

**Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний педагогічний університет імені
Володимира Гнатюка**

**Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

Кваліфікаційна робота

**МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ УЧНІВ У
ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ**

**Спеціальність 014 Середня освіта
Освітня програма Середня освіта (Математика, фізика)**

Здобувача вищої освіти освітньо-
кваліфікаційного рівня «магістр»
Худоярової Світлани Сергіївни

НАУКОВИЙ КЕРІВНИК:
доктор філософії зі спеціальності
«Математика»
Біланик Ірина Богданівна

РЕЦЕНЗЕНТ:
кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри фізики та методики її
викладання
Федчишин Ольга Михайлівна

Тернопіль – 2025

АНОТАЦІЯ

Худоярова С. С. Методика організації самостійної роботи учнів у процесі навчання розв’язуванню задач з параметрами. Кваліфікаційна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр” зі спеціальності 014 Середня освіта. ТНПУ ім. В. Гнатюка. Тернопіль, 2024. 52 с.

У кваліфікаційній роботі досліджено особливості організації самостійного навчання учнів розв’язування задач з параметром у шкільному курсі математики. Проаналізовано типи задач з параметром та основні методи їх розв’язування. Обґрунтовано доцільність використання цифрових засобів у самостійному навчанні учнів. Розроблено інтерактивний підручник з розв’язування задач із параметром, що охоплює теми лінійних і квадратних рівнянь та рівнянь з параметром, і запропоновано рекомендації щодо його використання у шкільній практиці.

Ключові слова: самостійне навчання, задачі з параметром, інтерактивний підручник, рівняння з параметром, цифрові освітні засоби.

ABSTRACT

Khudoiarova S. S. A Methodology for Organizing Students' Independent Work in Solving Problems with Parameters. Master's thesis for the MA degree in the specialty 014 Secondary education. Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University. Ternopil, 2024. 52 p.

The qualification thesis deals with the organization of students' independent learning of solving problems with parameters in the school mathematics course. The types of problems with parameters and basic solution methods are analyzed. The use of digital tools for independent learning is substantiated. An interactive textbook covering linear and quadratic equations and equations with parameters is developed and recommendations for its use in school practice are proposed.

Key words: independent learning, problems with parameters, interactive textbook, equations with parameters, digital educational tools.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОГО НАВЧАННЯ УЧНІВ.....	6
1.1. ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ: ЗМІСТ І ОСОБЛИВОСТІ.....	6
1.2. ТИПИ ЗАДАЧ ІЗ ПАРАМЕТРОМ ТА ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДЛЯ ЇХ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ.....	11
1.3 ЦИФРОВІ ІНСТРУМЕНТИ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ.....	15
РОЗДІЛ II. РОЗРОБЛЕННЯ ІНТЕРАКТИВНОГО ПІДРУЧНИКА ЯК ЗАСОБУ САМОСТІЙНОГО НАВЧАННЯ УЧНІВ.....	20
2.1. ДИДАКТИЧНІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВИМОГИ ДО ІНТЕРАКТИВНОГО ПІДРУЧНИКА.....	20
2.2. СТРУКТУРА ІНТЕРАКТИВНОГО ПІДРУЧНИКА З РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ПАРАМЕТРОМ.....	22
2.3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРАКТИВНОГО ПІДРУЧНИКА У ШКІЛЬНІЙ ПРАКТИЦІ.....	31
ВИСНОВКИ	35
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	37
ДОДАТКИ.....	38

ВСТУП

Актуальність теми: Сучасні тенденції розвитку освіти, зокрема впровадження компетентнісного підходу, цифровізації навчального процесу та орієнтації на формування здатності учнів до самостійної пізнавальної діяльності, актуалізують проблему пошуку ефективних засобів організації самостійного навчання з математики. Особливої уваги потребує навчання розв'язування задач з параметром, які належать до найбільш складних і водночас найбільш змістовно насичених у шкільному курсі математики.

Ефективне вивчення задач з параметром значною мірою залежить від рівня організації самостійної роботи учнів, оскільки саме така діяльність сприяє глибокому усвідомленню ролі параметра, формуванню вмінь аналізувати умову задачі, досліджувати залежність розв'язків від значень параметра та робити логічно обґрунтовані висновки. Разом з тим абстрактність, багатоваріантність розв'язків і необхідність інтеграції знань з різних розділів алгебри зумовлюють значні труднощі в засвоєнні цього матеріалу учнями, що підтверджується низькими результатами виконання відповідних завдань на національному мультипредметному тесті.

Проблеми методики навчання задач з параметром, організації самостійної діяльності учнів та використання сучасних освітніх засобів розглядалися у працях А. В. Прус, В. О. Швеця, А. М. Чернецької, Я. В. Куруца, Т. В. Білорус, О. В. Бузи, О. О. Чепка та інших науковців. Водночас аналіз науково-методичної літератури засвідчує, що питання системного використання інтерактивних засобів, спеціально орієнтованих на самостійне навчання учнів розв'язування задач з параметром, залишається недостатньо розробленим.

У цьому контексті особливої актуальності набуває використання інтерактивного підручника, який поєднує теоретичний матеріал, алгоритми розв'язування, приклади, тренувальні вправи та засоби самоконтролю, створюючи умови для індивідуалізації навчання та розвитку самостійності учнів. Тому розроблення й упровадження інтерактивного підручника як засобу самостійного навчання учнів розв'язування задач з параметром є актуальним

завданням сучасної математичної освіти, що зумовлює вибір теми магістерської роботи та визначає її теоретичну і практичну значущість.

Об’єкт дослідження: процес самостійного навчання учнів математики.

Предмет дослідження: особливості використання інтерактивного підручника як засобу самостійного навчання учнів розв’язування задач з параметром.

Мета дослідження: створити методичні рекомендації для розробки інтерактивного підручника як засобу самостійного навчання учнів розв’язування задач з параметром.

Завдання дослідження.

1. Проаналізувати наукову та науко-методичної літературу та виокремити засоби для самостійного навчання учнів.
2. Дослідити проблему засвоєння теми “Задачі з параметром” у шкільній практиці та статистику виконання таких задач на НМТ.
3. Проаналізувати типи задач з параметром та необхідну для їх розв’язування теоретичну основу.
4. Визначити дидактичні та функціональні вимоги до інтерактивного підручника з розв’язування задач із параметром, розробити його структуру.
5. Створити фрагмент інтерактивного підручника із використанням відповідних цифрових інструментів та сформулювати методичні рекомендації щодо його застосування у шкільній практиці.

Методи дослідження:

- загальнонаукові методи (аналіз, синтез, узагальнення та систематизація), які дали змогу опрацювати наукову й науково-методичну літературу з проблеми самостійного навчання учнів математики та розв’язування задач з параметром;
- порівняльний і логіко-системний аналіз, що застосовувалися для вивчення змісту задач з параметром, визначення їх типів і основних методів розв’язування;

- пошуково-бібліографічний метод (вивчення навчальних програм, підручників, методичних посібників і наукових публікацій), який став підґрунтям для наукових узагальнень і висновків;
- метод термінологічного аналізу, що уможливив уточнення змісту основних понять дослідження, зокрема «самостійне навчання», «задачі з параметром», «інтерактивний підручник»;
- методи педагогічного моделювання та проєктування, використані під час розроблення структури інтерактивного підручника з розв'язування задач із параметром;
- методи педагогічного узагальнення, застосовані для формулювання методичних рекомендацій щодо використання інтерактивного підручника у шкільній практиці.

Наукова новизна кваліфікаційної роботи полягає в обґрунтуванні доцільності використання інтерактивного підручника як ефективного засобу самостійного навчання учнів розв'язування задач з параметром, а також у розробленні авторської структури інтерактивного підручника, побудованої за принципом поступового переходу від стандартних рівнянь до рівнянь з параметром із використанням цифрових засобів самоконтролю.

Практичне значення роботи полягає в можливості використання розробленого інтерактивного підручника та методичних рекомендацій у навчальному процесі закладів загальної середньої освіти, під час організації самостійної роботи учнів, підготовки до національного мультипредметного тесту, а також в умовах дистанційного та змішаного навчання. Матеріали роботи можуть бути корисними вчителям математики та студентам педагогічних спеціальностей.

Структура роботи: кваліфікаційна робота складається зі вступу складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі розглянуто теоретико-методичні основи розв'язування задач з параметром у шкільному курсі математики, проаналізовано зміст і типи задач з параметром, основні методи їх розв'язування,

а також роль цифрових засобів у формуванні самостійності учнів. У другому розділі обґрунтовано дидактичні та функціональні вимоги до інтерактивного підручника, розроблено його структуру та описано технологію створення, а також сформульовано методичні рекомендації щодо застосування інтерактивного підручника як засобу самостійного навчання учнів.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОГО НАВЧАННЯ УЧНІВ

1.1. Задачі з параметром у шкільному курсі математики: зміст і особливості

Задачі з параметрами традиційно вважаються одними з найскладніших у шкільному курсі математики, що зумовлено їх багатоваріантністю та необхідністю аналізу умов задачі залежно від значень певної величини. Особливої актуальності ці задачі набувають у процесі підготовки учнів до національного мультипредметного тесту та вступних іспитів до закладів вищої освіти, де вони використовуються як інструмент перевірки рівня логічного, абстрактного та критичного мислення. Водночас обмежувати значущість задач з параметрами лише екзаменаційними потребами є помилковим, оскільки їхній дидактичний потенціал значно ширший [26].

У загальноосвітньому курсі математики задачі з параметрами виконують важливу функцію систематизації знань учнів, сприяють активізації пізнавальної діяльності та формуванню математичної культури. Розв'язування таких задач вимагає не лише ґрунтовного знання теоретичного матеріалу, а й уміння застосовувати його в нестандартних ситуаціях, що, у свою чергу, сприяє розвитку логічного та критичного мислення. Саме тому задачі з параметрами посідають важливе місце в програмах з поглибленим вивченням математики та розглядаються як показник високого рівня математичної компетентності учнів.

Поняття параметра має грецьке походження й у перекладі означає «відміряти». У широкому науковому розумінні параметр є величиною, що характеризує певну властивість, стан або умову існування об'єкта, явища чи процесу. Це поняття широко використовується не лише в математиці, а й у фізиці, хімії, економіці, техніці, програмуванні та інших галузях знань. У математичних задачах параметр, як правило, є сталою величиною в межах конкретної задачі, проте його числове значення наперед не задане, а може змінюватися в певних межах [14].

