'язання учні будують два графи (рис. 19), виходячи з яких дають відповідь: держава складається з 3 або 4 міст.

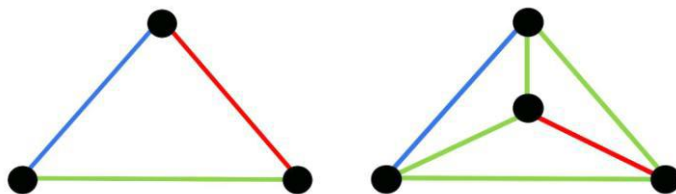


Рис. 19. Розв'язання кейс-задачі, запропонованої на уроці 5.

Завдання на складання розкладу. (Кейс– задача, розв'язання якої пов'язане з знаходженням графа можливого варіанту правильного розмалювання, представленого в параграфі 2.3 (урок 5)). Після цього учням задаються домашні завдання.

2.5 Технологічна карта заняття
Технологічна карта факультативного заняття на тему
"Поняття дерева та лісу в теорії графів"

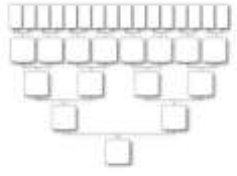
Тема заняття	Поняття дерева і лісу в теорії графів
Мета заняття	<u>Навчальна</u>: ознайомлення, розуміння школярами понять «дерево», «ліс», «алгоритм Краскала». <u>Розвивальні</u>: формування вміння знаходити графи в умовах задач та застосування на практиці; формування інтересу до галузі дискретної математики. <u>Навчальний</u>: розвиток навиків самостійної навчальної діяльності, навиків комунікації, самооцінювання.
Завдання	<u>Навчальна</u>: сформулювати основні визначення; навести приклади дерева і лісу в теорії графів, познайомити з алгоритмом Краскала, сформувати вміння перекладу інформації зі словесного опису умови задачі на мову теорії графів. <u>Розвиваючі</u>: розвивати абстрактне мислення, грамотне мовлення учнів; сприяти розвитку розумової активності школярів, мотивуючи при цьому кожен етап навчально-виховного процесу; сприяти розвитку розумових операцій, аналізу і синтезу, вмінню робити висновки; створити умови для включення кожного учня в активну навчальну та пізнавальну діяльність. <u>Навчальна</u>: розвивати культуру спілкування учнів; виховувати у школярів бажання вдосконалювати свої знання та отримувати нові знання.

Заплановані результати навчання	<u>Особистісна</u>: розуміння учнями важливості та практичної спрямованості математичних знань. <u>Предметні</u>: знати основні визначення теорії графів; вміти застосовувати отримані знання при розв'язанні задач з математики; вміти застосовувати отримані знання в деяких життєвих ситуаціях; вміти виявляти закономірності. <u>Метапредметні</u>: вміння визначати її цілі та завдання своєї діяльності; вміння грамотно розподіляти час для виконання поставленого завдання; вміння самостійного пошуку, аналізу, збору необхідної інформації; вміння проводити діяльність, як в колективі, так і самостійно.
Компетенції	Комуникативні, навчально-пізнавальні, інформаційні.
УДД	<u>Особистісні УДМ</u>: розвиток пізнавальних інтересів, мотивів навчання, розуміння важливості вивчення математики, розширення знань про можливі шляхи вирішення проблем, шанобливе ставлення до оточуючих; формування самооцінки. <u>Нормативні УДМ</u>: цілепокладання – вміння відокремити вже вивчений матеріал від невідомого; планування – вміння визначити обґрунтовану послідовність поставлених цілей, завдань і дій для отримання кінцевого результату; самооцінка – усвідомлення рівня власних знань і навичок; визначають мету навчальної діяльності за допомогою вчителя і самостійно, виконують дії з

	пошуку засобів для її досягнення. <u>Комунікативна УДМ:</u> розвиток навичок роботи в команді, вміння слухати співрозмовника та впроваджувати культурний діалог, вміння аргументувати свою точку зору. <u>Пізнавальна УДМ:</u> вміння аналізувати, порівнювати, класифікувати та узагальнювати; здійснювати пошук та відбір інформації, необхідної для виконання поставленого завдання; обирати відповідний спосіб дії; здатність цілеспрямовано застосовувати отримані знання на практиці.
Концепції	"дерево", "ліс", "алгоритм Краскала"
ІІМТ	
Тип діяльності	Відкриття нових знань
Форми роботи	Фронтальна, групова, індивідуальна
Необхідні засоби для навчання	Мультимедійне обладнання, кейси, дошка, крейда

