

Вибрані питання комп'ютерного моделювання процесів і явищ

Колективна монографія

За редакцією Н. Р. Балик



Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2022

УДК 004.942
В41

Рецензенти: *М. М. Касянчук* — доктор технічних наук, професор кафедри кібербезпеки Західноукраїнського національного університету
К. В. Зеленський — доктор економічних наук, директор ВСП «Гусятинський фаховий коледж ТНТУ імені Івана Пулюя
І. М. Цідило — доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Дизайнер обкладинки *Віталій Нехай*

В41 Вибрані питання комп'ютерного моделювання процесів і явищ
// за ред. Н. Р. Балик. — Тернопіль: Підручники і посібники,
2022. — 272 с.

У монографії розглянуто окремі питання математичного моделювання та застосування цифрових інструментів до дослідження математичних, фізичних, економічних, екологічних процесів.

Монографія буде корисною для науковців, викладачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів.

УДК 004.942

Збережено авторську орфографію, пунктуацію і стилістику.
Відповідальність за зміст матеріалів несуть автори.

© Авторські тексти, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ...	7
Математичне моделювання, його особливості та етапи	8
Математичне моделювання задач	12
Класифікація задач математичного програмування	14
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛ ЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ	18
Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту	18
Моделювання явищ і процесів в наближенні суцільного середовища	23
Розподіл електростатичного поля	24
Комп'ютерна наукова графіка	27
Практикум фізичних ситуацій	32
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ	37
Застосування інформаційних технологій при вивченні математики	37
Загальна характеристика комп'ютерних програм по лінії застосування при вивченні курсу математики	37
Дослідження тем алгебри і початків аналізу, геометрії на необхідність застосування інформаційних технологій	40
Використання програмних засобів при вивченні математики	42
Робота з програмою Advanced Grapher 2	46
Використання презентацій на уроках математики	61
Моделювання в алгебрі	66
Моделювання в геометрії	69
РОЗДІЛ 4. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ	74
Моделі внутрішньовидової конкуренції	75
Логістична модель міжвидової конкуренції	82
Динаміка чисельності популяцій хижака жертви	85
Імітаційне моделювання динаміки популяцій	87
Огляд моделей прогнозування	91
Моделювання біологічних процесів	100
РОЗДІЛ 5. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	116
Загальна економіко-математична модель задач лінійного програмування	116
Математичне моделювання задач про оптимальні: використання ресу- рсів, раціон, розріз матеріалів	117
Стандартні форми задач лінійного програмування	121
Постановка задач лінійного програмування. Побудова математичної моделі	123
Перша і друга стандартні форми задач лінійного програмування	130
Завдання для самостійної роботи	133
Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування	134

Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування	134
Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування	136
Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування та його застосування.....	146
Поняття про симплексний метод та канонічну форму.....	146
Основні характеристики симплексного методу.....	148
Робота із симплекс-таблицями	149
Поняття про метод штучного базису	151
Поняття про взаємнодвоїсті задачі	156
Загальні правила складання двоїстих задач	157
Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач	159
Задачі з мішаними обмеженнями	159
Стійкість симплексного методу. Виродженність та зациклювання	162
Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування	167
РОЗДІЛ 6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.....	175
Постановка транспортної задачі	175
Методи побудови першого опорного плану транспортної задачі	177
Транспортна задача з неправильним балансом.....	179
Критерій оптимальності опорного розв'язку транспортної задачі методом потенціалів	181
Перехід між опорними планами за циклом перерахунку	183
Транспортна задача (практикум).....	185
Розв'язування транспортних задач засобами MS Excel	196
РОЗДІЛ 7. ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	200
Нерівність Гоморрі.....	200
Метод Гоморрі розв'язування задач цілочисельного програмування	201
Геометричне трактування методу Гоморрі	206
Цілочисельне програмування (практикум)	206
РОЗДІЛ 8. ІНФОРМАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ГРАФІВ.....	210
Засоби представлення графів. Зважені графи та мережі	213
Потоки на мережах. Поняття розрізу.....	216
Дерево як вид графу	216
РОЗДІЛ 9. ІМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	220
Метод статистичних випробувань	220
Генератори випадкових чисел	226
Перевірка послідовностей випадкових чисел	234
Моделювання випадкових подій та дискретних величин	235
Моделювання неперервних випадкових величин.....	242
Моделювання випадкових векторів	266
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	270
АВТОРИ МОНОГРАФІЇ.....	271

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку суспільства наука і техніка розробили технології дуже високого рівня, які вимагають від спеціалістів переважної більшості професій мати високий рівень математичної підготовки, володіти різноманітними математичними методами, бути здатними до аналізу великих обсягів інформації для успішного прийняття рішень і прогнозування, прийняття управлінських рішень, що приводить до необхідності побудови математичних моделей різної складності. Саме завдяки використанню математичного апарату зроблено багато відкриттів у фізиці, хімії, біології, інформатиці, економіці, соціології та інших науках і сферах діяльності людини.

Комісія Європейського математичного товариства (<https://euromathsoc.org/>), яка приділяє серйозну увагу актуальним проблемам математичної освіти молоді, на рівні європейського документу виділила моделювання одним з параметрів, за якими можна було б визначати внесок математики в розвиток людського капіталу.

Філософські та загальнонаукові питання, пов'язані з моделюванням, розглядалися в роботах багатьох учених, таких як В. А. Віників, Б. А. Глинський, Б. С. Грязнов, Л. Ю. Корольов, К. Є. Морозов, Є. П. Нікітін, А. І. Уемов, В. А. Штофф. Наукові дослідження в галузі математичного моделювання проводили М. М. Боголюбов, А. Б. Жменька, В. С. Зарубін, В. П. Коробейніков, А. Д. Мишкіс, Г. І. Рузавін, А. А. Самарський та інші вчені. Але попри численні досягнення у фундаментальних поняттях математичного моделювання актуальним залишається питання дослідження прикладних проблем застосування математичного моделювання в різних сферах науки, техніки, суспільних та економічних відносин та використання комп'ютерної математики та цифрових застосунків для розв'язування практикозорієнтованих задач. У зв'язку із цим колектив авторів у рамках участі в міжнародному проекті «Розвиток математичних компетентностей студентів за допомогою цифрового математичного моделювання (Development of students' mathematical competencies through Digital Mathematical Modeling (DeDiMaMo))» (реєстраційний номер проекту СРЕА-ST-2019/10067) на прикладі окремих сфер застосування математичного моделювання пропонують авторські підходи до добору теоретичного матеріалу, прикладів завдань і їх розв'язків, наводять

перелік практичних завдань, які мають на меті сформувати компетентності із математичного моделювання та застосування цифрових інструментів у студентів і всіх, кого цікавить розглядувана тема дослідження як матеріал для самостійного навчання, розвитку та застосування практичних умінь у професійній сфері.

У монографію увійшли окремі питання навчального матеріалу, який апробовано в курсі «Математичне моделювання» для студентів фізико-математичного факультету Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Розділ 1 «Основні поняття математичного моделювання» вводить читачів в курс математичного моделювання, описуючи віхи становлення математичного моделювання як науки. Важливим є питання класифікації задач математичного моделювання та етапів розв'язування задач від постановки проблеми до комп'ютерного моделювання.

Розділи 2–4 пропонують до розгляду питання математичного моделювання та застосування цифрових інструментів до дослідження фізичних і математичних процесів, екологічних проблем.

Розділи 5–7 присвячені економіко-математичному моделюванню, зокрема, задачам лінійного програмування, транспортним задачам, цілочисельному програмуванню.

Розділ 8 містить питання, що розкривають проблеми, пов'язані з упорядкованою множиною об'єктів, в основі моделювання яких лежить теорія графів. У розділі 9 розглянуто задачі, результатом моделювання яких є випадкові процеси або величини.

Автори не передбачали розглядати вичерпний список усіх типів математичних моделей і сфер їх застосування. Розглянуті приклади мають типовий характер, можуть бути використані в навчальних цілях та як основа для практичного застосування у реальних ситуаціях.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Історична довідка

Перші згадки про деякі оптимізаційні задачі були ще в стародавній Греції. Проте математичне програмування на сучасному етапі перш за все розглядає розв'язування та розв'язки математичних моделей, які описують економічні процеси. Тому започаткування розвитку оптимізаційних моделей як самостійного наукового напрямку вважають прикладні дослідження, які виконували насамперед в економіці. Першими працями в теорії математичного програмування вважають праці Л. В. Канторовича. Він у 30-х роках ХХ ст. у Ленінградському університеті в монографії «Математичні методи організації і планування виробництва» вперше сформулював та дослідив основні типи задач, критерії оптимальності, економічну інтерпретацію, описав методи розв'язання та обґрунтував геометричну інтерпретацію результатів розв'язування задач лінійного програмування. Проте термін «лінійне програмування» був введений пізніше, у 1951 році, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Проте Дж. Данциг відмітив великий вклад Л. В. Канторовича у розвиток питань лінійного програмування, він був тим, хто першим виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливило підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

У 1947 році Дж. Данцигом розробив й обґрунтував симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні, який до цього часу вважають основним методом розв'язування задач лінійного програмування. Після цього у працях Дж. Неймана (1947 р.) була розроблена концепція двоїстості, що дозволили розширити практичну сферу застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки ХХ ст. Чимало вчених у різних країнах знаходять і обґрунтовують нові алгоритми, проводять теоретичні дослідження у різних сферах математичного програмування. Так, у 1951 році Г. Кун і А. Таккер дослідили необхідні й достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року — Чарнес і Лемке розгля-

нули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року з'являється ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У цей час (50-і–60-і роки ХХ ст.) формується новий напрямок математичного програмування — динамічне програмування, який започаткував і доволі сильно розвинув американський математик Р. Белман.

Зараз математичне програмування дозволяє дослідити чимало практичних задач завдяки різним методам точного й наближеного розв'язання, які дозволяють розглядати і розв'язувати найрізноманітніші прикладні аспекти розвитку та функціонування реальних економічних систем. Створюються пакети економіко-математичних програм, які за допомогою швидкодіючої обчислювальної техніки та сучасними програмними продуктами здійснюють ефективну підтримку прийняття рішень у різних галузях економіки.

Тест

Установіть відповідність між ученими та їхнім внеском у розвиток теорії оптимізації.

	Досліджував критерії оптимальності, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язування ЗЛП
Л. В. Канторович	Симплекс-метод розв'язування ЗЛП
Дж. Данциг	Теорія двоїстості
Дж. Нейман	Теорія динамічного програмування
Р. Белман	

Математичне моделювання, його особливості та етапи

Математичні методи широко застосовують у сфері соціально-економічних, екологічних, технічних, міжнародних відносин. Найрізноманітніші прикладні науки, такі як менеджмент, прийняття управлінських рішень, соціально-економічне прогнозування використовують математичний апарат для вирішення своїх проблем і навіть стимулюють розвиток прикладних галузей математики.

Використання сучасних методів моделювання зумовлено:

- загальною тенденцією розширення та поглиблення дослідження процесів в реальному фізичному світі;
- значною тривалістю ряду процесів (екологічних, хіміко-технологічних);

- практичною неможливістю отримувати необхідну інформацію, досліджуючи об'єкт-оригінал (об'єкти макро- та мікросвіту);
- неповними достовірними даними про фізичний об'єкт, що реально існує;
- складністю протікання реальних процесів;
- відсутністю належних умов чи кваліфікації персоналу для проведення досліджень;
- необхідністю проведення великої кількості експериментів, коли тривале дослідження стає економічно недоцільним;
- відсутністю самого об'єкту, що знаходиться на стадії проектування.

Терміни «модель» і «моделювання» часто використовують у повсякденному житті, розуміючи при цьому зовсім різні поняття. Розглядаючи моделювання як універсальний метод наукового пізнання, доцільно ввести таке означення моделі.

Модель — це матеріальна або розумово-уявна система чи фізичний об'єкт, яка в процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові відомості про цей об'єкт.

Під *моделюванням* розуміють процес формалізації фізичного об'єкта, метою якого є створення певного його аналога — моделі, що адекватна об'єктові, містить найважливіші його властивості. Моделювання — це триєдиний процес побудови, вивчення та застосування моделей.

Згідно досліджень С. І. Наконечного, усі моделі можуть бути умовно поділені на кілька видів.

I. Фізичні моделі є об'єктами, що існують реально і створюються з реальних матеріалів. Це процес відтворення реально існуючого об'єкту. До них відносять відносять:

а) *геометрично подібні* моделі (макети установок, приладів, будов). Їх використовують у зменшеному масштабі для того, щоб мати просторову уяву про об'єкт, компоновку і взаєморозміщення його елементів у просторі;

б) *фізично подібні* моделі (н-д, дослідження процесів обтікання повітрям крила літака в аеродинамічній трубі). Їх створюють для того, щоб краще зрозуміти фізичні процеси, що вивчаються, їх кінетику та динаміку, виявлення найважливіших закономірностей і функціональних залежностей;

в) *математично подібні* моделі (аналогові моделі руху рідин і газів, що описують однаковими рівняннями). Створені для вивчення складних процесів (наприклад, транспонування рідини чи газу) за допомогою їх простіших аналогів.

II. Уявні моделі — моделі, що існують в голові дослідника, на папері, магнітних носіях у вигляді певних уявних образів: формул, таблиць, знаків, схем тощо. Їх поділяють на:

а) *образні моделі* — побудовані з чуттєво-наглядних ідеальних елементів, які використовують для наближеного опису реальних явищ (абсолютно чорне тіло, пружні кульки, ідеальний газ тощо);

б) *знакові моделі* — відзначаються повною відсутністю подібності між досліджуваним об'єктом і його моделлю. Наприклад, заміна міста-точки відправлення поїзда буквою (Задача «З міста *A* в місто *B* вирушив потяг...»);

в) *образно-знакові* є поєднанням попередніх двох видів.

Одним з підвидів знакових моделей є математичні моделі. **Математична модель** фізичного об'єкта — це сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, графіків), що пов'язують вихідні характеристики стану об'єкта з вхідною інформацією, геометричними й іншими обмеженнями іншою інформацією, що накладається на функціонування об'єкту. Математична модель знаходиться у відповідності з об'єктом і здатна замінити його з метою отримання нової інформації про його поведінку.

Особливостями математичних моделей є:

- наближеність опису;
- врахування тільки основних чинників;
- компроміс між простотою та повнотою опису;
- обмеженість застосування;
- відмінність математичних моделей від закону (неабсолютність математичної моделі);
- адекватність.

Математичне моделювання — це комплексне дослідження властивостей фізичного об'єкта з допомогою створеної його математичної моделі (найчастіше з використанням ПК).

У різних сферах застосування кожен етап процесу моделювання має свої специфічні риси, але в усіх випадках можна виділити кілька етапів, що присутні завжди.

Визначимо одну із пропонованих на сьогоднішній день класифікацій:

1. *Постановка проблеми та її якісний аналіз*. Тут виділяють найважливіші ознаки та властивості об'єкта, що моделюється, й абстрагують другорядні, вивчають структуру та взаємозв'язок елементів, формулюють основні гіпотези (хоча би попередні).

2. *Побудова математичної моделі*. Це етап формалізації проблеми, вираження її у вигляді математичних залежностей і відношень. Як правило, спочатку визначають основну конструкцію задачі (тип моделі), а потім відбувається уточнення окремих деталей.