У шкільному курсі математики параметр може входити до формул, алгебраїчних виразів, рівнянь, нерівностей, систем рівнянь і нерівностей, а також до умов текстових задач. Параметр дозволяє виділити окремий об'єкт із множини однотипних об'єктів. Так, наприклад, у формулі квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) параметрами є коефіцієнти a , b та c , які визначають конкретний вигляд функції серед усіх можливих квадратичних функцій. Таким чином, параметр відрізняється від змінної тим, що його значення фіксується в межах одного дослідження, але може змінюватися при розгляді інших випадків.

Під задачами з параметрами у шкільному курсі математики розуміють задачі, в яких умова, процес розв'язування та форма відповіді залежать від значень однієї або кількох параметричних величин. До цього виду задач належать як ті, де параметр присутній явно, так і ті, в яких він вводиться під час аналізу задачі з методичних або змістових міркувань. Розв'язування кожної такої задачі фактично зводиться до дослідження цілого класу стандартних задач, кожна з яких відповідає певному значенню параметра.

Значення параметрів істотно впливають не лише на результат, а й на сам логічний та технічний хід розв'язування, а також на форму запису відповіді. У зв'язку з цим розв'язування задач з параметрами потребує підвищеної ретельності, глибокого аналізу умов та системного підходу. У процесі роботи з такими завданнями учні опановують значну кількість евристичних прийомів як загального, так і спеціального характеру, що сприяє розвитку дослідницьких умінь.

У школі учні знайомляться з параметрами (явно на цьому не наголошується) під час введення деяких понять, зокрема:

- лінійні рівняння та нерівності з однією змінною:

$ax = b$; $ax > b$; $ax < b$, де x — змінна; a і b — параметри;

- квадратні рівняння та нерівності другого степеня:

$ax^2 + bx + c = 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$, x — змінна; a і b, c — параметри, ($a \neq 0$);

- найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності:

$\sin x = a; \sin x > a; \sin x < a; \cos x = a; \cos x > a; \cos x < a; \operatorname{tg} x = a; \operatorname{tg} x > a; \operatorname{tg} x < a$, де x — змінна; a — параметр;

- показникові рівняння та нерівності:

$a^x = b; a^x > b; a^x < b$, де x — змінна; a і b — параметри, ($a > 0; a \neq 0$);

- логарифмічні рівняння та нерівності:

$\log_a x = b; \log_a x > b; \log_a x < b$, де x — змінна; a і b — параметри, ($a > 0; a \neq 0$);

- лінійна функція:

$y = kx + b$, де x і y — змінні; k і b — параметри;

- функції пряма і обернена пропорційність:

$y = kx$ та ($y = \frac{k}{x}$), де x і y — змінні; k — параметр, ($k \neq 0$);

- квадратична функція:

$y = ax^2 + bx + c$, де x і y — змінні; (a, b, c) — параметри, ($a \neq 0$);

- показникова функція:

$y = a^x$, де x і y — змінні; a — параметр, ($a > 0; a \neq 0$);

- логарифмічна функція:

$y = \log_a x$, де x і y — змінні; ($a > 0; a \neq 1$).

Таким чином, проблема формування й розвитку дослідницьких умінь учнів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами є актуальною з точки зору розвитку творчої особистості школярів, особливо в умовах впровадження нової парадигми освіти [25].

Аналіз змісту чинних підручників з алгебри для 7–9 класів свідчить про те, що задачі з параметрами представлені в обсязі, достатньому для ознайомлення учнів з існуванням такого типу завдань, проте недостатньому для формування стійких умінь і навичок їх розв'язування. У більшості випадків учні стикаються з такими задачами епізодично, без системного опрацювання алгоритмів і методів дослідження залежності розв'язків від параметра. Як наслідок, у значної частини

школярів виникають труднощі під час виконання завдань з параметрами на підсумкових контрольних роботах та НМТ [12].

Але якщо розглядати підручники за 10-11 класи, тут ситуація набагато гірша. Якщо учень не навчається в профільному класі, то в нього не має змоги вивчити тему розв'язування задач з параметром, оскільки це не передбачено навчальною програмою.

Якщо проаналізувати статистику розв'язування задач з параметром на НМТ 2023-2025 рр., можемо побачити наступну ситуацію. Для цього розглянемо задачі та табл. 1.1, табл. 1.2, табл. 1.3 психометричної характеристики завдань з параметром [30;31;33].

22. Визначте кількість цілих значень a , за яких коренів x_1 та x_2 квадратного рівняння $x^2 - 4ax + 4a^2 - 25 = 0$ задовольняють умову $x_1 < 1 < x_2$. (2023 р.)

Таблиця 1.1

Психометрична характеристика завдань з параметром, 2023 рік

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			
4	77,6	22,4	22,4	51,2	0,5

22. Знайдіть усі значення a , за яких рівняння $\frac{x^2 - ax + 4}{x - 5} = 0$ має лише один корінь. Якщо таких значень кілька, то запишіть у відповідь їхній **добуток**. (2024 р.)

Таблиця 1.2

Психометрична характеристика завдань з параметром, 2024 рік

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			
-92,8	99,3	0,7	0,7	2,6	0,2

22. Визначте **найбільше** значення a , за якого рівняння $\frac{3^{2a-5x-\sqrt{27}}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}} = 0$ має корінь. (2025 р.).

Таблиця 1.3

Психометрична характеристика завдань з параметром, 2025 рік

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	2			

7,25	95,0	5,0	5,0	17,2	0,4
------	------	-----	-----	------	-----

Якщо показник $P\text{-value} < 20$, це значить, що завдання було важким.

Бачимо відсутність сталої позитивної динаміки у сформованості вмінь розв'язування задач із параметрами. Найвищі показники якості було зафіксовано у 2023 році, 22,4% учасників змогли виконати це завдання, тоді як у 2024 році спостерігається різке зниження як успішності, так і діагностичної цінності завдання, оскільки його змогли розв'язати 0,7% кількості людей. Хоч це сталось тому, що складність завдання була вищою, ніж у попередніх роках, а учасники тестування не були готові. У 2025 році зафіксовано часткове відновлення показників 5%, оскільки всі вже були готові до рівня складності та умови завдання, однак вони все ще залишаються на низькому рівні.

Особливу складність задачі з параметрами становлять у зв'язку з тим, що для їх успішного розв'язування необхідне ґрунтовне володіння теорією з різних розділів елементарної математики. Учень має вміти розв'язувати лінійні, квадратні, показникові, логарифмічні та раціональні рівняння і нерівності, працювати із системами рівнянь, а також добре орієнтуватися в графіках відповідних функцій і розуміти їх геометричний зміст. Задачі з параметрами інтегрують знання з різних тем курсу алгебри та сприяють їх узагальненню і систематизації [15].

Таким чином, задачі з параметрами мають значний дидактичний потенціал, який у шкільному курсі математики реалізується не повною мірою. Їх цілеспрямоване включення в систему навчальних задач, особливо на етапах узагальнення та систематизації знань, створює умови для підвищення рівня математичної підготовки учнів, розвитку логічного мислення та формування здатності до свідомого й творчого застосування математичних знань.

1.2. Типи задач із параметром та теоретичні основи для їх розв'язування

Ознайомлення учнів із параметрами в шкільному курсі математики відбувається поступово й здебільшого не акцентується як окремий об'єкт вивчення. Фактично учні працюють із параметрами під час розв'язування

лінійних і квадратних рівнянь та нерівностей, найпростіших тригонометричних, показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей, а також під час вивчення лінійної, квадратичної, показникової та логарифмічної функцій. У всіх цих випадках коефіцієнти або сталі величини відіграють роль параметрів, від значень яких залежить вигляд графіка функції, кількість і характер розв'язків відповідних рівнянь чи нерівностей [23].

У науково-методичній літературі досить вдало виділено основні типи задач із параметрами, до яких зводиться більшість шкільних завдань цього виду.

- Перший тип охоплює рівняння, нерівності, а також їх системи і сукупності, які необхідно розв'язати для всіх значень параметра або для параметрів, що належать заданому числовому проміжку.
- Другий тип становлять задачі, у яких потрібно визначити кількість розв'язків рівняння, нерівності чи їх системи залежно від значення параметра.
- До третього типу належать задачі, у яких вимагається знайти всі значення параметра, за яких відповідне рівняння, нерівність або система має задану кількість розв'язків, у тому числі жодного або нескінченну множину розв'язків.
- Четвертий тип складають задачі, у яких при шуканих значеннях параметра множина розв'язків повинна задовольняти додаткові умови в області визначення [7].

Єдиної схеми розв'язування для рівнянь (нерівностей, систем) із параметрами, як і для рівнянь (нерівностей, систем) без параметра, зрозуміло, не існує. Загалом, для вирішення завдань із параметрами використовуються аналітичний та графічний методи розв'язування.

Аналітичний метод є одним із найбільш розширених підходів до розв'язання задач із параметром. Його сутність уможливорює використання "математичного аналізу", "алгебраїчних" та "логічних прийомів" для вивчення без розв'язків задачі в залежності від параметра. Цей метод базується на системному аналізі й дослідженні рівняння або системи рівняння, нерівності або

системи нерівностей тощо з урахуванням різних можливих значущих параметрів.

Етапи аналітичного методу.

1. Аналіз умов задачі: визначається тип завдання (рівняння (лінійне, квадратне, або нерівність тощо); виділяються параметри, а також їх допустимі значення, якщо вони вказані в умовах.

2. Побудова області визначення: розглядаються обмеження, накладені на змінні й параметри; знаходяться область допустимих значень змінних і параметрів (ОДЗ). Область зміни параметра розділена контрольними значеннями параметра, між якими задача досліджується окремо.

3. Розв'язання рівняння для фіксованого параметра: для кожного конкретного значення параметра розв'язується завдання; використовуються стандартні методи, залежно від типу завдання (розкладання на множники, метод заміни, піднесення до степеню тощо).

4. Дослідження залежності розв'язків від параметра: виявляється, як змінюються властивості розв'язків при зміні параметра; використовуються методи аналізу функції: знаходження критичних точок, дослідження монотонності, визначення областей природи розв'язків.

