

Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача

## **СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ – 2023**

до 95-річчя від дня народження академіка НАН України  
Ярослава Степановича Підстригача,  
45-річчя створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і  
математики НАН України та  
70-річчя утворення механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету імені Івана Франка

Збірник наукових праць

*За загальною редакцією  
академіка НАН України Р.М. Кушніра  
та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха*

Львів – 2023

УДК 539.3; 510(061)

**Сучасні проблеми механіки та математики – 2023:** збірник наукових праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – 454 с. – Режим доступу: <http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/proceedings.mpmm2023.pdf>

Збірник наукових праць містить матеріали доповідей, виголошених на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (23–25 травня 2023 р., м. Львів), присвяченій 95-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача, 45-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України та 70-річчю утворення механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Праці стосуються, в основному, таких актуальних проблем механіки і математики: математичне моделювання в механіці деформованих твердих тіл, механіка неоднорідних та низьковимірних структур, механіка контактної взаємодії, тіл з тріщинами та тонкими включеннями, динаміка неоднорідних середовищ, оптимізація та проектування елементів конструкцій і біомеханічних систем, міцність і втома матеріалів, математичні методи в прикладних дослідженнях, теорія функцій і функціональний аналіз, диференціальні рівняння і математична фізика, алгебра, геометрія і топологія, математичне моделювання та інформаційні технології вирішення важливих для оборони і безпеки держави завдань, включаючи кібербезпеку, сучасні методи навчання в галузі прикладної математики і механіки.

Збірник буде корисним для науковців, докторантів, аспірантів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

**Редактори:** академік НАН України *Р.М. Кушнір*,  
член-кореспондент НАН України *В.О. Пелих*

**Заступники редакторів:** д.ф.-м.н. *О.Р. Гачкевич*,  
д.ф.-м.н. *Ю.В. Токовий*

**Відповідальні секретарі:** к.ф.-м.н. *Р.О. Івасько*,  
к.ф.-м.н. *А.М. Кузь*

**Члени редакційної колегії:** д.т.н. *М.І. Андрійчук*, д.ф.-м.н. *М.В. Демидюк*, д.ф.-м.н. *Я.І. Кунець*, д.ф.-м.н. *Х.І. Кучмінська*, д.ф.-м.н. *М.В. Марчук*, д.ф.-м.н. *В.В. Матус*, д.ф.-м.н. *В.В. Михаськів*, д.ф.-м.н. *Я.М. Пастернак*, д.ф.-м.н. *В.М. Петричковиц*, д.ф.-м.н. *Д.І. Попович*, д.ф.-м.н. *Б.В. Процюк*, д.т.н. *Я.Д. П'янило*, к.ф.-м.н. *М.М. Симолюк*, д.ф.-м.н. *В.З. Станкевич*, д.ф.-м.н. *Г.Т. Сулим*, д.ф.-м.н. *Р.Ф. Терлецький*, д.ф.-м.н. *Є.Я. Чапля*, к.ф.-м.н. *І.В. Чернега*, д.ф.-м.н. *І.П. Шацький*, д.ф.-м.н. *В.А. Шевчук*, д.ф.-м.н. *В.П. Щедрик*, д.ф.-м.н. *М.С. Яджак*.

**Рецензенти:** чл.-кор. НАН України, д.т.н. *І.М. Дмитрах*,  
д.ф.-м.н., проф. *П.І. Каленюк*

#### Ухвалено до друку

Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (протокол № 5 від 2.05.2023)

National Academy of Sciences of Ukraine  
Pidstryhach Institute for Applied Problems  
of Mechanics and Mathematics

## **CURRENT PROBLEMS OF MECHANICS AND MATHEMATICS – 2023**

to the 95<sup>th</sup> Birth Anniversary of Yaroslav Pidstryhach  
(Academician of the Academy of Sciences of Ukraine),  
the 45<sup>th</sup> Anniversary of the Pidstryhach Institute for Applied Problems of  
Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, and  
the 70<sup>th</sup> Anniversary of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the  
Ivan Franko National University of Lviv

Collection of scientific papers

*Edited by*

*Roman M. Kushnir (Academician of NAS of Ukraine)  
and Volodymyr O. Pelykh (Corresponding Member of NAS of Ukraine)*

Lviv – 2023

<b>Марія Сердюк</b> Радіальні розв’язки псевдо-диференціальних рівнянь $p$ -адичного аргументу зі слабким виродженням .....	345
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_13.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_13.pdf</a>	
<b>Ольга Возняк, Віталій Дронт, Ігор Мединський</b> Коректна розв’язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині .....	347
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_14.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_14.pdf</a>	
<b>Ігор Мединський, Галина Пасічник</b> Про властивості об’ємного потенціалу для одного параболического рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів .....	349
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_15.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_15.pdf</a>	
<b>Іванна Бондар</b> Умови керування для не завжди розв’язних імпульсних систем інтегро-диференціальних рівнянь .....	351
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_16.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_16.pdf</a>	
<b>Іван Буртняк, Ганна Малицька</b> Вироджені параболическі рівняння типу дифузії з інерцією .....	353
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_17.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_17.pdf</a>	
<b>Геннадій Грабчак</b> Асимптотика спектра власних коливань струнної сітки з жорсткими, але легкими компонентами .....	355
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_20.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_20.pdf</a>	
<b>Надія Гузик, Оксана Бродяк</b> Задача Стефана для параболического рівняння зі слабким виродженням .....	357
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_21.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_21.pdf</a>	
<b>Іван Пукальський, Богдан Яшан</b> Оптимальне керування в задачі Діріхле для еліптичних рівнянь з виродженням .....	359
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_22.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_22.pdf</a>	
<b>Оксана Гентош, Анатолій Прикарпатський</b> Рациональна факторизація потоків типу Лакса на спряженому просторі до алгебри Лі дробових інтегро-диференціальних операторів .....	361
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_23.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_23.pdf</a>	
<b>Оксана Сатур</b> Динаміка конфліктної взаємодії в термінах мінімальних гравців .	363
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_24.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_24.pdf</a>	
<b>Oleksandr Hnatiuk, Volodymyr Kyrylych, Olha Milchenko</b> Optimal control of a hyperbolic system of countable semilinear equations .....	365
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_25.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_25.pdf</a>	
<b>Галина Івасюк, Наталія Процах, Тоня Фрагавчан</b> Про прями та обернені задачі для рівнянь типу Ейделмана .....	367
<a href="http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_27.pdf">http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_27.pdf</a>	