3. *Математичний аналіз моделі*. Виділяють загальні властивості моделі, описують умови існування та єдиності розв'язку задачі, досліджують, які змінні входитимуть у розв'язок і в яких співвідношеннях, у яких межах вони змінюватимуться.

4. *Підготовка вихідної інформації*. На цьому етапі використовують математичні методи.

5. *Чисельний розв'язок*. Розробляються алгоритми для розв'язування задачі, складаються програми для ПК. Завдяки швидкодії ПК можна провести багаточисленні експерименти з різними вихідними умовами та параметрами.

6. *Аналіз чисельних результатів і їх застосування*. Повністю вивчають питання про правильність і повноту результатів моделювання, адекватність моделі та її практичне застосування.

Задачі математичного моделювання часто використовують на практиці. Їх зручно поділити на кілька типів, що часто зустрічаються при вивченні економічних і виробничих процесів:

- **трендові моделі** (відображають такі особливості як постійний ріст чи пониження досліджуваної функції, збільшення чи зменшення росту чи пониження функцій прибутку і т. д.);

- **побудова і використання розрахункових залежностей** (задача про розподіл доходів населення (крива Лоренца, коефіцієнт Джинні), робота з функціями виду «розходи — доходи», «попит — пропозиція», корисність і т. д.);

- **задачі динаміки** (модель відтворення національного доходу, модель динаміки фондоозброєння, моделі В. Леонтєва, Л. Канторовича, Дж. Фон Неймана, а також моделі руху об'єктів, моделі управління та інші, що описуються диференціальними рівняннями та їхніми системами);

- **оптимізаційні задачі** (про знаходження найкращого з якоїсь точки зору розв'язку при існуванні, як правило, деяких обмежень, що не дозволяє використання класичних методів математичного аналізу);

- **задачі оптимального розподілу ресурсів та оптимального управління запасами** (такі задачі можуть мати найрізноманітніше застосування і певний критерій ефективності, конкретний для окремого випадку, що зумовлює методи та стратегію розв'язку);

- **задачі оптимального управління** (пов'язані зі знаходженням розподіленого в часі неперервної управляючої дії, сюди відносяться задачі прогнозування тенденцій розвитку, довгострокових інвестицій, максимізації дисконтного споживання).

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі, та некеровані змінні y_r ($r = 1, 2, \dots, s$), значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Тест

Упорядкуйте етапи процесу моделювання від початкового до кінцевого.

Постановка проблеми та її якісний аналіз.	1
Побудова математичної моделі.	2
Математичний аналіз моделі.	3
Підготовка вихідної інформації.	4
Чисельний розв'язок.	5
Аналіз чисельних результатів та їх застосування.	6

Математичне моделювання задач

Будь-яка економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимального прибутку, мінімізація затрат тощо. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F , якою вимірюється ступінь досягнення мети, входними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_s; c_1, c_2, \dots, c_l), \quad (1)$$

де параметри c_k ($k = 1, 2, \dots, l$) є кількісними характеристиками системи.

Функцію F називають *цільовою функцією*, або *функцією мети*. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задачі математичного програмування формулюють так:

Знайти такі значення змінних x_j , щоб цільова функція F набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max(\min)F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_s; c_1, c_2, \dots, c_l). \quad (2)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву обмежена наявністю земельних ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей і нерівностей виду:

$$\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_s; c_1, c_2, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} 0, \quad (3)$$

де $i = 1, 2, \dots, m$.

Тут набір символів ($\leq, =, \geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу \geq , для інших — рівності ($=$), а для решти — нерівності типу \leq .

Систему (3) називають *системою обмежень*, або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні й економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j у більшості випадків мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Залежності (2)–(4) утворюють *економіко-математичну модель* економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватися набору певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні й економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, тому «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, а переускладнені моделі важко реалізувати як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ПК.

4. Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу « \Leftarrow », а також суперечливих обмежень.

Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (3), (4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних x_1, x_2, \dots, x_n , що задовольняє умови (3) і (4), називають *допустимим планом*, або *планом*. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій*. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (3) і (4), тобто множина всіх допустимих планів, утворює *область існування планів (область допустимих планів)*.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*. Оптимальний план є *розв'язком задачі математичного програмування (2)–(4)*.

Класифікація задач математичного програмування

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — *детерміновані задачі* та *стохастичні*. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі прибутки, врожайності сільськогосподарських культур тощо задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінова-

ною. Якщо ж ці величини задані функціями розподілу, наприклад, нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D , то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається *стохастичним програмуванням*.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи.

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути *статичними* (однокроковими) або *динамічними* (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2020 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2020 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість (динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним*. У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилитися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають *тактичними*. Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування, зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного про-

грамування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на **дискретні і неперервні**. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремих тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. Їх називають задачами *цілочислового програмування*. Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є *неперервною*.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на *лінійні та нелінійні*. Якщо цільова функція (2) та обмеження (3) є лінійними, тобто містять змінні x_i тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. У всіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається *симплексним методом*. Теоретично кожену задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться буду-

вати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовують в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. Задача належить до *опуклого програмування* у тому разі, коли цільова функція *вгнута*, якщо вона мінімізується, та *опукла*, якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу (\leq) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу (\geq) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. *Квадратичне програмування* — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного та стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають *дробово-лінійне програмування*, коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі *теорії ігор*, які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи. Наприклад, *ігри двох осіб із нульовою сумою* тощо.

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Поряд з традиційним поділом фізики на експериментальну і теоретичну сьогодні виділяють третій фундаментальний розділ — обчислювальна фізика. Причину цього в цілому можна сформулювати так: при максимальному проникненні у фізику математичних методів, яке доходить часом до фактичного злиття цих наук, реальні можливості розв’язання математичних задач, які виникають, традиційними методами дуже обмежені. Із багатьох конкретних причин виділяють дві, які найбільш часто зустрічаються: не лінійність багатьох фізичних процесів і необхідність дослідження сумісного руху багатьох тіл, для яких доводиться розв’язувати системи великого числа рівнянь.

Важливим етапом числового моделювання, коли розрахунки уже завершені, є усвідомлення результатів, представлення їх в максимально наглядній і зручній для сприйняття формі. Представити результат у числовій формі, у вигляді графіка, діаграми, траєкторії руху і т.д.

Розглянемо рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, з урахуванням опору повітря. Будучи кинутим під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 , тіло летить, якщо не враховувати опір повітря, по параболі, і через деякий час падає на землю. Розкладемо швидкість на горизонтальну і вертикальну складові: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

Оскільки рух по вертикалі проходить під дією постійної сили тяжіння, то він є рівносповільненим до досягнення верхньої точки на траєкторії і рівноприскореним — після неї; рух же по горизонталі є рівномірним.

Із формул рівноприскореного руху $v_y = v_{0y} - gt$; якщо у верхній точці $v_y = 0$, то час досягнення верхньої точки на траєкторії

$$\tau = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Висота цієї точки

$$h = v_{0y}\tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Повний час руху до падіння на землю 2τ ; за цей час, рухаючись рівномірно вздовж осі Ox зі швидкістю v_{0x} , тіло пройде шлях $l = v_{0x}\tau 2\tau = v_0 \cos\alpha 2 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Для знаходження траєкторії достатньо із біжучих значень x і y виключити t : $x = v_{0x}t$; $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$, \Rightarrow

$$y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{3 v_{0x}^2} x^2 = tgax - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) — це рівняння параболи.

При достатньо великій початковій швидкості опір повітря може значно змінити характер руху. Перше ніж виписувати рівняння, знову оцінимо, яка із складових сили опору (лінійна або квадратична по швидкості) дає більший вклад в цю силу, і чи не можна одною із цих складових знехтувати. Оцінку проведемо для кульки; по порядку величини оцінка не залежить від форми тіла. Отже, кулька радіусом $R=0,1\text{м}$, яка рухається зі швидкістю $\sim 1\text{м/с}$, відчуває в повітрі лінійну силу опору $F_1 = 6\pi\mu Rv = 6\pi \cdot 0,0182 \cdot 0,1 \cdot 1 \approx 3 \cdot 10^{-2}\text{Н}$ і квадратичну силу опору $F_2 = \frac{c_S \rho v^2}{2} = \frac{0,4\pi \cdot 0,1^2 \cdot 1,29 \cdot 1}{2} \approx 8 \cdot 10^{-3}\text{Н}$.

Величини F_1 і F_2 відрізняються. При збільшенні розміру тіла F_2 росте скоріше, ніж F_1 ($F_1 \sim R$, $F_2 \sim R^2$), при збільшенні швидкості F_2 також росте скоріше, ніж F_1 ($F_1 \sim v$, $F_2 \sim v^2$). Отже, якщо ми моделюємо рух кинутого м'яча або каменя, то необхідно в рівняннях враховувати обі складові сили опору; але якщо ми хочемо моделювати політ снаряду, випущеного із зброї, де швидкість польоту майже на всьому його проміжку сотні метрів в секунду, то лінійною складовою сили опору можна знехтувати. Проектуючи рівняння $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ на осі x і y ,

$$\text{отримуємо } \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_{\text{опору}}^x}{m}; \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{-md + F_{\text{опору}}^y}{m}.$$

Оскільки в кожній точці траєкторії сила опору направлена по дотичній до траєкторії в сторону, протилежну руху, то $F_{\text{опору}}^x = -F_{\text{опору}} \cos Q = -F_{\text{опору}} \frac{v_x}{v} = -(k_1 v + k_2 v^2) \frac{v_x}{v}$; $F_{\text{опору}}^y = -F_{\text{опору}} \sin Q = -F_{\text{опору}} \frac{v_y}{v} = -(k_1 v + k_2 v^2) \frac{v_y}{v}$, де Q — кут між біжучим напрямом швидкості і віссю x .

Підставляючи це в рівняння і враховуючи, що $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, отримаємо рівняння руху в змінних v_x , v_y :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = - \frac{k_1+k_2\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{m} v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} = - g - \frac{k_1+k_2\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{m} v_y \end{cases} \quad (2)$$

Оскільки нас цікавить ще і траєкторія руху, доповнимо систему (2) ще двома рівняннями

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad (3)$$

і, розв'язуючи їх сумісно з (2), отримаємо 4 функції $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$, $y(t)$.

Розглянемо популярний в фізичному моделюванні прийом, який називається **обезрозмірюванням**.

При розв'язуванні конкретних задач ми користуємося певною системою одиниць, у якій далеко не всі числові значення лежать в зручному діапазоні. Крім того, абсолютні значення величин дають мало інформації для якісного розуміння. Саме в порівнянні з чимось звичним і зрозумілим ми зазвичай і сприймаємо слова «багато» і «мало». Ідея обезрозмірювання полягає в переході від абсолютних значень віддалей, швидкостей, часу і т.д. до відносних, причому відношення будуються до величин, типових для даної ситуації. Справді, в даній задачі при відсутності опору повітря ми маємо значення l , h , t , які визначені раніше; опір повітря змінює характер руху, і якщо ми введемо в якості змінних величин $X = \frac{x}{l}$; $Y = \frac{y}{h}$; $\tau = \frac{t}{\tau}$ (безрозмірні відстані по осях і часу), то при відсутності опору повітря ці змінні будуть змінюватися в діапазоні від 1 до 1, а в задачі із врахуванням опору відмінність їх максимальних значень від 1 ясно характеризують вплив цього опору. Для швидкостей відповідно ввести безрозмірні змінні, враховуючи проекції швидкості на осі x і y з початковою швидкістю v_0 : $V_x = \frac{v_x}{v_0}$; $V_y = \frac{v_y}{v_0}$.

Покажемо, як перейти до безрозмірних змінних в одному із наших рівнянь, наприклад в другому рівнянні системи (2).

Маємо $\frac{dv_x}{dt} = \frac{d(v_0 V_x)}{d(\tau \tau)} = \frac{v_0}{\tau} \frac{dV_x}{d\tau}$ (так як постійний множник можна винести за знак похідної). Підставляючи це у рівняння, отримаємо

$$\frac{v_0}{\tau} \frac{dV_x}{d\tau} = - g - \frac{k_1+k_2\sqrt{v_0^2 V_x^2 + v_0^2 V_y^2}}{m} v_0 V_x,$$

або

$$\frac{dV_y}{d\tau} = -\frac{\tilde{t}g}{v_0} - \frac{\tilde{t}}{v_0} \frac{k_1+k_2\sqrt{v_0^2V_x^2+v_0^2V_y^2}}{m} v_0 V_y.$$

Підставляючи $\tilde{t} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, маємо

$$\frac{dV_y}{d\tau} = 0 - \sin \alpha - a \sin \alpha V_y - b \sin \alpha \sqrt{V_x^2 + V_y^2} V_y, \quad \text{де безрозмірні}$$

комбінації параметрів, які входять у вихідні рівняння, $a = \frac{k_1 v_0}{mg}$,
 $b = \frac{k_2 v_0^2}{mg}$.

У результаті виконання обезрозмірювання в усіх рівняннях (2), (3) отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{d\tau} = -a \sin \alpha V_x - b \sin \alpha \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \\ \frac{dV_y}{d\tau} = -\sin \alpha - a \sin \alpha V_y - b \sin \alpha \sqrt{V_x^2 + V_y^2} V_y, \\ \frac{dX}{d\tau} = \frac{V_x}{2 \cos \alpha}, \\ \frac{dY}{d\tau} = \frac{2V_y}{\sin \alpha}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Початкові умови для безрозмірних змінних такі:

$$V_x(0) = \cos \alpha; V_y(0) = \sin \alpha; X(0) = 0; Y(0) = 0.$$

Важлива роль обезрозмірювання — встановлення законів подібності. У рухові, який вивчається, є багато варіантів, які визначаються наборами значень параметрів, які входять в рівняння (2), (3) або які є для них початковими умовами: $\kappa_1, \kappa_2, m, g, v_0, a$. Після обезрозмірювання змінних з'являються безрозмірні комбінації параметрів — в даному випадку a, b, α , фактично визначається характер руху.