5. Систематизація результатів: розв'язки записуються у вигляді залежно від параметра або у вигляді умов, які виконуються для створення певних розв'язок; створюється загальна картина розв'язків завдання для всіх допустимих значень параметра [15].

Важливим етапом аналітичного підходу є встановлення області визначення задачі, під якою розуміють допустимі значення як змінних, так і параметрів. Цей етап часто зводиться до розв'язування систем нерівностей, що відображають умови існування математичних виразів, які входять до задачі. Оскільки розв'язування таких нерівностей може залежати від параметра, виникає необхідність дослідження взаємного розташування відповідних меж на числовій осі.

Графічний підхід до розв'язування задач із параметрами базується на побудові графіків відповідних функцій і аналізі їх взаємного розташування залежно від значень параметра. Цей метод є наочним і ефективним, особливо під час дослідження кількості розв'язків рівнянь і систем рівнянь, оскільки дозволяє інтерпретувати аналітичні залежності в геометричній формі. Графічний підхід часто використовується у поєднанні з аналітичним, що підвищує глибину та обґрунтованість розв'язування [34].

Етапи графічного методу:

1. Знайти область допустимих значень невідомого та параметрів, що входять до рівняння.
2. Виразити параметр як функцію від невідомого: $a = f(x)$.
3. В системі координат xOy побудувати графік функції $y = f(x)$ для тих значень x , які входять в область визначення рівняння.
4. Знайти точки перетину прямої $y = a$ з графіком $y = f(x)$.

Можливі випадки:

- 1) пряма $y = a$ не перетинає графік функції $y = f(x)$. При цьому значення a рівняння розв'язків не має;
- 2) пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = f(x)$. Визначити абсциси точок перетину.
5. Записати відповідь.

Розв'язування задач із параметрами вимагає дотримання загальних методичних рекомендацій, серед яких особливе значення мають правильне визначення виду рівняння чи нерівності, вибір адекватного способу розв'язування, встановлення області визначення та контроль рівносильності виконуваних перетворень. У випадках застосування нерівносильних перетворень необхідно формулювати додаткові умови, що гарантують коректність отриманих результатів і запобігають появі сторонніх розв'язків [18].

Загальні рекомендації щодо розв'язування типових завдань із параметром.

1. Визначити, до якого розділу алгебри відноситься рівняння (нерівність, система).
2. Встановити вид рівняння (нерівності, системи).
3. Обрати, залежно від виду, спосіб розв'язування та здійснити орієнтовний план розв'язування.

Окремо зауважимо наступне.

1. Важливим етапом розв'язування задач із параметром є встановлення області визначення. Під областю визначення рівняння, нерівності чи системи з параметром будемо розуміти допустимі значення змінної і допустимі значення параметра. Як правило, цей етап зводиться до формулювання та розв'язування системи нерівностей. Ці нерівності визначають допустимі значення змінних та параметрів для виразів, які входять до умови. Наприклад, вираз під коренем парного степеня невід'ємний, вираз під логарифмом додатний; вираз в основі логарифма — додатний і не дорівнює одиниці. Оскільки розв'язування окремих нерівностей можуть залежати від параметрів, то узгодження окремих розв'язків для знаходження загального розв'язку системи потребує дослідження взаємного розташування на числовій осі границь областей кожної з нерівностей залежно від параметрів. Тільки після цього можна встановити область визначення змінної для кожного значення параметрів.

2. У процесі розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем із параметрами важливо здійснювати рівносильні перетворення, однак це не завжди вдається. У ряді випадків необхідно здійснити нерівносильні перетворення, які найчастіше розширюють область допустимих значень. Це, зрозуміло, може привести до появи сторонніх коренів. Наприклад, це може відбутись у процесі розв'язування ірраціональних рівнянь, коли потрібно обидві частини рівняння піднести до квадрату. Рівносильність переходів у цих випадках можна забезпечити формулюванням додаткових умов рівносильності перетворень.

3. Для того, щоб не втратити окремі випадки під час запису відповіді, варто позначати вже знайдені розв'язки на прямій, яку будемо називати «пряма

параметра». Пряма параметра — це пряма, на якій позначені знайдені розв'язки залежно від значень параметра. Слід також додати, що в окремих видах вправ пряма параметра виступає в іншій якості - як проміжна, але досить важлива ланка розв'язування. Наприклад, під час розв'язування систем нерівностей, сукупностей нерівностей [7].

Таким чином, задачі з параметрами є важливим елементом шкільного курсу математики, який поєднує теоретичні знання з практичними дослідницькими навичками. Їх систематичне використання та методично обґрунтоване розв'язування створюють умови для підвищення рівня математичної культури учнів і формування в них здатності до свідомого аналізу складних математичних ситуацій.

1.3 Цифрові інструменти при вивченні теми задач з параметром

Самостійність учнів у навчанні — найважливіша передумова повноцінного оволодіння знаннями, вміннями й навичками, це ж стосується і при вивченні теми задачі з параметром.

Самостійне навчання, особливо у контексті розв'язування математичних задач має такі особливі вимоги.

1. Учень має мати чіткі інструкції чи завдання або опорний матеріал для самостійної роботи.
2. Учень повинен планувати свій час, обрати місце зосередження, дотримуватись режиму.
3. Учень має виконати завдання, надати собі самоконтроль (наприклад, перевірити отримані відповіді, порівняти з прикладом).
4. Учень має провести рефлексію: чи вдалося зрозуміти алгоритм, чи залишились питання, чи треба звернутись до вчителя/колеги [24].

Задачі з параметром нерідко викликають труднощі у школярів через їх абстрактність і необхідність аналізувати залежність розв'язків від значення параметра. Однак сучасні цифрові технології пропонують зручні й ефективні рішення для подолання цього бар'єру. Візуалізація графіків рівнянь, нерівностей

чи систем з параметром, інтерактивне варіювання значення параметра та миттєве спостереження за змінами стали реальними завдяки інноваційним інструментам.

Сучасні цифрові засоби навчання суттєво полегшують цей процес і відіграють ключову роль у формуванні самостійності учнів. Завдяки інтерактивним платформам, візуалізації складних понять (графіки функцій, 3D-моделі геометричних тіл, симуляції), а також доступу до величезної кількості навчальних матеріалів у будь-який час учні отримують можливість:

- самостійно досліджувати математичні об'єкти та зв'язки між ними;
- експериментувати, змінюючи параметри задач і миттєво бачачи результат;
- працювати у власному темпі, повертаючись до складних тем стільки разів, скільки потрібно;
- обирати індивідуальні траєкторії навчання завдяки адаптивним системам і різноманітним форматам завдань [10].

Серед найефективніших цифрових платформ та сервісів, які підтримують самостійне навчання розв'язування задач з параметром, доцільно виокремити такі:

GeoGebra — безкоштовний інструмент № 1 для інтерактивної алгебри та геометрії. Учень може самостійно вводити рівняння з параметром, створювати повзунок (slider) для його зміни в реальному часі, спостерігати за змінами графіка (наприклад, кількість точок перетину, положення параболи) та досліджувати залежність розв'язків від параметра. Це ідеально для графічного методу розв'язування задач з параметром [35].

Desmos — потужний онлайн-калькулятор графіків і «дошка для експериментів», особливо зручний для вивчення рівнянь, нерівностей і систем з параметром [22]. За допомогою повзунків учень легко варіює параметр, аналізує системи рівнянь, параметричні графіки чи нерівності, миттєво бачачи наслідки змін [1].

Всеосвіта — одна з найбільших українських освітніх платформ із десятками тисяч матеріалів за шкільною програмою: конспекти, презентації,

тести, дидактичні ігри, підготовка до олімпіад і НМТ. Тут є готові інтерактивні матеріали, тести та завдання саме з темою «Задачі з параметром», більшість контенту безкоштовна, структура відповідає чинним підручникам [11].

Liveworksheets — платформа, що перетворює звичайні робочі зошити та тести на інтерактивні онлайн-листи з автоматичною перевіркою. Багато українських вчителів публікують готові інтерактивні зошити з задачами з параметром для старших класів, де учні можуть самостійно розв'язувати та перевіряти відповіді [3].

Використовуючи зазначені цифрові засоби, учень уже не залежить виключно від темпу класу чи розкладу вчителя: він самостійно обирає теми, рівень складності, форму роботи (спостереження, експеримент, творення), відстежує власний прогрес і формує стійку внутрішню мотивацію. Особливо ефективними GeoGebra та Desmos стають саме для задач з параметром, дозволяючи візуально «побачити» абстрактні залежності та самостійно відкривати закономірності.

Висновки до розділу 1

У першому розділі магістерської роботи було здійснено теоретико-методичний аналіз проблеми самостійного навчання учнів розв'язування задач з параметром, що дало змогу отримати такі узагальнені висновки.

Відповідно до першого завдання дослідження, проаналізовано наукову та науково-методичну літературу з проблеми самостійного навчання учнів математики. Встановлено, що самостійне навчання є необхідною умовою формування глибоких і стійких математичних знань, розвитку логічного, критичного та дослідницького мислення учнів. Особливої значущості воно набуває під час опанування складних і абстрактних тем, зокрема задач з параметром. З'ясовано, що ефективність самостійного навчання значною мірою залежить від використання спеціально підібраних засобів, серед яких провідне місце посідають цифрові освітні ресурси та інтерактивні навчальні матеріали.

У межах другого завдання дослідження досліджено проблему засвоєння теми «Задачі з параметром» у шкільній практиці та проаналізовано статистику

виконання таких завдань на НМТ у 2023–2025 роках. Аналіз результатів тестування засвідчив стабільно низький рівень сформованості в учнів умінь розв’язувати задачі з параметром, що підтверджується низькими показниками складності (P-value) та відсутністю сталої позитивної динаміки успішності. Основними причинами такої ситуації визначено фрагментарне вивчення теми в межах шкільної програми, відсутність системного підходу до формування відповідних умінь, а також недостатню кількість навчальних матеріалів, орієнтованих на самостійне опрацювання.