Технологія навчання

Етап и	Вміння, що формуються	Діяльність вчителя	Діяльність учнів
Організаційний	<i>Метапредметні)</i> <i>: регулятивні:</i> організація своєї навчальної діяльності. <i>комунікативні:</i> планування навчальної співпраці з учителем та однолітками.	– Привітання, перевірка готовності до уроку, організація уваги дітей. – Здрастуйте, діти. Перевірте, чи все готово до уроку.	• вітають вчителя, • перевіряють готовність до заняття, • включаються в діловий ритм заняття.

Актуалізація опорних знань і умінь	<i>Метапредметні:</i> <i>пізнавальні:</i> структурування власних знань, <i>регулятивні:</i> контроль і оцінка процесу і результатів діяльності, <i>комунікативні:</i> організовувати і планувати навчальну співпрацю з учителем та однолітками	Вам додому було задано завдання –скласти родовід аж до четвертого покоління роду. Як виглядає зображення вашого родоводу? – А хто знає, як ще називають складання родоводу?	Учні демонструють домашнє завдання Наприклад,  і усно відповідають на запитання. –На дерево. – Генеалогічне дерево.
------------------------------------	--	--	--

Постановка мети і задач уроку. Мотивація навчальної діяльності учнів	<i>Метапредметні:</i> <i>пізнавальні:</i> вміння усвідомлено та довільно будувати мовленнєве висловлювання в усній формі, <i>регулятивні:</i> вміння проговорювати послідовність дій. <i>особистісні:</i> самовизначення, <i>комунікативні:</i> прояв активності у взаємодії для розв'язування пізнавальних задач; здатність вступати в діалог, брати участь в колективному обговоренні питання.	– Цілком вірно, а ключовим словом є слово дерево. – На минулому занятті ми вивчали граfi і говорили про те, що граfi є одною із складових дискретної математики. – А як ви думаєте, зображення з генеалогічного дерева є графом? — Правильно, значить дерево є графом. Так, тема заняття "Поняття дерева і лісу в теорії графів". Відкрийте зошити і запишіть тему уроку. А тепер спробуйте сформулювати мету нашого уроку. – Молодці, так, сьогодні ми розберемося, що таке дерево, з математичної точки зору. – Мета заняття: ознайомитись з поняттями дерева, лісу в теорії графів, розглянути алгоритми «Краскала» та навчитися застосовувати їх для розв'язування задач.	Відповідають на запитання: – Так, є графом. Учні записують у зошиті тему заняття. – Знайомство з новим видом графів – деревами
--	---	--	--

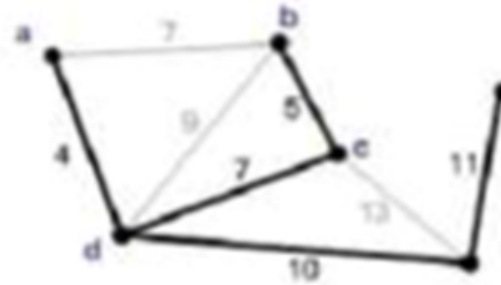
Відкриття нового знання	<i>Предметні:</i> вміти застосовувати теоретичні знання із різних тем і розділів математики для розв’язування практичних задач. <i>Метапредметні:</i> пізнавальні: формкування інтересу до даної теми, вміння знаходити вірну інформацію, перетворювати її із одної форми в іншу;	Математичне поняття дерева було вперше запропоноване Кірхгофом для дослідження електричних кіл. Давайте послухаємо доповідь про цього великого вченого. Один учень робить доповідь. Після цього вчитель формулює основні поняття з прикладами і використанням наступних слайдів. ДЕРЕВО, ЛІС Деревом називається зв’язний, неорієнтований граф без циклів (ациклічний), який містить більше двох вершин. Ациклічний граф, який містить декілька компонент зв’язності (складається із декількох дерев), називають лісом.	Учень робить доповідь про великого німецького фізика Густава Роберта Кірхгофа. Інші учні слухають доповідь. Учні конспектують інформацію зі слайдів собі в зошит.
-------------------------	---	--	---