Якщо ми вивчаємо два різних рухи з різними розмірними параметрами, але такі, що a, b і α однакові, то рухи будуть якісно однакові. Число таких комбінацій зазвичай менше числа розмірних параметрів (в даному випадку вдвоє), що також створює зручність при повному численному дослідженні все можливих ситуацій, пов'язаних з цим процесом. А величини V_x, V_y, X, Y, τ фізично легше інтерпретувати, ніж їх розмірні аналоги, так як вони вимірюються відносно величин, зміст яких очевидний. Перш, ніж застосувати числове моделювання, відмітимо, що при врахуванні лише лінійної складової сили опору

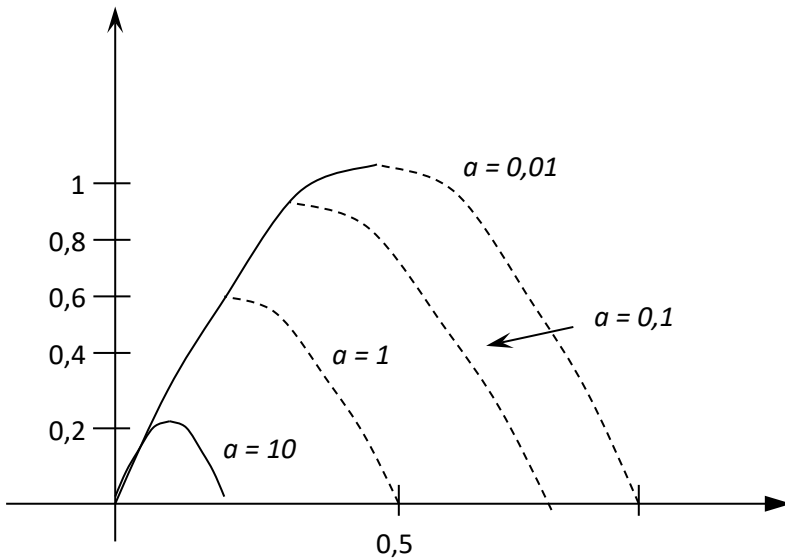
модель допускає аналітичний розв'язок. Система рівнянь (4) при $b=0$ достатньо елементарно інтегрується і результати такі:

$$\begin{cases} V_x(\tau) = \cos\alpha e^{-a\sin\alpha\tau}, \\ V_y(\tau) = \sin\alpha \left(1 + \frac{1}{a\sin\alpha}\right) e^{-a\sin\alpha\tau} - \frac{1}{a}, \\ X(\tau) = \frac{1}{2a\sin\alpha} (1 - e^{-a\sin\alpha\tau}), \\ Y(\tau) = \frac{2}{a} \frac{1}{2a\sin\alpha} (1 - e^{-a\sin\alpha\tau}) - \frac{2}{a}\tau. \end{cases}$$

Виключаючи із двох останніх формул час, отримаємо рівняння траєкторії: $Y(x) = 4 \left(1 + \frac{1}{a\sin\alpha}\right) X + \frac{2}{a^2 \sin^2\alpha} \ln(1 + 2a\sin\alpha X)$.

Ця формула не з тих, які візуалізуються і тут комп'ютер може бути корисним в тому, щоб скласти ясне представлення про вплив лінійної частини сили опору на рух, який вивчається.

Розглянемо траєкторії чотирьох рухів з різними значеннями параметра a , яке характеризує тертя. Воно сильно впливає на рух, — його форму, віддаль по горизонталі і вертикалі. Загальні дослідження при довільних значеннях a і b може дати програма на КС, написана на певній мові програмування.



Тут фактично представлені дві програми: при активізації I або II блоку. У I випадку вона видає результати чисельного моделювання у вигляді таблиці значень безрозмірних швидкостей і координат при фіксованому наборі параметрів a , b і α , значення яких встановлюються в розділі опису const. При взятті у фігурні дужки I блоку і активізації II програма видає у графічному режимі сімейство траєкторій, які відрізняються значеннями одного із трьох безрозмірних параметрів.

Наведемо приклад: розглянемо політ чавунного ядра радіусом $R = 0,07\text{м}$, випущеного з початковою швидкістю $v_0 = 60\text{ м/с}$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ до поверхні Землі. Визначити, яку віддаль пролетить ядро, на яку максимальну висоту воно підніметься, а також прослідкуємо, як зміниться швидкість польоту з часом. Будемо розв'язувати безрозмірну рівняння, щоб скоротити число параметрів. Обчислимо значення параметрів a і b , після чого розв'яжемо систему диференціальних рівнянь. Врахуємо, що густина чавуну $\rho = 7800\text{ кг/м}^3$:

$$a = \frac{k_1 v_0}{mg} = \frac{6\pi R v_0}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g} = \frac{9\mu v_0}{2R^2 \rho g} = 0,013, \text{ де } \rho \text{ — густина чавуна;}$$

$$b = \frac{k_2 v_0^2}{mg} = \frac{\frac{1}{2}C\pi R^3 \rho v_0^2}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g} = \frac{3C\mu v_0^2}{8R\rho g} = 0,049.$$

Розрахунки повторювалися, спочатку з кроком 0,1; потім — вдвічі меншим і т.д., поки не був одержаний крок, при якому досягається точність 10^{-3} . Ясно, що розрахунки треба проводити до тих пір, поки ядро не досягне Землі, тобто поки Y не стане рівним 0.

Якщо запрограмувати такі кроки, то можна провести повне дослідження моделі в широкому діапазоні значень параметрів і скласти якісне представлення про їх вплив на рух, який вивчається.

Моделювання явищ і процесів в наближенні суцільного середовища

Абстрактне поняття «суцільного середовища» широко використовується в науці. В багатьох ситуаціях рідину, газ, тверді тіла, плазму можна розглядати як «суцільні», відштовхуючись від їх молекулярної і атомарної будови.

Приклад 1. При поширенні хвиль в рідині або газі реальна дисперсія цих середовищ практично не відбивається на властивостях хвиль, якщо довжина хвилі набагато більша характерної молекулярної відстані.

Існуючі задачі ділять на два класи: статистичні і динамічні. У першому випадку величини, які характеризують суцільне середовище, не залежать від часу і треба знайти їх просторовий розподіл.

Приклад 2. Як розподіляється в просторі значення електричного поля, створеного нерухомим точковим зарядом?

Складніші динамічні задачі. Якщо електричне поле створюється рухомими зарядами, то визначити, як воно змінюється в часі в кожній точці простору — складно.

Розподіл електростатичного поля

Якщо це поле створене одним точковим зарядом Q , то величина напруги поля залежить від віддалі r від Q до даної точки простору $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, її напрям — по радіусу від заряду (якщо Q позитивний). Поле це існує незалежно від заряду і може розглядатися як суцільне середовище. Існують дві взаємопов'язані характеристики електричного поля: напруга E (векторна) і потенціал φ (скалярна). Для поля точкового заряду $\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r}$. Якщо поле створено не одним, а декількома зарядами, то напругу і потенціал в кожній точці можна знайти із відомого принципу суперпозиції $E = \sum_i E_i$; $\varphi = \sum_i \varphi_i$. Знаючи потенціал в кожній точці поля, тобто функцію $\Phi = \varphi(x, y, z)$, можна знайти напругу в кожній точці математичним шляхом, що відображає факт: проекція вектора напруги на ∇ напрям є швидкість зміни потенціалу в цьому напрямі: $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Можна довести, що для ∇ електростатичного поля множина точок, потенціали в яких однакові (тобто точок, які задовольняють рівнянню $\varphi(x, y, z) = \varphi_0$ $\nabla \varphi_0$ утворюють замкнуту поверхню. Силкові лінії — це ті, дотичні до яких в кожній точці задають напрям вектора напруженості поля. Силкові лінії ніколи не перетинаються між собою. Вони починаються на позитивних зарядах і або закінчуються на негативних, або тягнуться у безконечність.

Обговоримо практичний метод побудови картини поверхонь рівного потенціалу для системи, яка складається із декількох точкових зарядів довільної величини; знаку, які довільним чином розташовані в просторі. Введемо деяку систему координат, початок якої розташова-

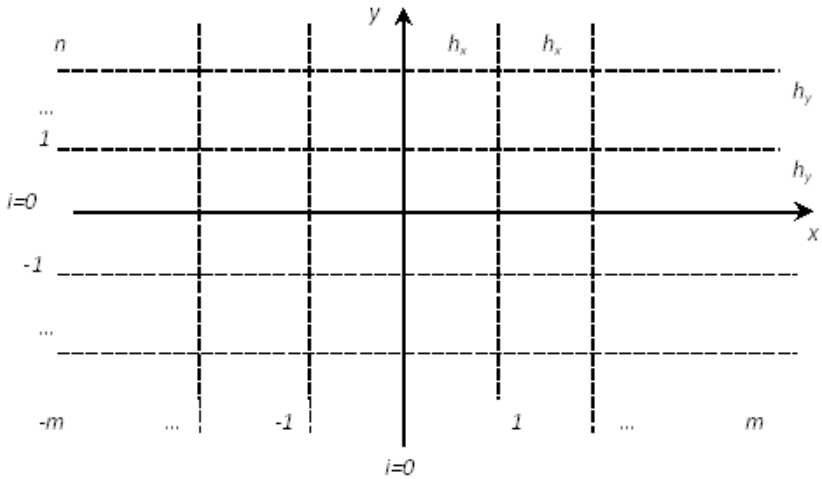
ний в незарядженій точці. Нехай в цій точці координати зарядів мають значення $r_j = (x_j, y_j, z_j)$, $j = \overline{1, p}$, а p — число зарядів.

Оскільки зображати трьохмірну поверхню складно, розглянемо спочатку побудову ліній рівного потенціалу (ізоліній), які утворені перетином поверхні рівного потенціалу деякою площиною; нехай, для визначеності, це буде площина xy . Скористаємося методом сіток, що відіграють у моделюванні властивостей суцільних середовищ важливу роль. Виберемо по осях x і y і розміщених на віддальх h_x і h_y одна від одної. Точки перетину цих прямих — вузли сітки. Пронумеруємо їх: $(0, 0)$ — початок координат; $(0, 1)$ — по осі x вправо; $(0, -1)$ — по осі x вліво; $(1, 0)$ — по осі y вверх; $(-1, 0)$ — по осі y вниз і т.д. Значення потенціалу, створюваного системою зарядів a_1, \dots, a_p у вузлі (i, κ) , згідно принципу суперпозиції
$$\Phi_{ik} = - \sum_{l=1}^p \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_l}{\sqrt{(x_l - kh_x)^2 + (y_l - ih_y)^2}}.$$

Обмежимося прямокутною областю в площині xy : $[-mh_x, mh_x]$ по осі x і $[-mh_y, mh_y]$ по осі y . В цій області $(2m + 1)(2n + 1)$ вузлів. Обчисливши значення потенціалу в кожному з них, отримаємо матрицю значень потенціалу. Фіксуємо деяке значення потенціалу Φ і побудуємо ізолінію, яка відповідає цьому значенню. Для цього проходимо, наприклад, по i -тій горизонтальній лінії сітки і шукаємо серед її вузлів такі сусідні, значення потенціалу в яких „захоплюють” $\tilde{\Phi}$ між собою; ознакою цього може служити виконання нерівності $(\Phi_{ik} - \tilde{\Phi})(\Phi_{ik+1} - \tilde{\Phi}) < 0$. Якщо така пара вузлів знайдена, то координату точки, в якій $\Phi = \tilde{\Phi}$, знайдемо наближено з допомогою лінійної інтерполяції: $x = kh_x + \frac{\tilde{\Phi} - \Phi_{ik}}{\Phi_{ik+1} - \Phi_{ik}} h_x$, $y = ih_y$.

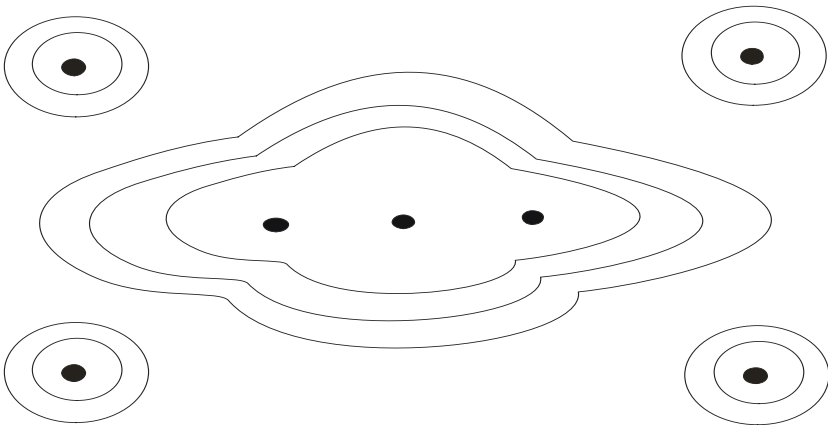
Знайшовши в даній горизонталі всі такі точки, переходимо до наступної горизонталі, поки не вичерпаємо всі. Для цього треба здійснити подвійний циклічний прохід: в зовнішньому циклі перебрати і від $-n$ до $+n$, у внутрішньому перебирати k від $-m$ до $+m$.

Після цього треба аналогічно зайнятися пошуком потрібних точок на вертикальних лініях сітки. Тоді $y = ih_y + \frac{\tilde{\Phi} - \Phi_{ik}}{\Phi_{i+1k} - \Phi_{ik}} h_{xy}$, $x = kh_x$.



Після проходження всіх горизонтальних і вертикальних ліній сітки знаходяться всі ті точки на цих лініях, в яких потенціал рівний $\tilde{\Phi}$. Провівши на папері криву, яка плавно проходить через найближчі точки, отримаємо шукану ізолінію. Тоді беремо інші значення $\tilde{\Phi}$ і повторюємо вказану процедуру. Отримаємо сімейство ізоліній. Наведемо програму, яка реалізує вказані побудови (програму побудови ліній рівного потенціалу).

Один з прикладів використання такої моделі:



Між двома вузлами дійсно лежить одна точка, в якій $\Phi = \tilde{\Phi}$, якщо потенціал між цими точками змінюється монотонно. Якщо ж вузли далеко один від одного (тобто h_x або h_y дуже великі), то потенціал між сусідніми вузлами змінюється немонотонно і отримані числа не мають ніякого відношення до реальних точок.

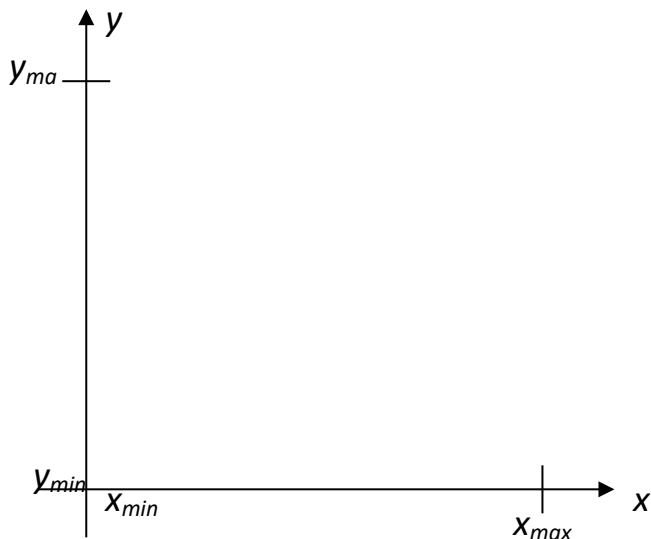
Отже, для отримання ізоліній слід брати досить малі h_x і h_y . Перевірка достовірності (емпірична) полягає в тому, що будується картина ізоліній з деякими h_x і h_y (часто беруть $h_x = h_y$), а потім з вдвоє меншими значеннями; якщо отримані картини близькі, то побудова на цьому завершується. Навіть якщо всі заряди лежать в одній площині, поле існує і поза цією площиною. Один із способів наглядної побудови зображення поля — знайти ізолінії, які відповідають деякому фіксованому набору значень $\tilde{\Phi}$ в декількох паралельних площинах і представити їх на загальному рисунку, який дає уявлення про поверхні рівного потенціалу.

Комп'ютерна наукова графіка

Можна собі уявити, що кінцеве оформлення екрану в кінці процесу моделювання виконане з допомогою графічного редактора, а графік, який воно містить — з допомогою табличного процесора. Але проблему сумісності різних видів ПЗ, яка при цьому виникає, не завжди легко розв'язувати. А тому орієнтуватися треба на ту мову програмування, на якій реалізується математична модель.

У цілому ряді задач бажано ілюструвати процес моделювання зображеннями рухомих об'єктів і їх траєкторіями. Обмежимося випадком руху на площині, який легко реалізувати за допомогою комп'ютера.