Виконуючи третє завдання дослідження, здійснено аналіз основних типів задач з параметром та теоретичних основ, необхідних для їх розв’язування. Установлено, що більшість шкільних задач з параметром зводиться до чотирьох основних типів, які вимагають від учнів умінь працювати з рівняннями, нерівностями та їх системами, досліджувати кількість і характер розв’язків залежно від значень параметра, а також враховувати додаткові умови. Показано, що для ефективного розв’язування таких задач доцільно поєднувати аналітичний і графічний методи, дотримуючись чітких алгоритмів дослідження та контролю рівносильності перетворень.

Окрему увагу приділено ролі цифрових інструментів у процесі самостійного навчання учнів розв’язування задач з параметром. Обґрунтовано, що використання таких сервісів, як GeoGebra, Desmos, LiveWorksheets та українських освітніх платформ, створює сприятливі умови для візуалізації абстрактних залежностей, організації самоконтролю та індивідуалізації навчального процесу.

Таким чином, результати теоретичного аналізу підтверджують доцільність пошуку та впровадження ефективних цифрових засобів самостійного навчання учнів розв’язування задач з параметром, що обґрунтовує необхідність розроблення інтерактивного підручника, опис якого подано в наступних розділах роботи.

РОЗДІЛ II. РОЗРОБЛЕННЯ ІНТЕРАКТИВНОГО ПІДРУЧНИКА ЯК ЗАСОБУ САМОСТІЙНОГО НАВЧАННЯ УЧНІВ

2.1. Дидактичні та функціональні вимоги до інтерактивного підручника

У сучасних умовах цифровізації освіти особливої актуальності набуває проблема створення ефективних засобів організації самостійного навчання учнів, зокрема під час вивчення складних розділів шкільної математики. Одним із таких розділів є задачі з параметром, які вимагають від учнів не лише ґрунтовних предметних знань, а й умінь аналізувати, досліджувати, узагальнювати та здійснювати самоконтроль. Серед різноманіття цифрових засобів самостійного навчання (онлайн-платформи, відеоуроки, інтерактивні тренажери) найбільш ефективним, на нашу думку, є інтерактивний підручник, який поєднує в собі навчальний контент, інструменти діяльності та засоби зворотного зв'язку.

Інтерактивний підручник для самостійного навчання розв'язування задач з параметром повинен відповідати низці дидактичних і функціональних вимог. До дидактичних вимог належать науковість і доступність навчального матеріалу, логічна послідовність подання тем, відповідність віковим та індивідуальним особливостям учнів, а також спрямованість на формування предметних і ключових компетентностей. Важливо, щоб підручник не лише подавав готові знання, а й стимулював пізнавальну активність учнів, формував дослідницький підхід до розв'язування задач з параметром.

Функціональні вимоги до інтерактивного підручника передбачають наявність зручної навігації, інтерактивних елементів, гіперпосилань, можливості самоперевірки та зворотного зв'язку. Особливу роль відіграє модульність структури, що дозволяє учневі працювати у власному темпі, обирати необхідну тему або повертатися до попереднього матеріалу. Інтерактивний підручник має бути доступним для використання як на комп'ютері, так і на мобільних пристроях, що розширює можливості організації самостійної роботи.

З позицій методики навчання математики інтерактивний підручник з теми «Задачі з параметром» доцільно будувати за принципом поступового ускладнення навчального матеріалу. Структура такого підручника передбачає вивчення кожного виду рівнянь у два етапи: спочатку розглядаються рівняння стандартного типу, а потім – рівняння цього ж типу з параметром. Зокрема, логічно обґрунтованою є така послідовність тем:

1. лінійні рівняння;
2. лінійні рівняння з параметром;
3. квадратні рівняння;
4. квадратні рівняння з параметром.

Такий підхід забезпечує опору на вже сформовані знання та поступовий перехід до більш складних завдань дослідницького характеру.

Кожен тематичний модуль інтерактивного підручника доцільно наповнювати такими складниками: теоретичним матеріалом, зразками розв'язування типових задач, алгоритмами проведення дослідження (аналізу кількості розв'язків залежно від параметра, розгляду окремих випадків, використання графічного методу), а також завданнями для самостійного опрацювання. Особливої уваги потребує наявність чітко сформульованих алгоритмів дослідження задач з параметром, які допомагають учням структурувати власну діяльність і зменшують рівень когнітивних труднощів.

Важливим функціональним елементом інтерактивного підручника є система самоконтролю. Для цього доцільно використовувати зовнішні цифрові сервіси, зокрема платформу LiveWorksheets. Через гіперпосилання учень може перейти до інтерактивного робочого аркуша з завданнями відповідної теми, виконати їх у зручний час та одразу отримати перевірку відповідей. Такий підхід забезпечує оперативний зворотний зв'язок, сприяє розвитку навичок самоперевірки та формує відповідальність за результати власного навчання.

Технологія створення інтерактивного підручника передбачає поєднання декількох цифрових інструментів: середовищ для подання теоретичного матеріалу, сервісів для візуалізації (графіки, схеми, ілюстрації), а також

інтерактивних платформ для організації практичної діяльності й контролю. Комплексне використання таких інструментів дозволяє створити цілісний освітній продукт, орієнтований на самостійне навчання учнів.

Отже, інтерактивний підручник є найбільш ефективним засобом самостійного навчання розв'язування задач з параметром, оскільки забезпечує інтеграцію теорії, практики та самоконтролю в єдиному цифровому середовищі. Його використання сприяє формуванню в учнів умінь аналізувати математичні об'єкти, досліджувати залежності між змінними та параметрами, а також розвиває навички саморегуляції й відповідальності за власний освітній результат.

2.2. Структура інтерактивного підручника з розв'язування задач із параметром

Ефективність інтерактивного підручника як засобу самостійного навчання значною мірою визначається його чіткою, логічно вибудованою структурою, яка забезпечує послідовне формування знань і вмінь учнів. Підручник з розв'язування задач із параметром будується на основі двох блоків: теоретичної та практичної частин, кожна з яких виконує специфічну дидактичну функцію. Приклад підручника можна розглянути у додатку А.

Теоретична частина є основою для формування предметних знань і слугує опорою для подальшої самостійної діяльності учнів. Вона є структурованою за тематичним принципом та побудована за логікою «від простого до складного». Зокрема, кожен розділ присвячується окремому виду рівнянь, спочатку без параметра, а згодом — з параметром.

Коли розглядається кожен тип рівняння, надається коротко теорія по ньому та таблиці загального розгляду. Покажемо це на приклад тем лінійних та квадратичних рівнянь (рис 2.1- 2.3).

Завдання на розв'язування лінійних рівнянь.

Лінійні рівняння з однією змінною – це рівняння виду $ax = b$, де x – змінна, а a і b – деякі числа.

Загальний розгляд лінійного рівняння

Рівняння	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів не має $x = \emptyset$
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів) $x \in \mathbb{R}$

Рис 2.1. Приклад подання теорії про лінійні рівняння

Завдання на розв'язування квадратних рівнянь.

Повне квадратне рівняння – це рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Неповне квадратне рівняння - це рівняння виду $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = 0$.

Загальний розгляд неповного квадратного рівняння.

Вид неповного квадратного рівняння	Корені рівняння
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 + c = 0$	1) $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ якщо $-\frac{c}{a} > 0$ 2) Не має коренів, якщо $-\frac{c}{a} < 0$
$ax^2 = 0$	$x_{1,2} = 0$

Рис 2.2. Приклад подання теорії про квадратні рівняння (означення, неповні квадратні рівняння)

Загальний розгляд квадратного рівняння		
Квадратне рівняння	Дискримінант $D = b^2 - 4ac$	Корені рівняння
$ax^2 + bx + c = 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$D = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
	$D < 0$	Коренів не має

Теорема Вієта: якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ і } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Т. Вієта краще застосовувати до зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.
Тоді систему коренів можна записати наступним чином:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ і } x_1 \cdot x_2 = q$$

Корені знаходимо шляхом добору.

Рис. 2.3. Приклад подання теорії про квадратні рівняння (дискримінант, теорема Вієта)

Коли учень переглянув теорію, після цього пропонується учням алгоритми розв'язування того чи іншого завдання (рис. 2.4-5).

Розв'язуючи рівняння, які зводяться до лінійних, варто дотримуватися таких кроків: 1. Якщо в рівнянні є вирази з дробовими коефіцієнтами, то помножити обидві його частини на найменший спільний знаменник дробів. 2. Розкрити дужки (якщо вони є). 3. Перенести доданки, які містять змінну, в одну частину рівняння (як правило, у ліву), а доданки, які не містять змінної, — у другу частину (у праву). 4. Звести подібні доданки. 5. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт при змінній, якщо він відмінний від нуля. Якщо ж він дорівнює 0, то рівняння або не має коренів, або його коренем є будь-яке число.
--

Рис 2.4. Алгоритм розв'язування лінійних рівнянь

Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь:

1. Звести квадратне рівняння до стандартного вигляду;
2. Визначити тип квадратного рівняння і на основі цього, шукаємо корені;
3. Якщо квадратне рівняння є повним, то визначаємо яким методом будемо розв'язувати рівняння (за допомогою т. Вієти чи дискримінанта);
4. Якщо обрали дискримінант, обчислити його, якщо т. Вієта, записати систему;
5. Якщо обрали дискримінант, проаналізувати D , якщо $D \geq 0$, то знаходимо корені рівняння, якщо $D < 0$, то коренів не має. якщо т. Вієта, добираємо корені;
6. Записуємо відповідь.

Рис. 2.5. Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь

Після цього надаються алгоритм покрокового розв'язування задач з детальними поясненнями для типових завдань з теми. Наприклад з теми «Лінійні рівняння»:

Приклад розв'язування 1: Розв'яжіть рівняння:

- a) $7x + 32 = 12x + 27$;
 b) $5,4y + 1,5 = -1 + 5,4y$.

a)

$7x + 32 = 12x + 27$	<i>Переносимо ікси вліво, числа вправо</i>
$7x - 12x = 27 - 32$	<i>Зводимо подібні доданки</i>
$-5x = -5 \quad :(-5)$	<i>Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній</i>
$x = 1$	<i>Наш корінь</i>

Відповідь: 1.

b)

$5,4y + 1,5 = -1 + 5,4y$	<i>Переносимо ікси вліво, числа вправо</i>
$5,4y - 5,4y = -1 - 1,5$	<i>Зводимо подібні доданки</i>
$0y = -2,5$	<i>Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній</i>
$y = \emptyset$	<i>Наш корінь</i>

Відповідь: $y = \emptyset$.