<i>регулятивні:</i> планування своєї діяльності для розв'язування поставленої задачі і контроль отриманого результату; <i>особистісні:</i> формування готовності до самоосвіт; <i>комунікативні:</i> взаємодіяти з партнерами по групі і вчителем, слухати різні думки своїх однолітків, коректувати свою думку.	НЕОРІЄНТОВАНЕ ДЕРЕВО Листям неорієнтованого дерева (висячими вершинами) називають вершини, до яких інцидентне лише одне ребро. Вузлом (внутрішньою вершиною) довільного дерева називають вершину, яка не є коренем і не є листком. Висота і кількість рівнів дерева Рівнем вершини V_i в кореновому дереві називається довжина шляху від кореня дерева до даної вершини. Корінь має рівень, рівний нулю. Висотою h коренового дерева T називається величина, яка рівна максимальному із рівнів вершин. $h_B=1$; $h_C=2$; $h_D=3$; $h_M=2$; $h=3$ Глибина (кількість рівнів дерева) d дерева T дорівнює кількості вершин, які лежать на максимальній гілці від кореня до листа. $d=4$.	Учні конспектують інформацію зі слайдів собі в зошит.
---	---	--

Далі розглянемо алгоритм Краскала на конкретній задачі, опісля формулюється постановка задачі і дається опис алгоритму розв'язування.

АЛГОРИТМ КРАСКАЛА

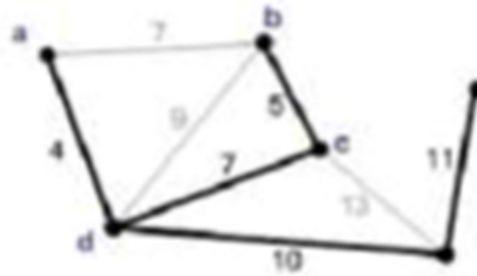
Остов графа (стягуюче дерево, spanning tree) – дерево, отримане із графа через викидання частини ребер.



Є n сільських будинків, які потрібно об'єднати в єдину комп'ютерну мережу. Для цього достатньо прокласти $(n-1)$ лінію між будинками. Як з'єднати будинки так, щоб сумарна вартість з'єднань (кабеля) була мінімальна?

Постановка задачі

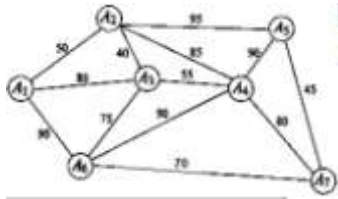
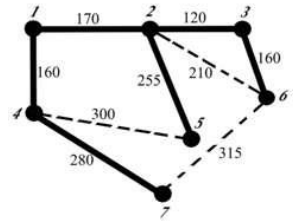
Дано зв'язний неорієнтований граф $G(V,E)$, і кожній його дузі співставлене деяке число, яке називається вагою, або довжиною цієї дуги. Суму ваг дуг дерева в подальшому будемо називати вагою дерева або його множини дуг. Потрібно знайти таке остовне дерево T , яке містить всі вершини графа, і у якого вага була б мінімальною. Таке дерево будемо називати мінімальним остовним деревом.



Учні конспектують інформацію зі слайдів собі в зошит.

		Опис алгоритму 1. Спочатку створюємо порожню множину ребер. 2. Потім, <i>поки це можливо</i>, проводимо наступні операції: із всіх ребер, додавання яких до даної множини <i>не викличе появи в ній циклу</i>, вибирається ребро мінімальної ваги і додається до даної множини. Коли таких ребер більше немає, алгоритм завершений. Підграф даного графа, який містить всі його вершини і знайдену множину ребер, є його остовним деревом мінімальної ваги.	
--	--	--	--