Нехай числові обрахунки вже закінчені і нам відомі границі значень координат $[x_{min}, x_{max}]$ і $[y_{min}, y_{max}]$ і є таблиця значень x і y в деякі моменти часу, розділені різними проміжками: $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots, n\tau$. Треба побудувати графік залежності і траєкторію.



Здійснюємо перехід в графічний режим. Незвичайна орієнтація екранної системи координат створює певні незручності. Ми хочемо виводити і задавати точки в звичайній системі, використовувати графічні процедури (Circle, Line, OutText і т.д.). Зробимо нову розмітку, зробивши лінійне перетворення координат $x' = \alpha x + \beta$, $y' = \lambda y + \delta$. Будемо сприймати нові аргументи в екранній системі x' і y' .

Якщо відомі роздільна здатність екрану — M точок по осі x' і N точок по осі y' , то для знаходження коефіцієнтів α , β , λ , δ достатньо зв'язати \forall дві точки в різних системах координат, наприклад: $x = x_{min}$, $y = y_{min} \Rightarrow x' = 10$, $y' = N-10$; $x = x_{max}$, $y = y_{max} \Rightarrow x' = M-10$, $y' = 10$ (відступ на 10 позицій від країв екрану дозволить створити підписи,

розмітку осей і ін.). Маємо
$$\begin{cases} 10 = \alpha x_{min} + \beta \\ M - 10 = \alpha x_{max} + \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{M-20}{x_{max}-x_{min}} \Rightarrow \beta = \frac{10x_{max}-(M-10)x_{min}}{x_{max}-x_{min}} \Rightarrow \begin{cases} N - 10 = \lambda y_{min} + \delta \\ 10 = \lambda y_{max} + \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{20-N}{y_{max}-y_{min}} \Rightarrow \delta = \frac{(N-10)y_{max}-10y_{min}}{y_{max}-y_{min}}.$$

Таким чином, переведення одних координат в інші здійснюється за формулами:

$$x' = \frac{(M-20)x+10x_{max}-(M-10)x_{min}}{x_{max}-x_{min}};$$

$$y' = \frac{(20-N)y+(N-10)y_{max}-10y_{min}}{y_{max}-y_{min}}.$$

Тепер достатньо поставити точку з потрібною координатою (x, y) з допомогою процедури Put Pixel, ввести її в цикл і зобразити графік або траєкторію. Якщо ж треба зобразити рух тіла, то перед виводом на екран чергової точки досить стерти попередню або скористатися декількома відео сторінками — ці прийоми програмування відомі.

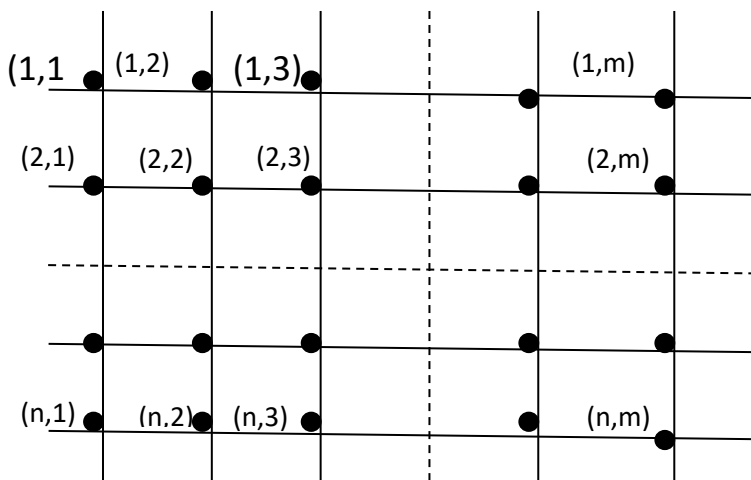
Створення на екрані динамічних зображень називається *анімацією*. Це один із перспективних напрямів штучного інтелекту.

У задачах моделювання досить стандартна проблема — побудова ліній (поверхонь), які називаються *ізолініями* (ізоповерхнями), вздовж яких деяка функція має однакове значення. Це дуже розповсюджена задача візуалізації характеристик деякого скалярного поля в наближенні суцільного середовища: ізотерми — лінії рівної температури; ізобари — лінії рівного тиску; ізолінії функції струму рідини або газу, по яких легко можна представити собі їх потоки; ізолінії екологічної популяції на місцевості; ізолінії концентрації шкідливих домішок в оточуючому середовищі і т.д.

Табл. 1. Двохвимірна таблиця значень деякої величини A

a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1m}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2m}
...
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{nm}

Опишемо типову процедуру побудови ізоліній на екрані КС. На старті ми маємо двохвимірну таблицю значень деякої величини A , яка отримана під час математичного моделювання; числа в цій таблиці відповідають значенням цієї величини в вузлах просторової сітки.



Задамо деякий умовний просторовий крок h між сусідніми вузлами по горизонталі і допоміжну систему координат, в якій вузол $(1,1)$ має координату $(0,0)$, вузол $(1,2)$ — координату $(h,0)$, вузол $(1,3)$ — координату $(2h,0)$ і т.д. Якщо крок по вертикалі h^* , то вузол (i, j) у цій системі має координату $((j-1)h, (i-1)h^*)$.

Попередньо знайдемо в таблиці найбільше і найменше значення a_{ij} ; припустимо, що це a_{max} і a_{min} . Нехай b — деяке проміжне значення $a_{min} < b < a_{max}$. Як побудувати ізолінію $A = b$ в загальних рисах? Будемо для цього **в циклі** проглядати спочатку всі пари найближчих чисел в першій стрічці таблиці в пошуках такої пари, для якої b знаходиться між a_{ij} і $a_{i,j+1}$, тобто або $a_{ij} < b < a_{i,j+1}$, або $a_{ij} > b > a_{i,j+1}$.

З допомогою лінійної інтерполяції знаходять відповідну горизонтальну координату точки, в якій $A = b$, $x = (j - 1)h + \frac{b - a_{1j}}{a_{1,j+1} - a_{1j}} h$ (координата y визначається номером горизонтальної лінії, в даному випадку $y = 0$).

Знайдені координати запам'ятемо і переглянемо першу стрічку в таблиці до кінця, потім переглянемо і другу стрічку і т.д.. Закінчивши перегляд стрічок, ми отримаємо частину точок, які відповідають ізолінії $A = b$.

Після цього треба переглянути стовпці. Припустимо, що в другому стовпці знайшлася пара чисел, для якої число b знаходиться між $a_{i,2}$ і $a_{i+1,2}$. Вона дає наступну точку для ізолінії. Закінчивши перегляд

всіх стовпців, ми отримаємо максимально можливий набір координат точок, які належать даній ізолінії. Вивівши їх на екран в потрібному масштабі, отримаємо точкове зображення ізолінії $A = b$, після чого можемо, взявши інше значення b , побудувати наступну ізолінію.

Ще один цікавий прийом сучасної наукової графіки — *умовне розфарбування*. Воно знаходить широке застосування в найрізноманітніших додатках науки і являє собою набір прийомів по максимально зручній, хоча і дуже умовній, візуалізації результатів КС.

Наведемо приклади. У різних дослідженнях температурних полів постає проблема наглядного представлення результатів. Самий простий (і, з точки зору спеціаліста, дуже неефективний) — привести карту (креслення, план), в деяких точках якої позначені значення температури.

Другий спосіб — набір ізотерм — більш ефективніший; його використовують деякі газети, говорячи про стан і прогнозуючи погоду. Але можна досягти більшої наглядності, враховуючи, що більшості людям властиво, порівнюючи різні кольори, сприймати червоний як «теплий», голубий як «холодний», а всі інші — проміжні. Припустимо, що на деякій території температура в даний момент має в різних місцях значення від $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $+15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Розділимо цей діапазон на частки з кроком 5° $[-25, -20]$, $[-20, -15]$, ..., $[+10, +15]$. І зафарбуємо перший з них в яскраво-голубий, останній — в яскраво-червоний, а всі інші — в проміжні відтінки голубого і червоного кольорів. Отримаємо картину температурного поля. Щоб перенести зображення з кольорового екрану на чорно-біле зображення паперу — використовують контрастність. Самий «теплий» фрагмент — темний, найхолодніший фрагмент — прозорий, а інші — проміжні між ними.

Умовне розфарбування буває і більш абстрактним.

При моделюванні складних органічних молекул КС може виразити результати у вигляді багатокольорової картини, на якій атоми водню зображені одним кольором, кисню — іншим і т.д. Атом представлений кулькою (кружком), у межах якого густина кольору змінюється у відповідності з розподілом електронної густини.

При пошуку корисних копалин методами аерофотозйомки з літака або космічних супутників (КС) будують умовні кольорові зображення розподілу густини під поверхнею Землі.

Практикум фізичних ситуацій

Поряд з традиційним поділом фізики на експериментальну і теоретичну сьогодні виділяють третій фундаментальний розділ — обчислювальна фізика. Причину цього в цілому можна сформулювати так: при максимальному проникненні у фізику математичних методів, яке доходить часом до фактичного злиття цих наук, реальні можливості розв'язання математичних задач, які виникають, традиційними методами дуже обмежені. Із багатьох конкретних причин виділяють дві, які найбільш часто зустрічаються: нелінійність багатьох фізичних процесів і необхідність дослідження сумісного руху багатьох тіл, для яких доводиться розв'язувати системи великого числа рівнянь.

Важливим етапом числового моделювання, коли розрахунки уже завершені, є усвідомлення результатів, представлення їх в максимально наглядній і зручній для сприйняття формі. Представити результат у числовій формі, у вигляді графіка, діаграми, траєкторії руху і т.д.

Задача 1. На заданій відстані від гармати знаходиться стіна. Відомі кут нахилу гармати і початкова швидкість снаряда. Чи потрапить снаряд у стіну?

Постановка задачі

Мета моделювання: користуючись знайомими фізичними законами руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, дослідити дану ситуацію при різних значеннях вихідних даних.

Об'єктом моделювання є система, що складається із двох компонент: снаряду, кинутого під кутом до горизонту, і стіни. Підібрати початкову швидкість і кут кидання так, щоб кинуте тіло (снаряд) досягнуло цілі.

Розробка моделі

Снаряд вважаємо матеріальною точкою. Опором повітря і розмірами гармати нехтуємо.

Вихідні дані:

α — кут нахилу гармати, $0 < \alpha < 90^\circ$;

V — початкова швидкість снаряда (м/с), $0 < V < 1000$;

S — відстань від гармати до стіни, $S > 0$;

h — висота стіни (м), $h > 0$.

Результатом буде одне із повідомлень: «Снаряд потрапив у стіну», «Снаряд не потрапив у стіну».

Для визначення імовірності потрапляння снаряда в стіну потрібно знайти висоту L снаряда і відстань S від гармати, потрапляння в стіну означатиме, що $0 < L < h$.

Переміщення снаряда по горизонталі і вертикалі: $x = Vt \cos \alpha$, $y = Vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$, де g — прискорення вільного падіння ($9,8 \text{ м/с}^2$).

Визначимо скільки часу буде потрібно снаряду, щоб подолати відстань S : $t = S / (V \cdot \cos \alpha)$. Підставивши це значення t у вираз для y , одержимо значення:

$$L = S \cdot \operatorname{tg} \alpha - g \cdot S^2 / (2 \cdot V^2 \cdot \cos^2 \alpha).$$

Якщо $L < 0$, то снаряд до стіни не долетить. Якщо $L > h$, то снаряд перелетить через стіну.

У режимі відображення формул таблиця виглядає так:

	A	B
1	Політ снаряда	
2	Вихідні дані:	
3	α (град.)	35
4	V	180
5	S	3000
6	h	6
7	g	9,8
8	α (радіани)	=В3*ПИ()/180
9	L	=В5*TAN(В8)-В7*В5^2/(2*В4^2*(COS(В8))^2)
10	Результат:	=ЕСЛИ(И(В9>0;В9<В6);"Снаряд попав у стіну";"Снаряд не попав у стіну")
11		

Варіанти досліджень моделі.

Вести певні значення вихідних даних і проаналізувати результат. Знайти такий кут нахилу гармати (не змінюючи інші параметри системи), при якому снаряд потрапить (не потрапить) у стіну. Знайти таку швидкість снаряда (не змінюючи інші параметри системи), при якій снаряд потрапить (не потрапить) у ціль. Вдосконалити модель таким чином, щоб результатом було одне із повідомлень: «Снаряд потрапив у стіну», «Недоліт», «Переліт».

Аналіз результатів.

Дана комп'ютерна модель дозволяє проводити обчислювальний експеримент замість фізичного. Змінюючи значення вихідних даних, можна бачити всі зміни, що відбуваються у системі, проводити розрахунок на враження цілі залежно від кута нахилу гармати і швидкості снаряду.

Задача 2. При підйомі на гору у автомобіля заглож мотор. Зупиниться автомобіль чи буде скочуватися донизу?

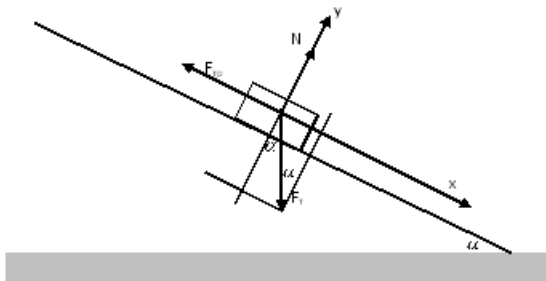
Постановка задачі.

Мета моделювання: користуючись фізичними законами руху тіла під дією кількох сил, дослідити ситуацію при різних значеннях вихідних даних.

Об'єктом моделювання є система, що складається з двох компонент: автомобіля і дороги.

Розробка моделі.

Необхідно розглянути сили, що діють на автомобіль у даній системі.



На автомобіль діють три сили: сила тяжіння $F_m = mg$, сила тертя F_{mp} і сила реакції опори N .

За першим законом Ньютона тіло знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно і рівномірно, якщо рівнодійна усіх прикладених до тіла сил дорівнює нулю, тобто $F = 0$.

на вісь x:

$$(F_m)_x = m \cdot g \cdot \sin \alpha;$$

$$N_x = 0;$$

$$(F_{mp})_x = -F_{mp}$$

Рівняння:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_{mp} = 0$$

на вісь y:

$$(F_m)_y = -m \cdot g \cdot \cos \alpha;$$

$$N_y = N;$$

$$(F_{mp})_y = 0.$$

Рівняння:

$$-m \cdot g \cdot \cos \alpha + N = 0$$

Другий закон Ньютона у векторній формі записується так: $\vec{F}_m + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = 0$. Запишемо його у скалярній формі. Для цього розглянемо проєкції сил $F_{mp} = mgs\sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha$.

Оскільки $F_{mp} = \mu \cdot N$, то $m \cdot g \cdot \sin\alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$;
 $\sin\alpha = \mu \cdot \cos\alpha$; $tg\alpha = \mu$.

Отже, якщо $tg\alpha > \mu$, то автомобіль стоятиме на місці, у іншому випадку він буде скочуватися униз. Вихідні дані: μ — коефіцієнт тертя, $0 < \mu < 1$, α — кут нахилу, $0 < \alpha < 90^\circ$. Оскільки у електронних таблицях функція знаходить значення від кута, вираженого у радіанах, то при запису формули передбачимо переведення градусної міри кута у радіанну.

```

implementation
($R *.dfm)

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
  kyt:=strtofloat(Edit1.Text);
  kyt:=kyt*pi/180;
  m:=sin(kyt)/cos(kyt);
  Edit2.Text:=''+' '+floattostr(trunc(m*100)/100);
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
  m:=strtofloat(Edit3.Text);
  kyt:=ArcTan(m);
  kyt:=180*kyt/pi;
  Edit4.Text:=''+' '+floattostr(trunc(kyt));
end;

end.
  