Приклад розв'язування 2: Розв'яжіть рівняння:

- a) $2(x + 5) = 2(x - 4)$;
 b) $(x + 2)(x - 1) = x(x + 3)$.

a)

$2(x + 5) = 3(x - 4)$	Розкриваємо дужки
$2x + 10 = 3x - 12$	Переносимо ікси вліво, числа вправо
$2x - 3x = -12 - 10$	Зводимо подібні доданки
$-x = -22 \mid :(-1)$	Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній
$x = 22$	Наш корінь

Відповідь: 22.

b)

$(x + 2)(x - 1) = x(x + 3)$	Розкриваємо дужки
$x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + 3x$	Переносимо ікси вліво, числа вправо
$x^2 - x^2 - x + 2x - 3x = 2$	Зводимо подібні доданки
$-2x = 2 \mid :(-2)$	Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній
$x = -1$	Наш корінь

Відповідь: -1.**Приклад розв'язування 3:** Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15}.$$

$\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15} \mid \cdot 15$	Множимо на НСД займенників
$3(x-1) + 5(x-2) = 15 \cdot 2 - (x-2)$	Розкриваємо дужки
$3x - 3 + 5x - 10 = 30 - x + 2$	Переносимо ікси вліво, числа вправо
$3x + 5x + x = 30 + 2 + 3 + 10$	Зводимо подібні доданки
$9x = 45 \mid :9$	Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній
$x = 5$	Наш корінь

Відповідь: 5.

Приклади розв'язування квадратних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4x^2 + 8x = 0$.

$4x^2 + 8x = 0$	Не повне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$, знаходимо корені
$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{4}$	Скорочуємо
$x_1 = 0, x_2 = -2$	Наші корені

Відповідь: -2; 0.**Приклад 2.** Розв'язати рівняння $(3x - 5)(3x + 5) = 6x^2 - 25 + 15x$.

$(3x - 5)(3x + 5) = 6x^2 - 25 + 15x$	<i>Зводимо до стандартного вигляду</i>
$9x^2 - 25 - 6x^2 + 25 - 15x = 0$	<i>Зводимо подібні доданки</i>
$3x^2 - 15x = 0$	<i>Не повне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$, знаходимо корені</i>
$x_1 = 0, x_2 = \frac{15}{3}$	<i>Скорочуємо</i>
$x_1 = 0, x_2 = 5$	<i>Наші корені</i>

Відповідь: 0; 5.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 + 7x + 10 = 0$.

$x^2 + 7x + 10 = 0$	<i>Повне квадратне рівняння, до того ж зведене, обчислюємо дискримінант</i>
$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$	<i>$D > 0$, отже корені існують. а) розв'язуємо за дискримінантом; б) розв'язуємо за т. Вієта</i>
$a) x_1 = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2} = -5$ $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{9}}{2} = -2$ $б) \begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 \cdot x_2 = 10 \end{cases}$	<i>а) Виконуємо обчислення</i> <i>б) добираємо корені</i>
$x_1 = -5, x_2 = -2$	<i>Наші корені</i>

Відповідь: -5; -2.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $(2x + 3)^2 + 2x^2 = -12x - (x - 2)^2$.

$(2x + 3)^2 + 2x^2 = -12x - (x - 2)^2$	<i>Зводимо до стандартного вигляду</i>
$4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 = -12x - x^2 + 4x - 4;$ $4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 + 12x + x^2 - 4x + 4 = 0;$ $7x^2 + 20x + 13 = 0.$	<i>Повне квадратне рівняння, не зведене, шукаємо дискримінант</i>
$D = 20^2 - 4 \cdot 7 \cdot 13 = 400 - 364 = 36$	<i>$D > 0$, отже корені існують, розв'язуємо за дискримінантом</i>
$x_1 = \frac{-20 - \sqrt{36}}{2 \cdot 7} = \frac{-20 - 6}{14} = -\frac{26}{14} = -\frac{13}{7}.$	<i>Обчислюємо</i>

$x_2 = \frac{-20 + \sqrt{36}}{2 \cdot 7} = \frac{-20 + 6}{14} = -\frac{14}{14} = -1.$	
$x_1 = -\frac{13}{7}, x_2 = -1.$	Наші корені

Відповідь: $-\frac{13}{7}, -1.$

Після цього йдуть завдання для самоопрацювання, де учень зможе перевірити свої вміння розв'язування лінійних і квадратних рівнянь. Щоб впевнитись, що відповіді, які вийшли є правильними, знизу після завдань є QR-code, який має в собі посилання на робочий аркуш LiveWorksheets з цими завданнями, де учню потрібно внести відповіді (рис 2.6). Коли він завершить роботу, програма покаже зеленим кольором, якщо відповідь є правильна і червоним, якщо ні (рис. 2.7).

Завдання для самоопрацювання:

Завдання 1. Скільки коренів має рівняння:

a) $6x = 42$

b) $4x = -12$

c) $0y = -5$

d) $-5x = -25$

e) $0x = 0$

f) $-2x = 0$

Завдання 2. Розв'яжіть рівняння:

1) $28x = 420$

2) $-0,04x = 1,4$

3) $\frac{4}{15}x = \frac{2}{5}$

4) $5x - 3 = 17$

5) $4 - 3y = 2y + 22$

6) $-1, m - 2 = m - 0,9$

7) $8x - 7 = 3(x - 4)$

8) $x(x + 4) - x^2 = -8$

9) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 2x$

10) $2(x - 11) - 5(7 - 2x) = -3$

11) $0,5x = 0,4(2x - 5) + 1,7$

12) $2(5x - 8(x - 1)) = 8(x + 9)$

13) $(x + 2)^2 = (x - 4)(x + 4)$

14) $\frac{x-1}{16} = \frac{2x+1}{8}$

15) $\frac{7}{12} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

16) $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{3} = \frac{x-3}{4} = \frac{x}{6}$

LIVEWORKSHEETS

Finish!

Рис. 2.6. Робочий аркуш LiveWorksheets

Завдання для самоопрацювання:

Завдання 1. Скільки коренів має рівняння:

a) $6x = 42$

не має

b) $4x = -12$

не має

c) $0y = -5$

безліч

d) $-5x = -25$

Єдиний

e) $0x = 0$

не має

f) $-2x = 0$

безліч

Завдання 2. Розв'яжіть рівняння:

Correct answer: 15

1) $28x = 420$

14

2) $-0,04z = 1,4$

35

3) $\frac{4}{15}x = \frac{2}{5}$

1

4) $5x - 3 = 17$

4

5) $4 - 3y = 2y + 22$

56

Рис 2.7. Перевірка відповідей на робочому аркуші LiveWorksheets

Після завершення звичайних рівнянь, учневі пропонується рівняння з параметром зразу після проходження того ж типу рівнянь. Надається загальний алгоритм дослідження задачі з параметром а також приклади розв'язування. (рис. 2.8).

Завдання на розв'язування лінійних рівнянь з параметром.

Для розв'язування завдань, де потрібно визначити за якого значення параметра, рівняння має єдиний корінь, не має коренів, коренів безліч, важливо слідувати таким крокам:

1) *Визначити тип лінійного рівняння до якого нам потрібно дійти:*

a) $0x = 0$ (має нескінченно багато розв'язків)

б) $0x = b$ (не має розв'язків)

в) $ax = b$ (має єдиний корінь);

2) *Аналіз рівняння за умовою:*

3) *При необхідності продовжити розв'язок лінійного рівняння, вважаючи параметр за звичайне число*

4) *Перевірка отриманих результатів:*

Рис. 2.8. Загальний алгоритм розв'язування

Приклад розв'язування 1: Знайдіть всі значення a , за яких рівняння

$$(a - 4)(x - 3) = a^2 - 16$$

а) має нескінченно багато розв'язків;

б) не має розв'язків;

в) має єдиний корінь.

Розглянемо табл. 2.10:

Таблиця 2.10

Покрокове розв'язування запропонованого завдання з параметром

$(a - 4)(x - 3) = a^2 - 16$	Визначаємо тип лінійного рівняння, до якого нам потрібно дійти: а) $0x = 0$ б) $0x = b$ в) $ax = b$
$(a - 4)(x - 3) = (a - 4)(a + 4)$	Аналіз рівняння за умовою: а) $a - 4 = 0$ і $(a - 4)(a + 4) = 0$ можливо коли $a = 4$ б) $a - 4 = 0$ і $(a - 4)(a + 4) \neq 0$ не можливо в) $a - 4 \neq 0$, продовжуємо знаходження кореня, поділимо обидві частини рівняння на коефіцієнт біля x ($a - 4$)
$x - 3 = a + 4$	Переносимо ікси вліво, числа вправо, вважаючи параметр за число
$x = a + 4 - 3$	Зводимо подібні доданки
$x = a + 1$	Наш корінь, якщо $a \neq 4$

Відповідь: а) $a = 4$; б) такого випадку не існує; в) $a \neq 4$, $x = a + 1$.

Після цього, так само, як і звичайними рівняннями, надається завдання для самоопрацювання, де відповіді можна перевірити на робочому аркуші. Завдання, які пропонується, взяті з НМТ, тому учневі це хороша підготовка до тесту.

2.3. Методичні рекомендації щодо застосування інтерактивного підручника у шкільній практиці

Упровадження інтерактивного підручника в освітній процес з математики потребує науково обґрунтованих методичних підходів, що забезпечують його ефективне використання як засобу навчання і самостійної пізнавальної діяльності учнів. Особливо це актуально під час вивчення задач з параметром, які традиційно належать до складних і вимагають систематичної роботи, поетапного формування умінь та розвитку дослідницького мислення.

Застосування інтерактивного підручника доцільно організовувати на основі поєднання класичної та змішаної моделей навчання. У межах урочної діяльності підручник може використовуватися як джерело візуалізації теоретичного матеріалу, демонстрації зразків розв'язування та алгоритмів дослідження задач з параметром. Водночас основний потенціал інтерактивного підручника розкривається під час організації самостійної роботи учнів — як на уроці, так і поза ним.

Методично доцільним є використання інтерактивного підручника за принципом «від базового до ускладненого». Учитель рекомендує учням спочатку опрацювати відповідний розділ зі стандартних рівнянь (лінійних або квадратних), актуалізувати базові способи розв'язування, після чого переходити до аналогічних рівнянь з параметром. Така послідовність дозволяє зменшити когнітивне навантаження та забезпечує усвідомлене перенесення знань у нову ситуацію.