УДК 517.9

## УМОВИ КЕРУВАННЯ ДЛЯ НЕЗАВЖДИ РОЗВ'ЯЗНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Іванна Бондар

*Інститут математики НАН України*

bondar.i@imath.kiev.ua

Досліджено розв'язність імпульсних систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Припускається, що імпульсна система не має розв'язку при довільних неоднорідностях. Для того, щоб звести її до розв'язної, введено функцію керування та встановлено критерій розв'язності й побудовано загальний його вигляд. Метод дослідження поставленої таким чином задачі використовує теорію псевдообернених (за Муром Пенроузом) матриць та ортопроекторів [1,2]. Розглянемо неоднорідну імпульсну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = f(t) + \int_a^b K(t,s)dsu, \quad t \in [a,b], \quad (1)$$

$$\Delta E_i x \Big|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}, \quad (i = 1, \dots, p, \quad \tau_i \in (a, b)). \quad (2)$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у класі вектор-функцій  $x(t)$  таких, що  $x(t) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ ,  $\dot{x}(t) \in L_2[a,b]$ ,  $t \in [a,b]$ ,  $\tau_i \in (a,b)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Тут  $D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$  – простір функцій  $x : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , які допускають розрив І-го роду у точках  $\tau_1, \dots, \tau_p \in (a,b)$  і абсолютно неперервні на кожному із проміжків  $[a, \tau_1)$ ,  $[\tau_1, \tau_2)$ ,  $\dots$ ,  $[\tau_p, b]$ . Припускається, що  $A(t), B(t) - m \times n$ ,  $\Phi(t) - n \times m$ ,  $f(t) - n \times 1$  вимірні матриці, компоненти яких належать простору  $L_2[a,b]$ ; вектор-стовпчики матриці  $\Phi(t) -$  лінійно незалежні на  $[a,b]$ ;  $E_i, S_i - k_i \times n$  вимірні матриці,  $\gamma_i - k_i$ -вимірний вектор-стовпчик констант;  $\text{rank}(E_i + S_i) = k_i < n$ , тобто розв'язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву:  $\Delta E_i x \Big|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0))$ . Припускаємо, що імпульсна система (1), (2) є нерозв'язна при  $u = 0$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  та довільних неоднорідностей  $f(t) \in L_2[a,b]$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ . Для встановлення умов існування розв'язку імпульсної системи зведемо імпульсну умову до вигляду крайової умови,

використовуючи техніку запропоновану у [1]. Справедливим є наступне твердження.

**Теорема 1.** *Імпульсна система інтегро-диференціальних рівнянь (1), (2), яка при  $u = 0$  та при довільних  $\forall f(t) \in L_2[a, b]$  є нерозв'язною, буде мати розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова*

$$P_{U^*} P_{D_{d_1}^*} = 0. \quad (3)$$

При цьому величину керування  $u$  необхідно вибрати наступним чином:

$$u = U^+ P_{D_{d_1}^*} \tilde{b} + P_U c, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Тут  $U := P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[ A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s, \tau) d\tau \right] ds$  —  $n$  — вимірна матриця,  $U^+$  — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до  $S$  —  $n \times d_1$ -вимірна матриця,  $P_{U^*}$ ,  $P_U$  —  $d_1 \times d_1$  та  $n \times n$ -вимірні матриця (ортопроектор), відповідно.

**Зауваження.** При умові (3) керування  $u \in \mathbb{R}^n$  може бути не єдиним, бо залежить від довільної сталої  $P_U c \in \mathbb{R}^n$ . Це дозволяє використати дане керування для дослідження задач, які часто зустрічаються у теорії оптимального керування.

*Публікація містить результати досліджень проекту № 2020.02/0089 у 2023 році за рахунок грантової підтримки Національного фонду досліджень України.*

1. Бойчук О.А., Головацька І.А. Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 4. — С. 460 — 474.
2. Бондар І.А. Умови керування для незавжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них // Буковинський математичний журнал. — 2016. — **4**, № 1–2. — С. 13–17.

## CONTROL CONDITIONS FOR NOT ALWAYS SOLVABLE IMPULSE SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

*The solvability of impulse systems of integro-differential equations with a degenerate kernel is investigated. It is assumed that the impulse system does not have a solution for arbitrary inhomogeneities. In order to reduce it to solvable, a control function was introduced, a solvability criterion was established, and its general form was constructed. The fact that the control may not be unique allows us to use it to study problems that are often encountered in the theory of optimal control. The general method of studying the problem posed in this way uses the theory of pseudo-inverse (by Moore-Penrose) matrices and ortho projectors.*