```

Варіант моделювання №1

Значення кута нахилу (градуси)

Коефіцієнт тертя при якому автомобіль поїде з гори **Знайти**

Варіант моделювання №2

Коефіцієнт тертя

Значення кута нахилу (градуси) при якому автомобіль стоятиме **Знайти**

Варіанти досліджень. Знайти такий коефіцієнт тертя, при якому автомобіль поїде з гори (при даному куті). Знайти такий кут, при якому автомобіль стоятиме на горі (при даному коефіцієнті тертя). Яким буде результат, якщо силою тертя знехтувати?

Аналіз результатів. Дана комп'ютерна модель дозволяє проводити обчислювальний експеримент замість фізичного. Змінюючи значення вихідних даних, можна бачити зміни, що відбуваються у системі.

Цікаво зауважити, що у побудованій моделі результат не залежить ні від маси автомобіля, ні від прискорення вільного падіння.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

Застосування інформаційних технологій при вивченні математики

Сьогодні, коли навколо нас проходить глобальна комп'ютеризація, ми захоплюємося красою і багатством створеного людиною — творцем комп'ютерного світу. Комп'ютер дозволяє не тільки вирішити складну математичну задачу, зіграти в шахи, але і створювати власну дивну музику, створювати самого себе.

Зміни, що несе із собою інформаційне століття, вимагають від усіх здатності зазирнути в майбутнє і поставити питання, які можна внести зміни у свою діяльність, у діяльність школи, щоб гідно вижити в умовах української дійсності. Україні як ніколи необхідні грамотні, освічені люди, що постійно підвищують свій творчий потенціал, що вміють працювати з інформаційними технологіями.

Загальна характеристика комп'ютерних програм по лінії застосування при вивченні курсу математики

Комп'ютерні математичні системи дозволяють швидко й ефективно проводити обчислення, розв'язувати задачі з алгебри, геометрії, математичного аналізу, статистики (знаходити межі, диференціювати, інтегрувати, будувати графіки, діаграми, зображувати стереометричні фігури). Грамотне застосування комп'ютерних технологій у навчальному процесі:

- підвищує фундаментальність математичної освіти;
- викликає інтерес до вивчення математики;
- підвищує комп'ютерну грамотність;
- стимулює розвиток дитячої творчості;
- сприяє інтеграції освітньої системи з освітніми системами найбільш розвинених країн світу, де подібні методи навчання вже застосовуються;
- дає можливість брати участь у міжнародних, дистанційних проектах.

Банк комп'ютерних програм може складатися з таких програм: Microsoft Word, Microsoft Excel, Microsoft PowerPoint, Gran2D, Gran3D, Paint, Advanced Grapher, Functor-2.5, 3D-Grapher, 3DS max 5.0,

«Курс математики-2000», Компас-3D LT 5.10, Mathematics Encyclopedia, Coreldraw, Adobe Photoshop, Mathematics Encyclopedia.

А) комп'ютерна програма Advanced Grapher (автор Michael Serpik). Унікальна програма, яка дозволяє на одній координатній площині зображувати:

- графіки функцій $f(x)$, $f(x + a)$, $f(x - a)$, $a > 0$;
- графіки функцій $f(x)$, $f(x) + b$, $f(x) - b$, $b > 0$;
- графіки функцій $f(kx + b) + c$, $|f(kx + b) + c|$, $f(|kx + b|) + c$;
- графік $y=f(x)$, одночасно визначити похідну і побудувати графік похідної;
- рішення систем рівнянь і нерівностей основного і поглибленого рівнів.

Комп'ютерна програма дозволяє вирішувати дослідницькі завдання: на визначення увігнутості, опуклості кривих, у побудові дотичної і нормалі в будь-якій точці області визначення функції, дослідження точок максимуму і мінімуму, найбільшого і найменшого значень на проміжку, визначення площі фігури, обмеженої лініям

Б) комп'ютерна програма 3DSmax 5.0. Популярна програма тривимірної комп'ютерної графіки та анімації, яка займається побудовою всіляких моделей (вид яких: стандартні примітиви, складені об'єкти, розширені примітиви, що коректують сітки, системи часток, нестандартні поверхні, динамічні об'єкти), дає можливість побачити дане геометричне тіло з різних позицій: у перспективі, зверху, спереду, ліворуч. Однією з можливостей 3DSmax 5.0 є побудова опуклих багатогранників, до яких належать: тетраедр, октаедр, додекаедр. Дуже цікавою особливістю програми є зміна параметрів сімейства гедри: тетра, куб, октаедр, зірка1, зірка2.

В) комп'ютерна програма Gran. Українська програма Gran призначена для графічного аналізу функцій. Основні функціональні можливості програми: побудова графіків функцій, обчислення значень виражень функції в заданих точках, графічне розв'язання рішення рівнянь, систем рівнянь, нерівностей і систем нерівностей. Також програма дозволяє обчислювати об'єми і площі тіл обертання. Використання програми дає можливість значно інтенсифікувати процес навчання.

Програма Gran 3D призначена для побудови базових просторових об'єктів у тривимірному просторі і їхньому детальному аналізі. Характерною ознакою є можливість обертання просторового геомет-

ричного тіла за рахунок пересування повзунків (горизонтального і вертикального). Програма дає повну характеристику об'єкта: точки максимуму, точки мінімуму, об'єм, площа поверхні, кількість вершин. У резерв програми входить можливість побудови усічених моделей (при натисканні на кнопку «Створення базових об'єктів» з'являється діалогове вікно, у якому необхідно поставити значок біля слова «усічений»).

Отже, можливості української програми Gran3D досить великі: проектування на одну з 3-х осей координат, збільшення або зменшення фігури, можливість виконувати над об'єктом різноманітні операції.

Г) комп'ютерна програма Functor-2.5. Програма для побудови графіків тривимірних функцій $Z = f(x, y)$ і їхнього детального аналізу, зміни настроювання виду графіків і систем координат. Характерною ознакою є можливість обертання просторової моделі одним рухом миші. Робота з програмою надає необмежені можливості для розвитку просторового мислення учнів.

Д) комп'ютерна програма «Курс математики-2000» (автор Л. Я. Боровский). Темі: Тригонометричні, показникові, логарифмічні тотожності, рівняння, нерівності. Кожна програма «Курсу математики» забезпечена гіпертекстовим підручником, у якому будь-яка формула або теорема обов'язково приводиться з доказом, а також ілюструється рисунком або прикладами, що дозволяє застосовувати при формуванні нових знань і способів дій, а також при актуалізації попередніх знань. Пропонується новий спосіб розв'язання задач: разом з комп'ютером, використовуючи комп'ютер як терплячого наставника, що проконтролює дії, підкаже при необхідності вірний шлях розв'язування і дасть теоретичну довідку. Для кожної особи програма веде окремий щоденник з повною статистикою по всіх задачах, що розв'язувалися, що дозволяє легко визначити теми, що вимагають додаткового опрацювання. Диск містить 450 задач для самостійного рішення.

Е) комп'ютерна програма 3DGrapher. Комп'ютерна програма дозволяє зробити побудову поверхні однієї і тієї ж функції в декартових, циліндричних і сферичних координатах. Виділити кольором. Порівняти зображення. Функції задаються в параметричному виді.

Наприклад: $x(u,v,t) = u$, $y(u,v,t) = v$; $z(u,v,t) = u^2 + v^2 + t^2$. Також є можливість одночасної ілюстрації всіх трьох видів поверхонь.

Є) комп'ютерна програма Компас-3DLT 5.10. Застосовується при вивченні курсу креслення, але може бути застосована при вивченні стереометрії (зображення фігур у тривимірному просторі, побудова їхніх перетинів). Також програма дозволяє обчислювати об'єми і площі тіл обертання й використання дає можливість значно інтенсифікувати процес навчання.

Ж) комп'ютерні програми MS Word, MS Excel, MS Power Point, Paint, Corel Draw, Adobe Photoshop. Можна застосовувати при:

- складанні коротких і повних конспектів тем (Word);
- побудові найрізноманітніших діаграм і гістограм, обчислень довжин, площ, об'ємів геометричних об'єктів (Microsoft Excel);
- виконанні творчих презентацій з окремих тем, а також навчальних презентацій для вивчення теми математики або для навчання у визначеній програмі (Microsoft Power Point);
- створення, зберігання і змінювання на комп'ютері різних зображень (рисуноків, креслень, мультиплікацій) (Corel Draw, Adobe Photoshop).

З) комп'ютерна програма Corel Draw. Corel Draw — векторний графічний редактор. За допомогою векторної графіки можна легко й швидко малювати об'єкти простої геометричної форми. У векторному способі кодування геометричні фігури криві й прямі лінії, що складають рисунок, зберігаються в пам'яті комп'ютера у вигляді математичних формул і геометричних абстракцій — круг, квадрат, еліпс тощо. За допомогою математичних формул можна описати найрізноманітніші фігури.

Дослідження тем алгебри і початків аналізу, геометрії на необхідність застосування інформаційних технологій

Тема: Похідна. Застосування похідної (використання програм Advanced Grapher, Gran). Розглядаються можливості:

- побудова графіка функції і графіка її похідної на одній координатній площині на екрані комп'ютера; дослідження залежності проміжків зростання, спадання функції від знаку похідної;
- зображення графіка функції, дотичної і нормалі в даній точці; обґрунтування геометричного змісту похідної;
- побудова графіка функції і графіка другої похідної; дослідження функції на вгнутість і опуклість у залежності від знаку другої похідної;

— проведення повного аналітичного дослідження функції за допомогою похідної, побудова графіка функції в зошиті з наступним порівнянням його на екрані комп'ютера;

— дослідження точок максимуму, мінімуму, перегину на зміну знаку в межах цих точок.

Тема: Первісна й інтеграл (використання програм: Advanced Grapher, Gran). Розглядаються можливості:

- — побудова графіка функції і графіків сукупності первісних даної функції; обґрунтування геометричного змісту основної властивості первісних;

— зображення й обчислення площі фігури, обмеженої лініями аналітично і за допомогою комп'ютера;

— обчислення визначеного інтеграла;

дослідження завдань, що приводять до поняття інтеграла;

— геометричний зміст загального вигляду первісної для показникової, логарифмічної та степеневої функцій;

— формула Ньютона-Лейбніца; геометричний зміст.

Тема: Тригонометричні, логарифмічні і показові функції (використання програм Advanced Grapher, Gran, Functor-2.5, 3D-Grapher). Розглядаються можливості:

— побудова графіків функцій $y = f(x)$, $y = f(x + a)$, $y = f(x - a)$, $a > 0$;

— графіків функцій $y = f(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x) - b$, $b > 0$;

— графіків функцій $y = f(kx + b) + c$, $y = |f(kx + b) + c|$, $y = f(|kx + b|) + c$. Провести дослідження виду графіків у залежності від коефіцієнтів a , b , c і положення модуля. Обґрунтувати висновки.

Тема: Тригонометричні, логарифмічні і показникові рівняння, нерівності і системи (використання програм «Курс математики-2000», Advanced Grapher, Gran). Розглядаються можливості:

— графічне розв'язання рівнянь і систем рівнянь; дослідження кількості розв'язань;

— графічне розв'язання нерівностей і систем нерівностей; обґрунтування виду зображення на екрані комп'ютера;

— розв'язання дослідницьких завдань з комп'ютерної програми «Курс математики 2000»;

— дослідження параметричних рівнянь.

Тема: Багатогранники і круглі тіла (використання програм Microsoft Word, Microsoft Excel, Microsoft PowerPoint, Gran3D, Paint, 3DS max 5.0, Компас-3D LT 5.10). З огляду на властивості проектування можна виконати:

- зображення стереометричних фігур;
- зображення перетинів багатогранників;
- зображення комбінацій багатогранників;
- зображення опуклих, зірчастих багатогранників.

Обчислити: довжини, площі, обсяги геометричних об'єктів.

Тема: Декартові координати в просторі (використання програм Functor-2.5, 3D-Grapher). Розглядаються можливості:

- досліджувати координатні системи: декартові, циліндричні і сферичні; установити загальні і відмінні ознаки;
- побудувати в трьох координатних системах одну функцію; досліджувати вид зображених поверхонь.

Використанням програмних засобів при вивченні математики

Враховуючи, що сьогодні темп розвитку суспільства надзвичайно високий, переконуємося, що треба встигати за змінами. Необхідно опрацьовувати величезні масиви інформації, яка надходить з усіх точок земної кулі, відкривати широкі перспективи щодо гуманітаризації освіти і гуманізації навчального процесу. Це неможливо без поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам практичного значення. Особливу роль слід відводити активізації пізнавальної діяльності, створенню умов для повного розкриття творчого потенціалу з урахуванням їхніх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей. Не можна не прийти до висновку, що на заняттях математики потрібно більш широко застосовувати програмні засоби, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності.

Тому на заняттях можуть бути використані такі програмні засоби навчання: GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D. Ці програмні засоби стають помічниками при розгляді багатьох тем, як з алгебри, так із геометрії. Завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі чітко і легко розв'язуються досить складні задачі, відновлюються в пам'яті відповідно системи понять і правил. Викори-

стання подібних програм дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язування задач настільки ж доступним, як і просте розглядання рисунків чи графічних зображень.

Такий підхід до вивчення математики дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв'язувати задачу. Відповідні програми перетворюють окремі розділи і методи математики в «математику для всіх», що робить їх доступними, зрозумілими, легкими і зручними для використання. Наведемо приклади використання програмних засобів навчання при вивченні окремих тем.

Тема: Обчислення визначених інтегралів (програмне забезпечення GRAN-2D; послуга Обчислення Інтеграл). Для обчислення

значень визначених інтегралів виду $\int_a^b f(x)dx$ від неперервних на про-

міжку $[a, b]$ функцій виду $y = f(x)$ призначено послугу **Обчислення Інтеграл**. На вкладці **Інтеграл** вікна **Обчислення**, що з'явиться, у полі біля напису $f(x) =$ необхідно ввести вираз підінтегральної функції, а у полях біля написів $a =$ та $b =$ вказати значення нижньої та верхньої меж інтегрування. Після введення даних для виконання обчислення необхідно натиснути кнопку **Обчислити**, після чого результат буде виведено у поле **Результат обчислення**.

Інтеграл обчислюється наближено за методом **трапецій**, що полягає в заміні графіка залежності $y = f(x)$ ламаною лінією над відрізком $[a, b]$. При цьому відрізок $[a, b]$ ділиться на n частин, після чого на-

ближено покладається $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} h,$

$h = \frac{(b-a)}{n}, x_0 = a, x_n = b, x_k = x_0 + kh$. Кількість точок поділу інтегрування (n) можна задати при налагодженні програми.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = 10$, $y = 0$, $y = |x \sin(x)|$, тобто обчислити інтеграл $\int_0^{10} |x \sin x| dx$.

Розв'язування. На вкладці **Інтеграл** вікна **Обчислення** введемо у поле біля запису $f(x) =$ вираз $\text{abs}(x * \sin(x))$, а у поля біля написів

$a =$ та $b =$ введемо відповідно 0 та 10. Після натискання кнопки *Обчислити* отримаємо результат $29.852 \approx 30$. Відповідь: 30.