Під час організації самостійної роботи з інтерактивним підручником учителю доцільно надавати учням чіткі методичні орієнтири. Зокрема, варто звертати увагу на необхідність дотримання алгоритму дослідження задач з параметром: аналіз умови задачі, визначення ролі параметра, розгляд окремих випадків, перевірка отриманих результатів та формулювання висновків. Інтерактивний підручник у цьому контексті виступає не лише джерелом інформації, а й засобом організації діяльності учня.

Особливе місце у методиці застосування інтерактивного підручника займає система самоконтролю та самооцінювання навчальних досягнень. Рекомендовано інтегрувати в структуру підручника гіперпосилання на інтерактивні робочі аркуші, створені за допомогою платформи LiveWorksheets. Учні виконують завдання для самостійного опрацювання, після чого мають змогу одразу перевірити правильність відповідей, проаналізувати допущені помилки та скоригувати власні дії. Такий підхід сприяє формуванню відповідальності за результат навчання та розвитку навичок саморегуляції.

Методично виправданим є диференційоване використання інтерактивного підручника. Учитель може пропонувати учням завдання різного рівня складності, орієнтуючись на їхні індивідуальні освітні потреби. Для учнів із достатнім і високим рівнем навчальних досягнень інтерактивний підручник може слугувати основою для виконання дослідницьких завдань, узагальнення результатів і формування власних висновків щодо поведінки розв'язків залежно від параметра.

Важливою методичною рекомендацією є використання інтерактивного підручника як інструмента підготовки до підсумкового контролю та зовнішнього оцінювання. Систематичне виконання завдань з параметрами різних типів, узагальнення алгоритмів розв'язування та рефлексія власних помилок дозволяють учням сформувати стійкі навички аналізу задач підвищеної складності.

Крім того, інтерактивний підручник доцільно використовувати як засіб педагогічної підтримки учнів у разі пропусків занять або навчання в умовах дистанційної чи змішаної форми. Завдяки структурованому поданню матеріалу, наявності прикладів розв'язування та інтерактивних завдань учень може самостійно відновити вивчений матеріал без втрати логіки навчального процесу.

Отже, ефективне застосування інтерактивного підручника у шкільній практиці можливе за умови його цілеспрямованого методичного використання, інтеграції в систему навчання та орієнтації на розвиток самостійної пізнавальної діяльності учнів. У процесі вивчення задач з параметром інтерактивний підручник виступає не лише джерелом знань, а й потужним інструментом формування аналітичного мислення, дослідницьких умінь і готовності учнів до подальшого навчання.

Висновки до розділу 2

У другому розділі магістерської роботи було зосереджено увагу на практичній реалізації ідей самостійного навчання учнів шляхом розроблення інтерактивного підручника з розв'язування задач із параметром, що дозволило отримати такі висновки.

Визначено дидактичні та функціональні вимоги до інтерактивного підручника як засобу самостійного навчання учнів. Установлено, що ефективний інтерактивний підручник повинен відповідати принципам науковості, доступності, логічної послідовності та спрямованості на формування предметних і ключових компетентностей. Обґрунтовано необхідність поєднання теоретичного матеріалу з практичною діяльністю, наявності чітких алгоритмів розв'язування задач із параметром, а також реалізації системи самоконтролю й самооцінювання навчальних досягнень учнів. Функціональні вимоги передбачають зручну навігацію, модульну структуру, інтерактивні елементи та доступність підручника для використання на різних цифрових пристроях.

Розроблено структуру інтерактивного підручника з розв'язування задач із параметром та описано технологію його створення з використанням сучасних цифрових інструментів. Запропонована структура підручника базується на поділі навчального матеріалу на теоретичну та практичну частини і побудована за принципом поступового ускладнення: від стандартних рівнянь до рівнянь із параметром відповідного типу.

У процесі розроблення інтерактивного підручника особливу увагу було зосереджено на опрацюванні базових тем шкільного курсу алгебри, які становлять теоретичну основу для формування вмінь розв'язування задач із параметром. Зокрема, у підручнику розглянуто теми лінійні рівняння та лінійні рівняння з параметром, квадратні рівняння та квадратні рівняння з параметром. Така послідовність забезпечує реалізацію принципу наступності навчання, дає змогу учням спочатку узагальнити способи розв'язування стандартних рівнянь, а потім усвідомлено перейти до дослідження залежності кількості та характеру розв'язків від значень параметра.

Практична частина інтерактивного підручника орієнтована на формування в учнів умінь самостійно застосовувати алгоритми дослідження задач із параметром, аналізувати різні випадки залежно від значень параметра та здійснювати самоконтроль результатів. Інтеграція зовнішніх цифрових сервісів, зокрема платформи LiveWorksheets, забезпечує оперативний зворотний зв'язок,

підвищує мотивацію до навчання та сприяє розвитку навичок саморегуляції навчальної діяльності.

Сформульовано методичні рекомендації щодо застосування інтерактивного підручника у шкільній практиці, які передбачають його використання як у межах класно-урочної системи, так і під час організації самостійної роботи учнів. Обґрунтовано доцільність використання інтерактивного підручника для диференційованого навчання, підготовки до НМТ, а також для підтримки учнів в умовах дистанційного та змішаного навчання.

Таким чином, результати другого розділу підтверджують, що розроблений інтерактивний підручник відповідає поставленим дидактичним і функціональним вимогам та є ефективним засобом організації самостійного навчання учнів розв'язування задач із параметром, створюючи підґрунтя для підвищення якості математичної підготовки та розвитку дослідницьких умінь школярів.

ВИСНОВКИ

У ході виконання магістерської роботи було досягнуто поставленої мети та розв'язано всі визначені завдання, що дозволяє сформулювати такі загальні висновки.

У результаті аналізу наукової та науково-методичної літератури з'ясовано, що самостійне навчання є важливою складовою сучасного освітнього процесу з математики та необхідною умовою формування глибоких і стійких знань учнів. Встановлено, що ефективність самостійного навчання значною мірою залежить від використання спеціально організованих засобів, які забезпечують поетапне засвоєння навчального матеріалу, наявність чітких алгоритмів діяльності та можливість самоконтролю результатів навчання.

Дослідження проблеми засвоєння теми «Задачі з параметром» у шкільній практиці та аналіз статистики виконання відповідних завдань на НМТ показали низький рівень сформованості в учнів умінь розв'язувати задачі цього типу. Виявлено відсутність сталої позитивної динаміки результатів, що свідчить про недостатню системність вивчення задач з параметром, обмежений обсяг їх опрацювання в межах чинних навчальних програм та недостатню орієнтацію на самостійне навчання учнів.

Аналіз типів задач із параметром і теоретичних основ їх розв'язування засвідчив, що такі задачі мають виражений дослідницький характер і вимагають від учнів інтеграції знань з різних розділів шкільної математики. Установлено, що найбільш ефективним є поєднання аналітичного та графічного методів розв'язування, а також використання чітких алгоритмів дослідження залежності кількості й характеру розв'язків від значень параметра.

У ході дослідження визначено дидактичні та функціональні вимоги до інтерактивного підручника як засобу самостійного навчання учнів розв'язування задач із параметром. Обґрунтовано доцільність модульної структури, поєднання теоретичного й практичного матеріалу, наявності алгоритмів розв'язування, інтерактивних елементів та засобів самоконтролю, що забезпечують індивідуалізацію навчання та підвищують пізнавальну активність учнів.

Розроблено інтерактивний підручник з розв'язування задач із параметром, який охоплює теми лінійних і квадратних рівнянь та відповідні рівняння з параметром і побудований за принципом поступового ускладнення навчального матеріалу. Використання сучасних цифрових інструментів і інтерактивних робочих аркушів забезпечує можливість самостійного опрацювання матеріалу, оперативного зворотного зв'язку та формування навичок саморегуляції навчальної діяльності учнів.

Таким чином, результати дослідження підтверджують, що інтерактивний підручник є ефективним засобом організації самостійного навчання учнів розв'язування задач із параметром, сприяє підвищенню якості математичної підготовки, розвитку дослідницьких умінь і формуванню готовності учнів до виконання завдань підвищеного рівня складності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Desmos : графічний онлайн-калькулятор. URL: <https://www.desmos.com> (дата звернення: 01.12.2025).
2. GeoGebra : освітня платформа. URL: <https://www.geogebra.org> (дата звернення: 01.12.2025).
3. Liveworksheets : освітня платформа. URL: <https://www.liveworksheets.com> (дата звернення: 01.12.2025).
4. Smetanyuk L. Graphic method of decision of tasks with parameters. *Journal of Information Technologies in Education*. 2010. No. 6. P. 169–177. DOI: <https://doi.org/10.14308/ite000164>.
5. Беседін Б. Б., Кадубовський О. А. Про алгоритмічний підхід до розв'язання рівнянь та нерівностей другого степеня з параметром. *Фізико-математична освіта*. 2018. Вип. 2(16). С. 18–22.
6. Білорус Т. В. Уміння учнів старшої школи розв'язувати завдання з параметрами. *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики : тези доп.* Київ, 2021. С. 8–9.
7. Буза О. В., Чепок О. О. Методичні особливості підготовки до розв'язування задач з параметрами під час підготовки до НМТ з математики. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. 2025. Вип. 103. DOI: <https://doi.org/10.31392/UDU-nc.series5.2025.103.04>.
8. Вакалюк Т. А. Активізація логічного мислення старшокласників при розв'язуванні задач з параметром. *Наукові записки ТНПУ ім. В. Гнатюка. Серія: Педагогіка*. 2011. № 3. С. 58–64.
9. Віра М., Самусенко П. Застосування програмного засобу GeoGebra до розв'язування алгебраїчних задач з параметром. *Фізико-математична освіта*. 2023. Т. 38, № 1. С. 7–13. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-1-001.
10. Воронова Н. Цифрові освітні ресурси в теорії і практиці сучасної зарубіжної освіти. *Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти*. 2019. № 9. С. 37–47.