Первинна перевірка розуміння	<i>Метапредметні:</i> <i>пізнавальні:</i> вміти аналізувати, узагальнювати, робити висновки; будувати логічно-обґрунтовані міркування, <i>регулятивні:</i> вміти вибирати шляхи і засоби досягнення мети, працювати за планом, <i>комунікативні:</i> вміння повно і точно висловлювати свої думки.	Кейс-задача, розв’язок якої пов’язаний з побудовою остовного дерева і застосуванням алгоритму Крaskала. Це практичний кейс–ілюстрація, метод ситуативного аналізу. З описом кейсу можна ознайомитися на слайді. Будівельна компанія будує житловий комплекс, що складається з 14 будинків. Сім з них вже побудовані, а решта сім знаходяться на стадії будівництва. У побудованих будинках завершено прокладання основних комунікацій, і тепер компанія має прокласти інтернет-кабель, що з’єднає всі вже побудовані будинки. Щоб запобігти випадковому пошкодженню кабелю під час будівельних робіт, це необхідно робити уздовж доріг. Також компанія зацікавлена в тому, щоб прокласти інтернет-кабель з мінімальними затратами. Схема ділянки представлена на рис. 21 (цифри в дужках показують відстань між будинками). Завдання. Запропонуйте компанії схему прокладки інтернет-кабелю, щоб його довжина була при цьому мінімальною.
------------------------------	--	---

		отриманого мінімального остовного дерева. Отже, у нас вийшла схема мінімального інтернет-кабелю.	їх довжини рівні. Четвертим виберемо ребро (1, 2), п'ятим – ребро (2, 5), шостим – (4, 7).
Домашнє завдання	<i>Метапредметні:</i> <i>регулятивні:</i> вміти передбачати та коригувати свої дії, <i>комунікативний:</i> здатність слухати і розуміти мову оточуючих.	Дає коментар до домашнього завдання. Домашнє завдання: Використовуючи алгоритм Краскала, побудувати мінімальне остовне дерево 	Записують домашнє завдання. 

Рефлексія навчальної діяльності	Метапредметні:	Підбиваємо підсумки заняття Кожному учневі роздається робоча карта уроку, на якій представлені фрази для рефлексії. Робоча карта до уроку Учня (учениці) _____ Тема уроку _____ Рефлексія діяльності на уроці <table><tr><td>1</td><td>Сьогодні я дізнався</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>Було цікаво</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>Було важко</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>Я навчився</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>У мене вийшло</td><td></td></tr></table> Після цього учні заповнюють дерево успіху листочками. Кожний листочок має свій визначений колір: зелений – все завдання виконав легко, жовтий — зустрічалися труднощі, червоний — складно. Кожен учень вбирає дерево на класній дошці відповідними листочками.	1	Сьогодні я дізнався		2	Було цікаво		3	Було важко		4	Я навчився		5	У мене вийшло		Відповідають на поставлені питання, аналізують результати роботи, роблять висновки. Задають питання вчителю.
	1		Сьогодні я дізнався															
	2		Було цікаво															
	3		Було важко															
	4		Я навчився															
5	У мене вийшло																	
пізнавальні:	рефлексія,																	
регулятивні:	оцінювання власної діяльності,																	
особистісні:	самооцінка,																	
комунікативні:	здатність аналізувати власні успіхи, невдачі, визначати шляхи їх корекції.																	

Висновок

Шкільний курс інформатики не передбачає ґрунтовного вивчення основ теорії графів. Лише в деяких підручниках є завдання, розв'язки яких ґрунтуються на представленні даних задачі у вигляді графів. Незважаючи на це, завдання, що розв'язуються за допомогою графів, дуже поширені на олімпіадах. Використання графів при розв'язанні задач надає простоту, доступність і ясність розв'язанню. У повсякденному житті люди часто користуються графами, самі того не знаючи, наприклад, зображуючи якісь міста або села на картах у вигляді точок, а маршрути між ними – за допомогою ліній. З цієї причини використання графів школярами не викличе у них труднощів, підвищить їх інтерес до навчання і буде сприяти абстрактній наочності навчання.

У зв'язку з цим стає очевидним, що проблема полягає в тому, що графи недостатньо розглядаються в шкільному курсі інформатики. Найбільш ефективною формою організації таких занять є факультативи.

У даній роботі розроблений факультативний курс для 9 класів «Чудові графи». Він розрахований на 10 уроків, кожен з яких проводиться з використанням кейс-технології, що дозволяє учням побачити практичну спрямованість графів.

Розроблений факультативний курс може бути використаний вчителями для проведення додаткових занять з учнями 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів.