Приклад 2. Обчислити площу поверхні тіла обертання, що утворюється обертанням навколо осі Ox кривої $y = \frac{x}{3} + \cos(2x) + 3$ на проміжку від $-\pi$ до π .

Розв'язування. Оскільки площа поверхні, що утворюється обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ в межах від точки $(af(a))$ до $(bf(b))$, обчислюється за формулою $S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, то

необхідно обчислити інтеграл $2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{x}{3} + \cos 2x + 3 \right| \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} - 2 \sin 2x \right)^2} dx$.

На вкладці *Інтеграл* вікна *Обчислення* введемо у поле біля напису $f(x) =$ вираз $2 * \pi * \text{abs}(x/3 + \cos(2 * x + 3)) * \text{sqrt}(1 + (1/3 - 2 * \sin(2 * x))^2)$, а у поля біля написів $a =$ та $b =$ введемо відповідно $-\pi$ та π . Після натискання кнопки *Обчислити* отримуємо результат $203.3 = 2E2$. Відповідь: 203,3.

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = 3$, $x = 3.5$, $y = 0$, $y = x^{1.5}$, тобто обчислити інтеграл $\int_3^{3.5} x^{1.5} dx$.

Розв'язування. На вкладці *Інтеграл* вікна *Обчислення* введемо у поле біля напису $f(x) =$ вираз $x^{1.5}$, а у поля біля написів $a =$ та $b =$ введемо відповідно 3 та 3.5. Після натискання кнопки *Обчислити* отримуємо результат $2.932 \approx 2,9$. Відповідь: 2,9.

Тема: Обчислення об'ємів та площ поверхонь тіл обертання (програмне забезпечення GRAN). Об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням лінії, описуваної рівнянням виду $y = f(x)$, навколо осі Ox , і площинами $x = a$, $x = b$, можна обчислити також, скориставшись послугою «*Інтеграл*» для обчислення визначеного інтегралу виду $\int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$, значення якого і буде значенням шуканого об'єму.

Об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням лінії, описуваної рівнянням виду $y = f(x)$, навколо осі Oy , і площинами

$y = c, y = d$, можна обчислити також, скориставшись послугою «Інтеграл» для обчислення визначеного інтегралу виду

$$\int_c^d \pi x^2 dy = \int_a^b \pi f^1(x) x^2 dx, \text{ де } a \text{ і } b \text{ такі, що } f(a) = c, f(b) = d, \text{ або}$$

$$\int_c^d \pi (g(y))^2 dy, \text{ де } g(y) \text{ — функція, обернена до } f(x). \text{ Об'єм тіла, що}$$

утворюється обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = f(x), x = a, x = b, y = 0$ (при $f(x) \geq 0$) можна обчислювати за форму-

лою $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$. Площа поверхні, що утворюється обертанням навко-

ло осі Ox кривої $y = f(x)$ в межах від точки $(a, f(a))$ до $(b, f(b))$, обчис-

люється за формулою $S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Крива опису-

ється рівнянням виду $x = \varphi(t), y = \phi(t)$, тоді за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi \phi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2} dx.$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, що обмежений поверхнею, утвореною обертанням кривої $y = x/3 + \cos(2x) + 3$ навколо осі Ox в межах від $x_1 = -3,14$ до $x_2 = 3,14$.

Алгоритм розв'язування.

1. Побудуємо графік заданої функції: *Об'єкт /Нова функція/ Вікно «Графік/» «Введіть вираз» $y = x/3 + \cos(2 * X) + 3$ / Вікно «Графік/» / відрізок визначення $A = -3,14; B = 3,14$ / Графік/ Побудувати/. У вікні «Графік» з'явиться графік функції $y = x/3 + \cos(2x) + 3$ на відріжку $[-3,14; 3,14]$.*

2. *Інтеграл/ Об'єм, вісь Ox /, вказати межі інтегрування $a = -3,14; b = 3,14$. У результаті одержимо об'єм тіла.*

Відповідь: $V = 195.269559348$ куб. од.

Тема: Програмне забезпечення GRAN-3D. У програмі GRAN-3D передбачено обчислення об'ємів та площ поверхонь тіл обертання, твірні яких обертаються навколо осі Ox або Oy у прямокутній Декартовій системі координат та задаються одним із трьох способів:

1) у вигляді явної залежності між змінними x і y : $y = f(x)$;

2) у вигляді параметрично заданої залежності між змінними x і y :
 $x = f(t)$, $y = g(t)$, де t — змінна-параметр;

3) у вигляді плоскої ламаної, що задається послідовністю своїх вершин у площині xOy .

Площа поверхні, що утворюється обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ в межах від точки $(a, f(a))$ до $(b, f(b))$, обчислюється за формулою

$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, а об'єм, що нею обмежений,

за формулою $V = \int_f^b \pi(f(x))^2 dx$. Якщо обертання відбувається навколо

осі Oy , то формули набувають вигляду $s = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$,

$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$ (при $f(x) \geq 0$).

Крива описується рівнянням виду $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, тоді за формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi \phi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2} dx$, а об'єм $V = \int_{t_1}^{t_2} \pi [\phi(t)]^2 \varphi'(t) dt$, де t_1, t_2 — значення параметра t , що відповідають кінцевим точкам A та B кривої.

При обертанні кривої навколо осі Oy площа поверхні тіла обертання та його об'єм обчислюють за формулами

$S = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi \varphi(t) \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2} dt$, $V = \int_{t_1}^{t_2} \pi [\varphi(t)]^2 \phi'(t) dt$.

Робота з програмою Advanced Grapher 2

Побудова графіків функцій. Розв'язування рівнянь та нерівностей

Зручною у використанні і з цілою низкою корисних властивостей є програма Advanced Grapher. За допомогою цієї програми можна будувати графіки функцій, обчислювати значення функцій, проводити дослідження функцій. Вдалим є те, що можна будувати графіки кількох функцій в одній системі координат, змінюючи при цьому колір лінії графіка та її товщину. Використовуючи готові графіки, не важко навчитися «зчитувати» властивості відповідних функцій: проміжки

монотонності, знакосталості, точки екстремуму, розв'язувати нерівності $f(x) < 0$ ($f(x) > 0$) тощо.

Варто зазначити, що таку роботу доцільно проводити не у мультимедійному, а у комп'ютерному класі, бажано разом із викладачем інформатики, який міг би закріпити та оцінити вміння користуватися можливостями програми Advanced Grapher.

Вирази в Advanced Grapher складаються із змінних, констант, чисел і функцій від них, з'єднаних операторами.

Оператори

арифметичні оператори: +, -, *, /, ^ (піднесення до степеня).

Приклад: $2+2^3=10$.

оператори відношення: >, <, >=, <=, =, <>.

Функції. При використанні функцій необхідно використовувати синтаксис <Ім'я функції>(<Аргумент>). *Приклади:* $\sin(x+2)$; $\ln(\ln(1/x))$; $\sin(x)^3$. Advanced Grapher підтримує наступні функції:

sin — синус	abs — модуль числа
cos — косинус	sqrt — квадратний корінь
tan — тангенс	ln — натуральний логарифм
cot — котангенс	lg — десятковий логарифм
asin — арксинус	exp — експонента ($\exp(x)$ — е в степені x)
acos — арккосинус	
atan — арктангенс	

Константи. У виразах можна використовувати константу Pi . Якщо потрібно використати константу e , треба ввести exp .

Змінні. Можна використовувати одну або дві змінні, наприклад, X , Y , A або T (залежно від ситуації).

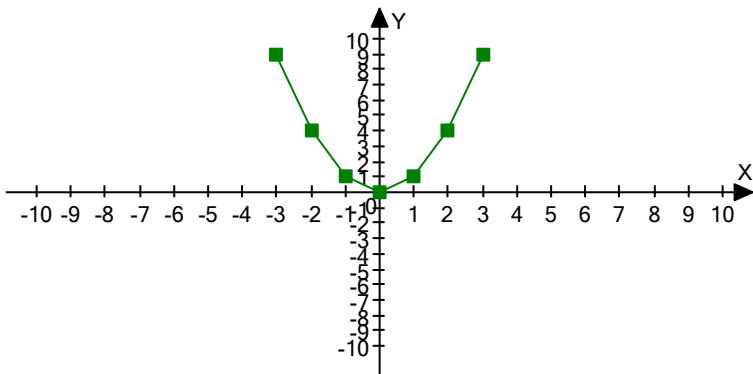
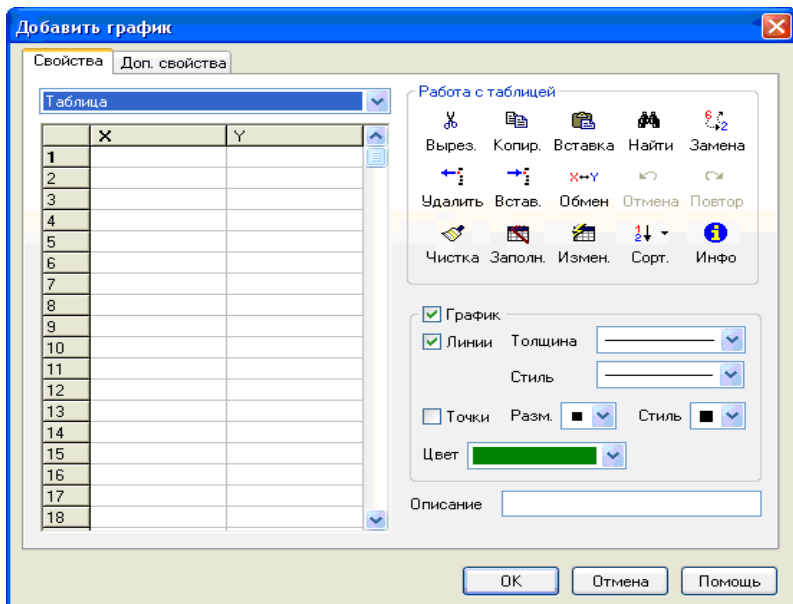
Додаткова інформація. Можна пропускати знак множення. *Приклади:* xy , $(x+1)(5y+x)$, xx , $x\sin(x)$.

Побудова графіків. Advanced Grapher має потужні засоби для управління графіками. Можна легко створювати, видаляти, дублювати графіки, змінювати їх властивості та порядок у списку графіків.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = x^2$ по точках, за допомогою таблиці.

На панелі інструментів натискаємо кнопку «Добавить график», «таблицы». З'являється таблиця, в якій записуємо значення абсцис і

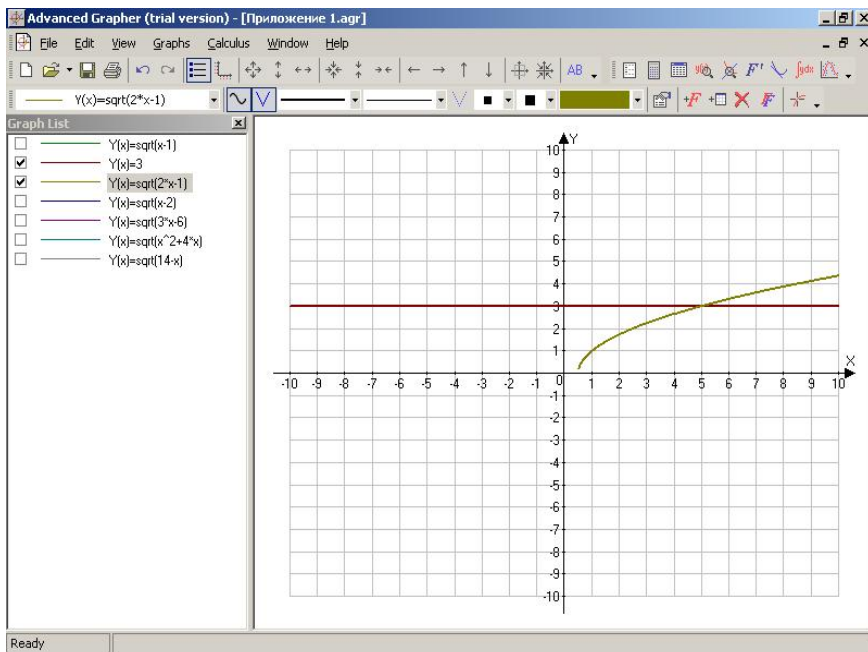
ординат графіка. Справа робимо помітку у віконці «точки». Натискаємо ОК.



Приклад 2. В одній системі координат побудувати графіки функцій $y = \sqrt{2x - 1}$ і $y=3$ та знайти точки їх перетину.

1. Клацаємо кнопку на панелі інструментів «График»; або + F. У віконці «Формула» записуємо $y = \text{sqrt}(2 * x - 1)$. Вибираємо потрібний

колір, товщину і стиль. Натискаємо *OK*. На екрані з'явиться графік даної функції.



2. Аналогічно побудуємо графік другої функції $y = 3$.

3. Клацаємо на панелі інструментів «Пересечение» і у віконці $U1(x)$ = вводимо першу функцію, а у віконці $U2(x)$ = — другу.

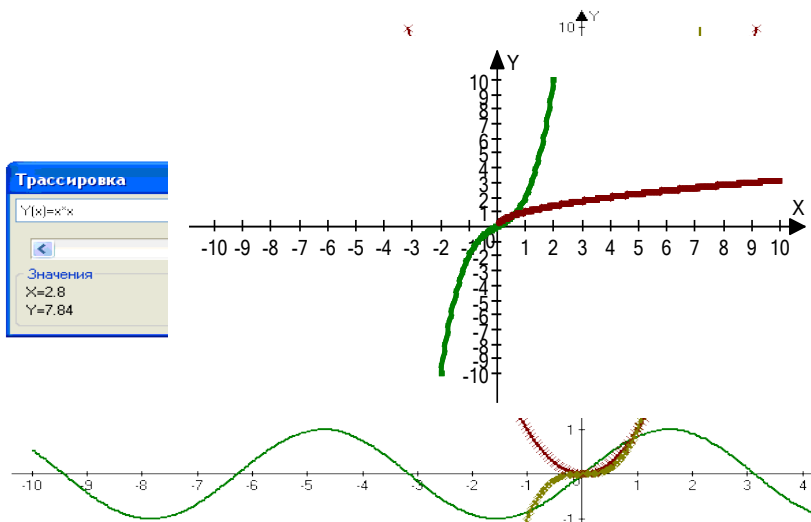
4. Підписуємо назву функції «Правка» — «Добавить метку».

Проставляємо параметри (межі, в які входять точки перетину).
OK.

На екрані з'явиться таблиця з указаними точками перетину.

Щоб видалити графік, на панелі інструментів натискаємо на віконечко «Удалить график»

Окремо хочеться виділити можливість відображати ділянку графіка, а також функцію трасування — можливості візуально переглянути процес побудови графіка, переміщаючи повзунок у відповідному діалоговому вікні, там відображається і значення функції у цій точці. Також важливо відзначити можливість обчислення визначеного інтеграла з функцією визначення як числового значення, так і отримання області, що інтегрується (по якій визначається площа).



Розв'язування рівнянь. За допомогою програми Advanced Grapher зручно розв'язувати рівняння і системи рівнянь. Відомо, що рівняння іноді простіше розв'язати графічно ніж алгебраїчно. Для цього необхідно побудувати графік функції, розміщений в лівій частині рівняння, а потім в правій. Абсциси точок перетину будуть розв'язком даного рівняння.