11. Всеосвіта : освітній портал. URL: <https://vseosvita.ua> (дата звернення: 01.12.2025).
12. Грищенко Г. О. Особливості використання відкритих задач з параметрами під час навчання алгебри і початків аналізу. Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики : тези доп. наук. конф. Київ, 2021. С. 55–56.
13. Довга Т. Я., Нікітіна О. О. Загальнонавчальні уміння і навички: теорія та практика формування в учнів початкової школи : метод. посіб. Київ : Сітіпрінт, 2013. 96 с.
14. Дорош Д. В. Задачі з параметрами як засіб формування дослідницьких умінь учнів. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів : матеріали Всеукр. наук.-метод. конф. (Суми, 2011). Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2011. С. 45–47.
15. Заріцька Я., Прус А. В. Розв'язування задач з параметрами як засіб розвитку математичного мислення учнів основної школи. Науковий пошук молодих дослідників. Житомир : ЖДУ ім. І. Франка, 2013. Вип. 6. С. 188–191.
16. Зіновєєв І. В., Манько Н. І. Розробка методичної стратегії з використанням GeoGebra, адаптованої до специфіки ЗНО/НМТ. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16932681>.
17. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 7 класу закл. загал. серед. освіти. Київ : Генеза, 2024. 288 с.
18. Коструб Ю. М. Методичні особливості розв'язування рівнянь з параметрами. Наукові записки молодих учених. 2019. № 3. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1601> (дата звернення: 01.12.2025).
19. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 7 класу закл. загал. серед. освіти. Тернопіль : Підручники і посібники, 2024. 256 с.
20. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 8 класу. Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. 256 с.

21. Куруц Я. В. Методи та засоби розв'язання алгебраїчних рівнянь з параметрами : магіст. робота. Ужгород, 2024. 61 с.
22. Левицький Я. В. Складання задач з параметром з використанням графічного калькулятора Desmos. Наукові записки молодих учених. 2021. № 8. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1902> (дата звернення: 19.12.2025).
23. Мулеса О. Ю., Гече Ф. Е., Кіндюх Т. С. Теоретичні основи розв'язування алгебраїчних рівнянь з параметрами. Фізико-математична освіта. 2019. Вип. 1(19). С. 148–153.
24. Орос В. М., Петечук Ю. В. Самостійна діяльність учнів при вивченні математики. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Педагогіка. Соціальна робота»*. 2022. Вип. 2 (51). С. 94–97. DOI: 10.24144/2524-0609.2022.51.94-97.
25. Прус А. В. Задачі з параметрами як засіб формування фахової компетентності майбутнього вчителя математики. Науковий пошук молодих дослідників. Житомир : ЖДУ ім. І. Франка, 2013. Вип. 6. С. 248–251.
26. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики : навч.-метод. посіб. Житомир : Рута, 2016. 468 с.
27. Савченко О. Я. Дидактика початкової освіти : підручник. Київ : Грамота, 2012. 504 с.
28. Теслюк О. Я. Самоорганізація навчальної діяльності учнів початкової школи в контексті НУШ. Професійна компетентність учителя Нової української школи: формування, розвиток та удосконалення : матеріали Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. (Тернопіль, 22 трав. 2020 р.). Тернопіль : ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2020. С. 75–77.
29. Теслюк О. Я. Самоорганізація навчальної діяльності учнів початкової школи як педагогічна проблема. *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: педагогіка і психологія*. 2020. Вип. 63. С. 37–44. DOI: 10.31652/2415-7872-2020-63-37-44.

30. Український центр оцінювання якості освіти. Про результати національного мультипредметного тесту у 2023 році : офіційний звіт. Том 2. Київ, 2024. URL: <https://testportal.gov.ua> (дата звернення: 01.10.2025).

31. Український центр оцінювання якості освіти. Про результати національного мультипредметного тесту у 2024 році : офіційний звіт. Том 2. Київ, 2024. URL: <https://testportal.gov.ua> (дата звернення: 01.10.2025).

32. Український центр оцінювання якості освіти. Про результати національного мультипредметного тесту у 2025 році : офіційний звіт. Том 2. Київ, 2025. URL: <https://testportal.gov.ua> (дата звернення: 01.10.2025).

33. Федоренко В. П. Самостійна робота учнів як спосіб адаптації до професійної діяльності в сучасному світі. Томаківка, 2013. — Методична розробка.

34. Філон Л. Г., Грищенко Г. О. Графічний метод та його роль у навчанні учнів. ІТМплюс–2018 : матеріали Міжнар. наук.-метод. конф. Суми, 2018. С. 24–25.

35. Харипончук К., Чемерис О. Використання програми динамічної математики GeoGebra під час розв'язування задач з параметрами. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/42389/1/75.pdf> (дата звернення: 01.12.2025).

36. Чернецька А. М. Організація навчальної діяльності учнів при знайомстві з параметром. Наукові записки молодих учених. 2021. № 8. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1911> (дата звернення: 01.12.2025).

ДОДАТКИ

Додаток А

Завдання на розв'язування лінійних рівнянь

Лінійні рівняння з однією змінною – це рівняння виду $ax = b$, де x – змінна, а a і b – деякі числа.

Загальний розгляд лінійного рівняння

Рівняння	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів не має $x = \emptyset$
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів) $x \in \mathbb{R}$

Розв'язуючи рівняння, які зводяться до лінійних, варто дотримуватися таких кроків:

1. Якщо в рівнянні є вирази з дробовими коефіцієнтами, то помножити обидві його частини на найменший спільний знаменник дробів.
2. Розкрити дужки (якщо вони є).
3. Перенести доданки, які містять змінну, в одну частину рівняння (як правило, у ліву), а доданки, які не містять змінної, — у другу частину (у праву).
4. Звести подібні доданки.
5. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт при змінній, якщо він відмінний від нуля. Якщо ж він дорівнює 0, то рівняння або не має коренів, або його коренем є будь-яке число.

Приклад розв'язування 1: Розв'яжіть рівняння:

- c) $7x + 32 = 12x + 27$;
 d) $5,4y + 1,5 = -1 + 5,4y$.
 a) $7x + 32 = 12x + 27$

$7x + 32 = 12x + 27$	<i>Переносимо ікси вліво, числа вправо</i>
$7x - 12x = 27 - 32$	<i>Зводимо подібні доданки</i>
$-5x = -5 \quad :(-5)$	<i>Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній</i>
$x = 1$	<i>Наш корінь</i>

Відповідь: 1.

- b) $5,4y + 1,5 = -1 + 5,4y$

$5,4y + 1,5 = -1 + 5,4y$	Переносимо ікси вліво, числа вправо
$5,4y - 5,4y = -1 - 1,5$	Зводимо подібні доданки
$0y = -2,5$	Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній
$y = \emptyset$	Наш корінь

Відповідь: $y = \emptyset$.

Приклад розв'язування 2: Розв'яжіть рівняння:

с) $2(x + 5) = 2(x - 4)$;

d) $(x + 2)(x - 1) = x(x + 3)$.

a) $2(x + 5) = 2(x - 4)$

$2(x + 5) = 2(x - 4)$	Розкриваємо дужки
$2x + 10 = 2x - 8$	Переносимо ікси вліво, числа вправо
$2x - 2x = -8 - 10$	Зводимо подібні доданки
$0 = -18$	Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній
$0 = -18$	Наш корінь

Відповідь: 22.

b) $(x + 2)(x - 1) = x(x + 3)$

$(x + 2)(x - 1) = x(x + 3)$	Розкриваємо дужки
$x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + 3x$	Переносимо ікси вліво, числа вправо
$x^2 - x^2 - x + 2x - 3x = 2$	Зводимо подібні доданки
$-2x = 2 \mid :(-2)$	Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній
$x = -1$	Наш корінь

Відповідь: -1.

Приклад розв'язування 3: Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15}$$

$\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15} \mid \cdot 15$	Множимо на НСД знаменників
$3(x-1) + 5(x-2) = 15 \cdot 2 - (x-2)$	Розкриваємо дужки
$3x - 3 + 5x - 10 = 30 - x + 2$	Переносимо ікси вліво, числа вправо
$3x + 5x + x = 30 + 2 + 3 + 10$	Зводимо подібні доданки
$9x = 45 \mid :9$	Ділимо обидві частини на коефіцієнт при змінній
$x = 5$	Наш корінь

Відповідь: 5.

Завдання для самоопрацювання:**Завдання 1.** Скільки коренів має рівняння:

a) $6x = 42$;

b) $4x = -12$;

c) $0y = -5$;

d) $-5x = -25$;

e) $0x = 0$;

f) $-2x = 0$.

Завдання 2. Розв'яжіть рівняння:

a) $28x = 420$;

b) $-0,04z = 1,4$;

c) $\frac{4}{15}x = \frac{2}{5}$;

d) $5x - 3 = 17$;

e) $4 - 3y = 2y + 22$;

f) $-1, m - 2 = m - 0,9$;

g) $8x - 7 = 3(x - 4)$;

h) $x(x + 4) - x^2 = -8$;

i) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 2x$;

j) $2(x - 11) - 5(7 - 2x) = -3$;

k) $0,5x = 0,4(2x - 5) + 1,7$;

l) $2(5x - 8(x - 1)) = 8(x + 9)$;

m) $(x + 2)^2 = (x - 4)(x + 4)$;

n) $\frac{x-1}{16} = \frac{2x+1}{8}$;

o) $\frac{7}{12} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$;

p) $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{6}$



Завдання на розв'язування лінійних рівнянь з параметром.

Для розв'язування завдань, де потрібно визначити за якого значення параметра, рівняння має єдиний корінь, не має коренів, коренів безліч, важливо слідувати таким крокам:

1) *Визначити тип лінійного рівняння до якого нам потрібно дійти:*

а) $0x = 0$ (має нескінченно багато розв'язків)

б) $0x = b$ (не має розв'язків)

в) $ax = b$ (має єдиний корінь);

2) *Аналіз рівняння за умовою:*

3) *При необхідності продовжити розв'язок лінійного рівняння, вважаючи параметр за звичайне число*

4) *Перевірка отриманих результатів:*

Приклад розв'язування 1: Знайдіть всі значення a , за яких рівняння

$$(a - 4)(x - 3) = a^2 - 16:$$

а) має нескінченно багато розв'язків;

б) не має розв'язків;

в) має єдиний корінь.