Таким чином, мету і завдання, які були поставлені на початку даного дослідження, можна вважати виконаними.

Список використаних джерел

1. Бурда М. І. Зміст шкільної математики як предмет методичного дослідження. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2015»: матеріали II міжнар. наук.-метод. конф., м. Суми, 3-4 груд. 2015 р. / Міністерство освіти і науки України, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Інститут педагогіки АПН України, 2015. С. 21–25.
2. Віхрова О. В., Білоусова Г. М. Навчання розв'язуванню логічних задач на уроках математики. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. 2005. Вип.1. С. 61–64. Державний стандарт початкової освіти. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennya-derzhavnogo-standartu-pochatkovoyi-osviti>.
3. Збірник міні-кейсів з дисципліни «Комунікативні процеси у навчанні» / за ред. Л. О. Савенкової, В. М. Приходько. – К.: КНЕУ, 2009. – 343 с.
4. Деркач А. М. Кейс-метод в навчанні // Спеціаліст. 2010. № 4. С. 22-23.
5. Івасик В.Б. Вибір програмних засобів для вивчення теорії графів в середній школі // Наукові записки Тернопільського державного педагогічного університету. –1999. –№3. – С.170-175.
6. Івасик В.Б. Елементи теорії графів у шкільному курсі інформатики // Проблеми інформатизації освіти. Збірник наукових праць. – К.: УДПУ, 1997. – С.230-235.
7. Коваль Л.В., Скворцова С.О. Методика навчання математики: теорія і практика: Підручник. Част. I. Одеса: Видавництво Автограф, 2008. 284 с.
8. Ковальова К., Ковальов В. Методологічні аспекти методу case-study при викладанні економічних дисциплін // Вища школа: проблеми екон. освіти. – 2010. – № 2. – С. 68 – 75.
9. Концепція Нової української школи. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>.

10. Кузьменко І. М. Теорія графів: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2020. 71 с.
11. Михайлова Е. А. Кейс и кейс-метод: процесс написания кейсу / Е. А. Михайлова // Маркетинг. – 1999. – № 5. – С. 113 – 120.
12. Пустовойт Б., Федяй І. Кейс-технологія як один із сучасних методів викладання у закладах вищої освіти для формування компетентності майбутніх фахівців. Наукові записки кафедри педагогіки. 2018. №1(43), С. 422–430. URL: <https://periodicals.karazin.ua/pedagogy/article/view/11959>
13. Сурмін Ю. Кінець епохи «старанних відмінників». Кейс-метод як засіб якісного оновлення української освіти // Синергія. – 2001. – №2 – 3. – С. 27 – 33.
14. Сурмін Ю. П. Кейс-метод: становлення та розвиток в Україні. Вісник Національної академії державного управління при Президенті України. 2015. №2. С. 19–28. URL : http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vnadu_2015_2_5
15. Шевченко О. П. Навчальний потенціал кейс-методу [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://vuzlib.com/content/view/315/84/>
16. Шеремета П. М., Канищенко Л. Г. Кейс-метод: з досвіду викладання в українській бізнес-школі/ за ред. О. І. Сидоренка; 2-ге вид. – К.: Центр інновацій та розвитку, 1999. – 80с.
17. Kooistra B., Dijkman B., A Einhorn T., Bhandar M. How to design a good case series. J. Bone Joint Surg. Am. 2009. Vol. 91, Suppl 3. P. 21-26.
18. Bonney K.M. Case Study Teaching Method Improves Student Performance and Perceptions of Learning Gains. Journal of Microbiology & Biology Education. 2015. Iss. 16(1). P. 21–28.
19. Case Method Teaching and Learning [Internet] Available from: <https://ctl.columbia.edu/resources-and-technology/resources/case-method/>
20. Smith C. O., Kardos G. Engineering Cases in Mechanics education / C. O. Smith, G. Kardos Збірник міні-кейсів з дисципліни «Комунікативні

процеси у навчанні» / за ред. Л. О. Савенкової, В. М. Приходько. – К.: КНЕУ, 2009. – 343 с.

21. The effectiveness of case-based learning in health professional education: A BEME systematic review / J. E. Thistlethwaite, et al. Medical Teacher. 2012. Iss. 34(6). e421-44.