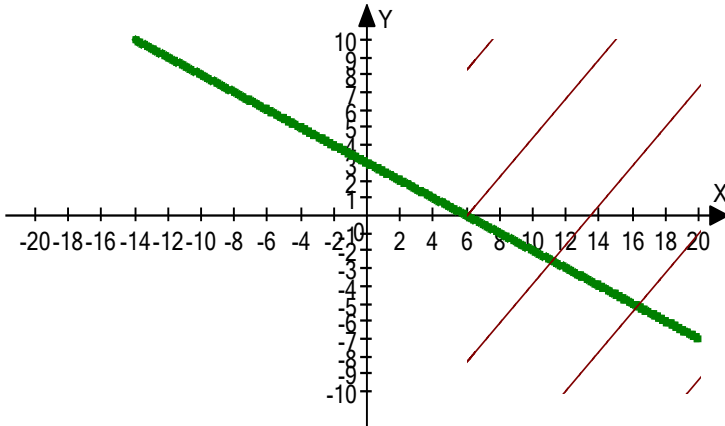
Приклад 3. Розв'язати рівняння: $x^3 = \sqrt{x}$. Побудуємо графіки функцій: $y = x^3$ і $y = \sqrt{x}$ та знайдемо точки їх перетину. (Алгоритм побудови графіків функцій і знаходження точок їх перетину дивись у Прикладі 2).

Для розв'язування систем рівнянь треба з кожного рівняння виразити y і потім будувати графіки. Наприклад, щоб побудувати коло $x^2 + y^2 = 25$, виражаємо y : $y = \sqrt{25 - x^2}$ і $y = -\sqrt{25 - x^2}$ та будуємо два півкола. Приклад уроку з розв'язанням систем рівнянь наведено нижче.

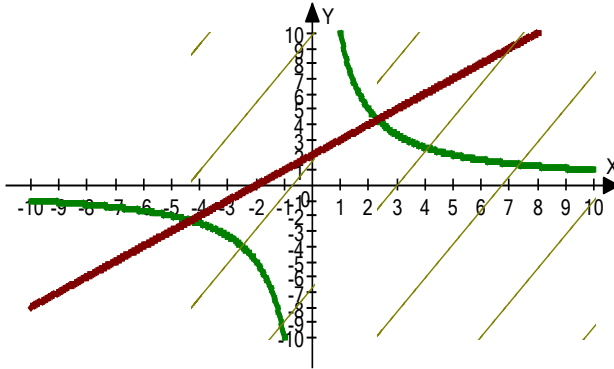
Розв'язування нерівностей. При розв'язуванні лінійних нерівностей за допомогою програми Advanced Grapher бачимо графічну інтерпретацію розв'язку. Вираз набуває від'ємних значень, якщо графік функції записаний зліва, знаходиться нижче осі OX .

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $7 - 0,5x < 0$. Алгоритм:

1. На панелі інструментів натискаємо + F і вводимо функцію $y = 7 - 0,5x$.
2. Клацаємо у першому віконці, шукаємо запис «уравнение или неравенство» і натискаємо ліву кнопку миші. У другому віконці вводимо нерівність + ОК.
3. На екрані з'явиться рисунок.



Приклад 5. Розв'язати нерівність $10/x < x + 2$. Для розв'язання за допомогою програми будують графік функції зліва, потім — функції справа. Оскільки програма може розв'язувати тільки нерівності виду $<, > 0$, то на третьому кроці треба всі доданки перенести вліво і записати у віконці таку нерівність: $10/x - x - 2 < 0$ (див. приклад 4). Розглядаючи рисунок, слід пояснити, чому заштриховані саме ці області. Комп'ютер робить штрихи на тих проміжках, де графік функції $y = x + 2$ знаходиться вище графіка функції $y = 10/x$.

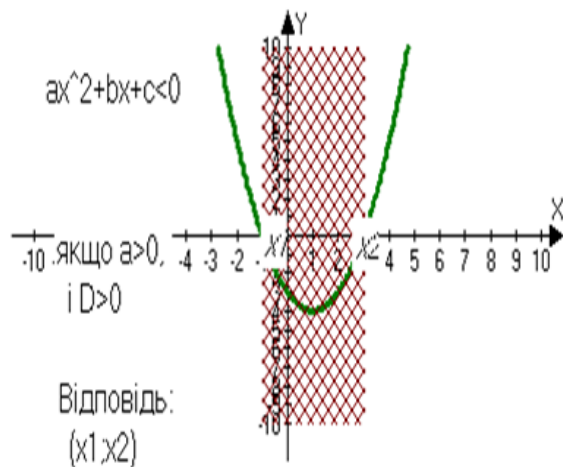
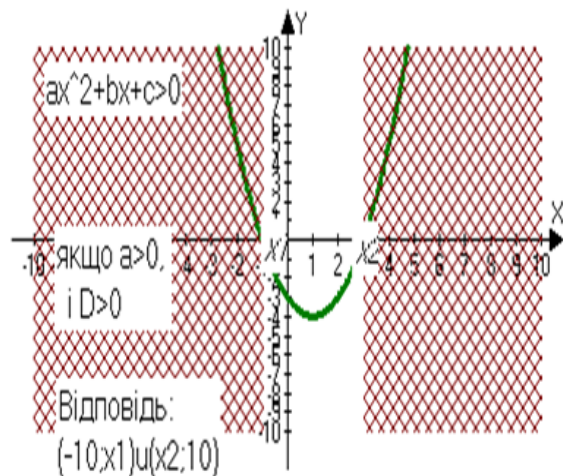


Ця програма — гарний інструмент в руках викладача при вивченні теми «Квадратні нерівності». Ми знаємо, що кількість розв'язків нерівності залежить від розміщення параболы в системі координат і знаку нерівності. А таких можливостей є велика кількість. Тому на першому занятті можна використати інтерактивну дошку чи комп'ютерний клас для показу презентації, яку швидко і легко можна зробити за допомогою програми Advanced Grapher.

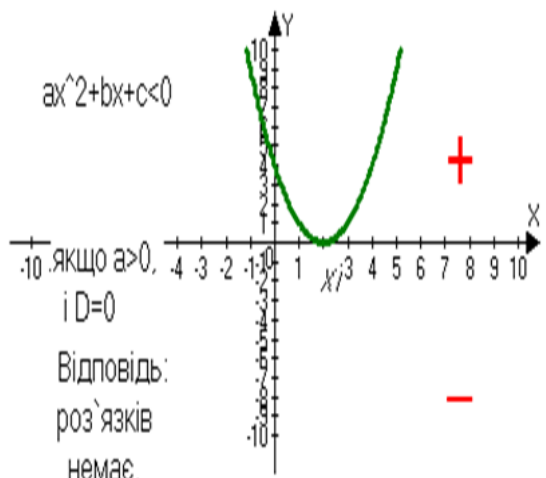
Приклад можливої презентації.

Розв'язування
квадратичних нерівностей

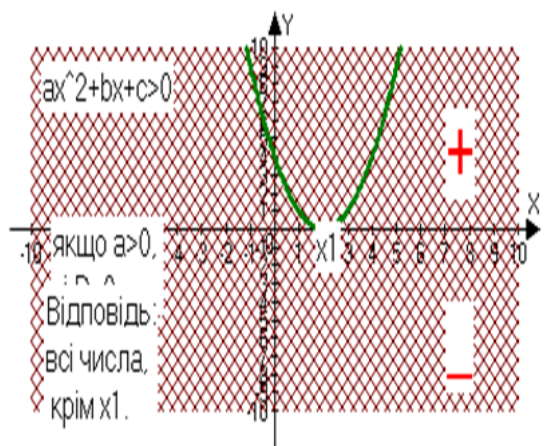
Графічний спосіб

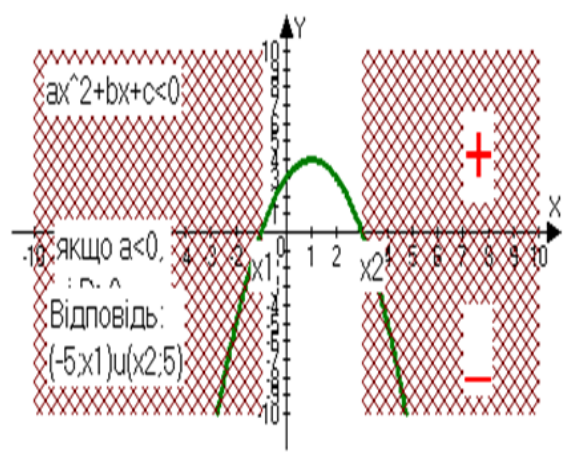
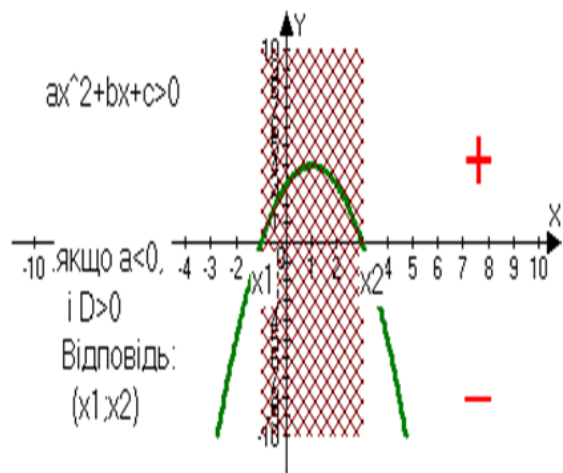


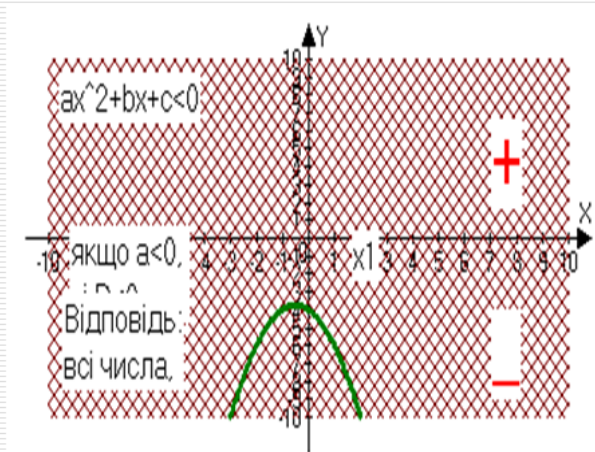
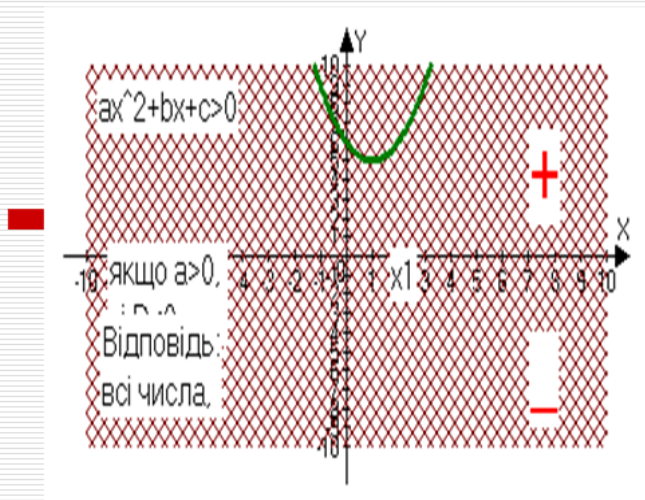
$$ax^2+bx+c < 0$$

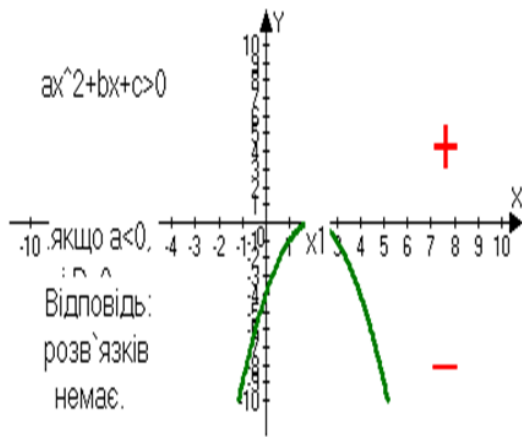
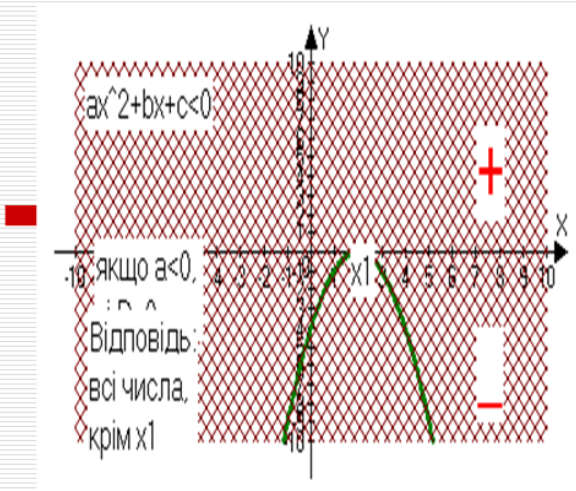


$$ax^2+bx+c > 0$$







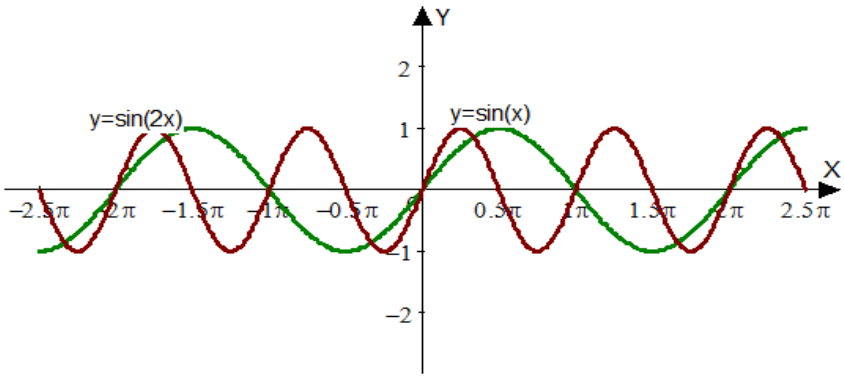


Перетворення графіків функцій

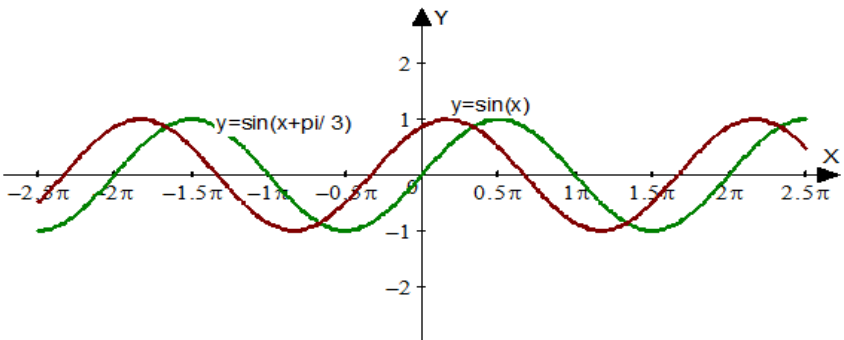
Цю тему використовують доволі часто, наприклад, після вивчення квадратичних функцій, а потім тригонометричних. Для перетворення тригонометричних функцій у пригоді стає програма Advanced Grapher. При побудові великої кількості графіків можна легко зрозуміти характер перетворень в залежності від аргументу і числового коефіцієнта. Але перш ніж перейти до роботи з тригонометричними функціями, слід змінити інтервали по осі абсцис (треба, щоб позначки були в радіанах). Для цього вибираємо на панелі інструментів віконечко «Графіки», клацаємо лівою кнопкою миші і вибираємо «Набор свойств», а потім «Тригонометрический набор».