$(a - 4)(x - 3) = a^2 - 16$	Визначаємо тип лінійного рівняння, до якого нам потрібно дійти: а) $0x = 0$ б) $0x = b$ в) $ax = b$
$(a - 4)(x - 3) = (a - 4)(a + 4)$	Аналіз рівняння за умовою: а) $a - 4 = 0$ і $(a - 4)(a + 4) = 0$ можливо коли $a = 4$ б) $a - 4 = 0$ і $(a - 4)(a + 4) \neq 0$ не можливо в) $a - 4 \neq 0$, продовжуємо знаходження кореня, поділимо обидві частини рівняння на коефіцієнт біля x ($a - 4$)
$x - 3 = a + 4$	Переносимо змінні вліво, числа вправо, вважаючи параметр за число
$x = a + 4 - 3$	Зводимо подібні доданки
$x = a + 1$	Наш корінь, якщо $a \neq 4$

Відповідь: а) $a = 4$; б) такого випадку не існує; в) $a \neq 4$, $x = a + 1$.

Завдання для самоопрацювання:

1. Знайдіть усі значення a , для яких будь-яке число є коренем рівняння:
 - a) $(a - 3)x = a^2 - 9$;
 - b) $(a^2 - 9)x = a + 3$;
 - c) $(a - 1)x = 1 - a$;
 - d) $a(a + 2)x = (a + 2)$;
 - e) $(a - 3)x = 5$.
2. Знайдіть усі значення a , для яких не має коренів рівняння:
 - a) $(2a + 5)x = -2$;
 - b) $(a^2 - 1)x = a + 1$;
 - c) $(a - 1)x = 5$;
 - d) $(a + 3)x = a - 2$;
 - e) $(a - 4)x = a - 5$;
 - f) $\frac{2ax - a}{5} = x + 2$;
 - g) $ax + 6 = a - 3x$.
3. Знайдіть усі значення a , для яких рівняння $ax + 3 = 5x - a$ має єдиний корінь.
4. Знайдіть всі значення a , за яких рівняння

$$(a - 2)(x - 3) = a^2 - 4:$$
 - a) має нескінченно багато розв'язків;
 - б) не має розв'язків;
 - в) має єдиний корінь.



Завдання на розв'язування квадратних рівнянь.

Повне квадратне рівняння – це рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Неповне квадратне рівняння - це рівняння виду $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = 0$.

Загальний розгляд неповного квадратного рівняння.

Вид неповного квадратного рівняння	Корені рівняння
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 + c = 0$	1) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ якщо $\frac{-c}{a} > 0$ 2) Не має коренів, якщо $\frac{-c}{a} < 0$
$ax^2 = 0$	$x_{1,2} = 0$

Загальний розгляд квадратного рівняння

Квадратне рівняння	Дискримінант $D = b^2 - 4ac$	Корені рівняння
$ax^2 + bx + c = 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
	$D = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
	$D < 0$	Коренів не має

Теорема Вієта: якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ і } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Т. Вієта краще застосовувати до зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.
Тоді систему коренів можна записати наступним чином:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ і } x_1 \cdot x_2 = q$$

Корені знаходимо шляхом добору.

Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь:

1. Звести, за необхідності, квадратне рівняння до стандартного вигляду;
2. Визначити тип квадратного рівняння і на основі цього, шукаємо корені;
3. Якщо квадратне рівняння є повним, то визначаємо яким методом будемо розв'язувати рівняння (за допомогою т. Вієта чи дискримінанта);
4. Якщо обрали дискримінант, обчислити його, якщо т. Вієта, записати систему;
5. Якщо обрали дискримінант, проаналізувати D , якщо $D \geq 0$, то знаходимо корені рівняння, якщо $D < 0$, то коренів не має. якщо т. Вієта, добираємо корині;
6. Записуємо відповідь, якщо коренів декілька, записуємо в зростанні.

Приклад 1 Розв'язати рівняння $4x^2 + 8x = 0$.

$4x^2 + 8x = 0$	<i>Не повне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$, знаходимо корені</i>
$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{4}$	<i>Скорочуємо</i>
$x_1 = 0, x_2 = -2$	<i>Наші корені</i>

Відповідь: -2; 0.

Приклад 2 Розв'язати рівняння $(3x - 5)(3x + 5) = 6x^2 - 25 + 15x$.

$(3x - 5)(3x + 5) = 6x^2 - 25 + 15x$	<i>Зводимо до стандартного вигляду</i>
$9x^2 - 25 - 6x^2 + 25 - 15x = 0$	<i>Зводимо подібні доданки</i>
$3x^2 - 15x = 0$	<i>Не повне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$, знаходимо корені</i>
$x_1 = 0, x_2 = \frac{15}{3}$	<i>Скорочуємо</i>
$x_1 = 0, x_2 = 5$	<i>Наші корені</i>

Відповідь: 0; 5.

Приклад 3 Розв'язати рівняння $x^2 + 7x + 10 = 0$.

$x^2 + 7x + 10 = 0;$	<i>Повне квадратне рівняння, до того ж зведене, обчислюємо дискримінант</i>
$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9;$	<i>$D > 0$, отже корені існують. а) розв'язуємо за дискримінантом; б) розв'язуємо за т. Вієта</i>

$a) x_1 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2} = -5;$ $x_2 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2} = -2;$ $b) \begin{cases} x_1 + x_2 = -7; \\ x_1 \cdot x_2 = 10. \end{cases}$	$a) \text{ Виконуємо обчислення}$ $b) \text{ добираємо корені}$
$x_1 = -5, x_2 = -2.$	<i>Наші корені</i>

Відповідь: -5; -2.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $(2x + 3)^2 + 2x^2 = -12x - (x - 2)^2$.

$(2x + 3)^2 + 2x^2 = -12x - (x - 2)^2;$	<i>Зводимо до стандартного вигляду</i>
$4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 = -12x - x^2 + 4x - 4;$ $4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 + 12x + x^2 - 4x + 4 = 0;$ $7x^2 + 20x + 13 = 0;$	<i>Повне квадратне рівняння, не зведене, шукаємо дискримінант</i>
$D = 20^2 - 4 \cdot 7 \cdot 13 = 400 - 364 = 36;$	<i>$D > 0$, отже корені існують, розв'язуємо за дискримінантом</i>
$x_1 = \frac{-20-\sqrt{36}}{2 \cdot 7} = \frac{-20-6}{14} = -\frac{26}{14} = -\frac{13}{7},$ $x_2 = \frac{-20+\sqrt{36}}{2 \cdot 7} = \frac{-20+6}{14} = -\frac{14}{14} = -1;$	<i>Обчислюємо</i>
$x_1 = -\frac{13}{7}, x_2 = -1.$	<i>Наші корені</i>

Відповідь: $-\frac{13}{7}$; -1.

Завдання на самоопрацювання

Завдання 1. Яке з рівнянь є квадратним рівнянням?

a) $7x^2 - x - 3 = 0$;

d) $-x^2 + 2 = 0$;

b) $\frac{1}{x^2} + 2x - 3 = 0$;

e) $-6y^2 - 24y = 0$;

c) $9x^2 = 0$;

f) $4x + 5^2 = 0$.

Завдання 2. Яке з рівнянь є неповним квадратним рівнянням? Зведеним квадратним рівнянням?

a) $x^2 + \sqrt{3}x = 0$;

d) $x^2 + 7x + 1 = 0$;

b) $x^2 + 5x - 2 = 0$;

e) $-x^2 - 2x = 0$;

c) $7x^2 + 1,8 = 0$;

f) $x^2 = 0$.

Завдання 3. Розв'яжіть рівняння:

a) $x^2 - 36 = 0$;

k) $x^2 + 4x - 12 = 0$;

b) $2x^2 - 4 = 0$;

l) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

c) $x^2 + 49 = 0$;

m) $x^2 - 5x + 4 = 0$;

d) $7 - 2x^2 = 7 + 0,5x^2$;

n) $x^2 - 2x - 3 = 0$;

e) $2x^2 - 3x = 2x$;

o) $x^2 - 10x + 21 = 0$;

f) $2x(x - 3) = x^2$;

p) $7x^2 - 18x + 8 = 0$;

g) $2x^2 - (5x - 1) = 17 - 5x$;

q) $3x^2 + 53x - 18 = 0$;

h) $6x^2 + 9 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$;

r) $(x - 1)^2 + 4x^2 = 4$;

i) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 3x^2 - 9$;

s) $5x^2 - \frac{1}{5}x = 0,1 - \frac{1}{2}x + 4x^2$.

j) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

Завдання 4. Знайдіть найменший корінь рівняння $(x^2 + 5x)(x^2 - 36) = 0$.



Завдання на самоопрацювання:**Завдання 1.** Для яких значень a число 2 є коренем рівняння?

- 1) $a^2x^2 - 7x + 2a = 14 = 0$.
- 2) $3x^2 + (a^2 - 1)x - 18 = 0$.

Завдання 2. Для яких значень a рівняння має один корінь?

- 1) $2x^2 - (a^2 - 3a)x = 0$.
- 2) $ax^2 + a^2 - 2 = 0$.

Завдання 3. Число -9 є коренем рівняння $x^2 + 10x + q = 0$. Знайдіть інший корінь рівняння і коефіцієнт q .**Завдання 4.** Знайдіть значення a , для яких рівняння $x^2 + 7x + 3a - 7 = 0$ а) має два різні корені; б) не має коренів.**Завдання 5.** Знайдіть значення b , для яких один з коренів рівняння дорівнює -3:

- 1) $20x^2 + bx - b^2 = 0$.
- 2) $\frac{b^2x^2}{49} - \frac{5}{7}bx - 14 = 0$.

Завдання 6. Для яких значень a рівняння має один корінь?

- 1) $x^2 - 16x + 4a = 0$.
- 2) $ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$.

Завдання 7. Для яких значень a добуток коренів рівняння $x^2 + 8x + 4a + 7 = 0$ дорівнює: а) 15; б) 19; в) 2?**Завдання 8.** Рівняння $x^2 + ax + 8 = 0$ має додатні корені, один з яких у 4 рази більший від іншого. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт a .**Завдання 9.** Один з коренів рівняння $x^2 + ax - 33 = 0$ більший від іншого на 14. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт a .**Завдання 10.** Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 - 10x + a = 0$ задовольняють умову $x_1 - 3x_2 = 2$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт a .