Приклад 6. Побудувати графіки функцій:

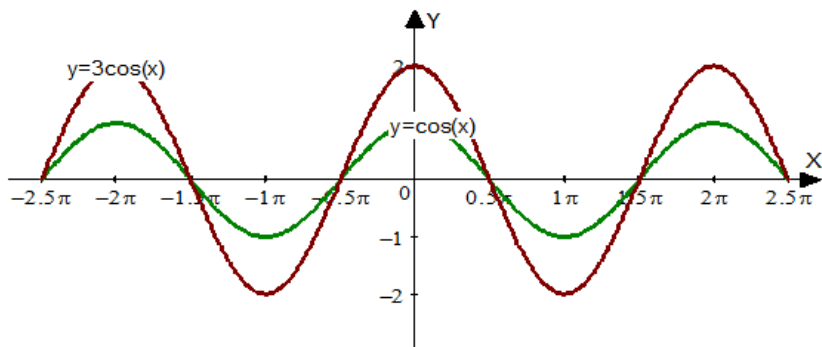
$$y = \sin(2x).$$



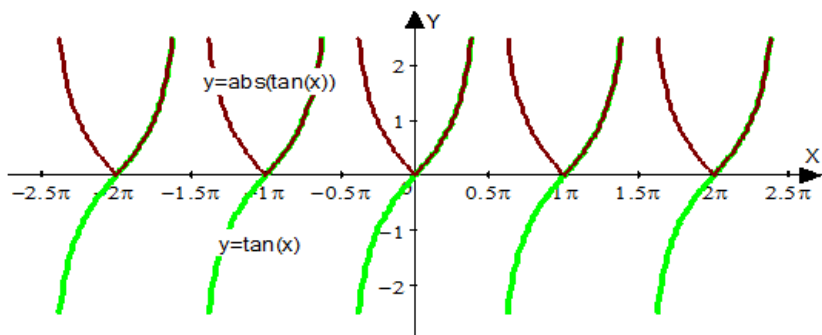
$$y = \sin(x + \pi/3)$$



$$y = 3\cos(x)$$



$$y = \text{abs}(\tan(x))$$



Побудова дотичної до графіка функції

При вивченні теми «Похідна» за допомогою цієї програми можна не тільки будувати графіки функцій, але й досліджувати їх (знаходити екстремуми та нулі функції). Для цього на панелі інструментів вибираємо вікно «*Исследование функции*» і вводимо функцію, яку треба дослідити. Вчимося знаходити рівняння дотичної до графіка функції в точці за допомогою формули $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Приклад 7. Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 + 2$, в точці $x_0 = 1$. Щоб побудувати дотичну і записати її рівняння на комп'ютері, робимо такі дії:

- 1) клацнути у вікні + F і *вводити* дану функцію;

2) клацнути у вікні «Касательная или нормаль», вводити точку дотику і натискати «Добавить график».

виконання вправи в зошиті
 $y = x^3 + 2$

виконання вправи на комп'ютері

Запишемо рівняння дотичної:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1. $f(x_0) = f(1) = 3$

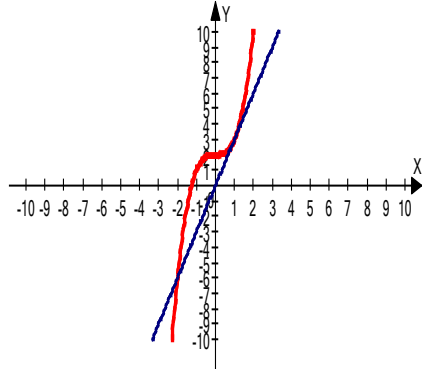
2. $f'(x) = 3x^2$

3. $f'(x_0) = f'(1) = 3$

підставимо у рівняння:

$$\begin{aligned} y &= 3 + 3(x - 1) = \\ &= 3 + 3x - 3 = 3x \end{aligned}$$

Відповідь: $y = 3x$



Знаходження площ плоских фігур

Програма дозволяє знаходити площі криволінійних трапецій та фігур, обмежених декількома графіками функцій, за допомогою визначеного інтеграла.

Приклад 8. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:
 $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

Алгоритм:

1. Побудова графіків.

а) «Графики» — «Добавить график». У вікні «Формула» ввести формулу функції, вибрати товщину лінії + ОК;

б) для позначення степеня використовувати знак ^ (наприклад, x^4 запишеться x^4);

в) підписати назву функції: «Правка» — «Добавить метку».

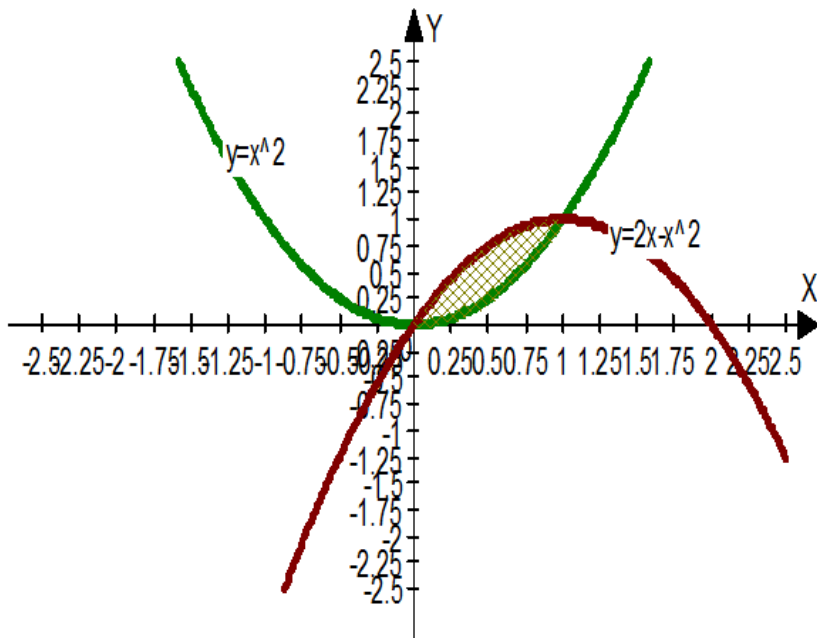
2. Знаходження точок перетину:

а) «Пересечение», у полі «Формула» введіть формули даних функцій + ОК (з'явиться таблиця з координатами точок перетину, які і будуть межами інтегрування);

3. Обчислення визначеного інтеграла (знаходження площі).

а) «*Интегрирование*», вводимо параметри, у верхньому вікні — функцію, що обмежує графік зверху, у нижньому вікні — функцію, що обмежує графік знизу;

б) у віконечках «*Минимум*», «*Максимум*» вводимо межі інтегрування; натискаємо «*Считать*»



Використання презентацій на уроках математики

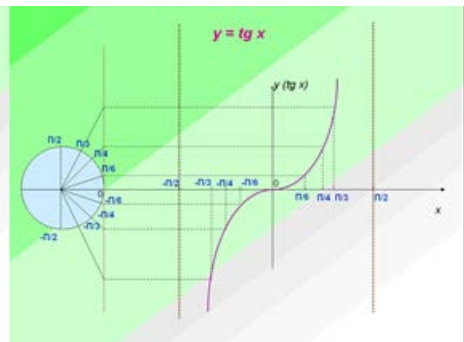
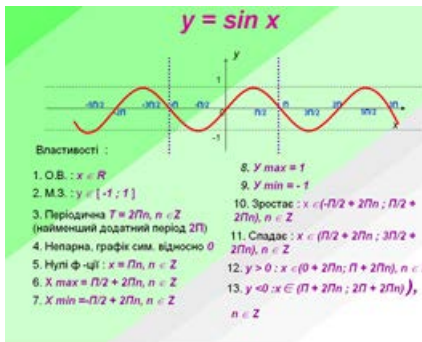
Найдоступнішими і самими поширеними технологіями є застосування табличного процесора MS Excel, програми для створення презентацій Microsoft PowerPoint, пакета динамічної геометрії DG, контрольно-діагностичної системи Test-W. Кожен елемент із зазначеного переліку програмних засобів є достатньо досконалим у своєму роді. Вважаємо, що використовуючи їх на занятті по черзі або разом, можна значною мірою підвищити ефективність навчально-виховного процесу. Програма для створення презентацій Microsoft PowerPoint є універсальним видом наочності і може бути застосованою на занятті

будь-якого типу. Та найефективнішим є підготовка та використання презентацій на таких етапах вивчення математики:

- ✓ заняття-лекції для пояснення нової теми, де не тільки слухають, продивляються інформацію на екранах, конспектують, а й відповідають на запитання, розв'язують задачі за наведеним зразком;
- ✓ для контролю набутих теоретичних знань: на екрані містяться запитання з наступною появою правильної відповіді для самоконтролю;
- ✓ для виконання тестових завдань з наступною появою правильною відповіді після його виконання;
- ✓ для проведення усного рахунку;
- ✓ інтегровані заняття з математики з іншими предметами;
- ✓ заняття-подорожі та інше.

Прикладом демонстраційного супроводу під час пояснень на занятті є презентація теми «Тригонометричні функції».

Пояснення супроводжується інформацією на слайдах, що є не тільки яскравою динамічною ілюстрацією, а й способом фіксації найсуттєвішого у новому матеріалі. Властивості першої тригонометричної функції викладач пояснює сам, для другої — залучає аудиторію до пояснень за готовим рисунком. Для прикладу надані слайди з властивостями двох тригонометричних функцій.



Саме використання мультимедійної дошки дає можливість пропонувати неординарні, частково-пошукові завдання на визначення закономірностей, на знаходження принципу розташування чисел, математичні кросворди, різноманітну наочність, супроводжувати звуковими ефектами, економить час на виконання геометричних побудов. А все

це надає можливість показати математику з найпривабливішого боку, викликати радість і задоволення від занять розумовою працею, зацікавити предметом.



Робота в аудиторії має свою специфіку, оскільки поряд з навчальною ігровою діяльністю займає в ній важливе місце. Навчальні ігри мають на меті, крім засвоєння навчального матеріалу, вмінь і навичок, ще й надавати можливість самовизначення, розвитку творчих здібностей, сприяють емоційному піднесенню змісту навчання.



Дидактична гра "Склади слово"

- Розв'яжіть приклад і результат кожної дії поставте у відповідність літері чарівного квадрата. У результаті ви потрапите ще на одну сторінку Червоної книги

$$5\frac{1}{5} \div 1,3 + 2 \cdot \left(5\frac{1}{7} + 1\frac{1}{2} - 2\frac{3}{14} \right)$$

$8\frac{6}{7}$	4	
О	Л	
$12\frac{6}{7}$	$6\frac{9}{14}$	$4\frac{3}{7}$
З	П	О

Досить ефективно використовувати слайди для проведення тестування з наступною появою правильних варіантів відповідей після їх виконання. На екран проєктується тест, після виконання якого можна обмінюватися зошитами і здійснювати взаємоперевірку.

Систематичне використання комп'ютерних презентацій на заняттях знімає актуальне питання наочності з математики. Більше того,

постає інше питання — чи варто витратити невеликі освітні ресурси для придбання наочності, зокрема традиційних таблиць, плакатів тощо, якщо можна подати їх у вигляді презентації.

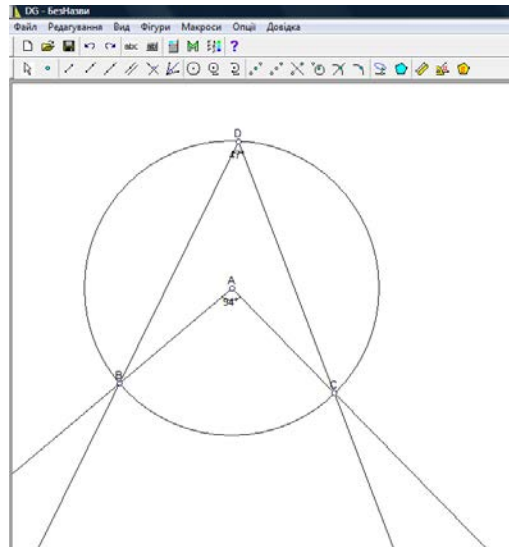
Тестові завдання

Яку з наступних дій треба виконати, щоб знайти корінь рівняння?

1. $9x=63$ а) $63-9$; б) $63+9$; в) $63:9$; г) $63\cdot 9$.
2. $72:y=8$ а) $72\cdot 8$; б) $72:8$; в) $72-8$; г) $72+8$.
3. $x:11=22$ а) $22:11$; б) $22+11$; в) $22-11$; г) $22\cdot 11$.
4. $40-x=16$ а) $40+16$; б) $40-16$; в) $40:16$; г) $40\cdot 16$
5. $c-11=22$ а) $22-11$; б) $22+11$; в) $22:11$; г) $22\cdot 11$
6. Який з виразів відповідає умові "сума частки чисел 63 і 7 та 21":
а) $63\cdot 7+21$; б) $63:(7+21)$; в) $63+7\cdot 21$; г) $62\cdot 7+21$.
7. Яка з рівностей виражає розподільну властивість множення?
а) $a\cdot b=b\cdot a$; б) $(a+b)c=ac+bc$; в) $a\cdot (bc)=(ab)\cdot c$; г) $(ab):c=a:c\cdot b$
8. Яке з наведених рівнянь має корінь 24?
а) $x-6=30$; б) $x:6=30$; в) $x-6=30$; г) $30-x=6$.
9. Яке з поданих рівнянь відповідає розв'язанню задачі?
З двох сіл, відстань між якими 44 км, назустріч одне одному вийшли два велосипедисти і зустрілися через 2 години. Знайти швидкість першого велосипедиста, якщо швидкість другого дорівнює 12 км за годину.
а) $(12+x)\cdot 2=44$; б) $(x-12)\cdot 2+44$; в) $2x=44+12\cdot 2$; г) $(12-x)\cdot 2=44$.
10. Який з поданих способів є найзручнішим для обчислення виразу $125\cdot 13\cdot 8$?
а) $(125\cdot 8)\cdot 13$; б) $(125\cdot 13)\cdot 8$; в) $(13\cdot 8)\cdot 125$.
11. Виберіть з наведених добутків найбільший:
а) $245\cdot 4\cdot 25$; б) $245\cdot 20\cdot 4$; в) $10\cdot 245\cdot 10$; г) $245\cdot 10\cdot 12$.

За допомогою ПК зручно проводити поточне оцінювання у вигляді тестів. Для цього можна використовувати програму створення тес-

тів TESTW. Вихідний тест може мати будь-яку кількість питань (рекомендується від 30 до 50 і більше). З вихідного тесту методом випадкового вибору послідовно виводиться задана кількість питань (наприклад, 25). Таким чином, кожен одержує свій відмінний від сусіда набір питань, що забезпечує індивідуалізацію і об'єктивність оцінки. На кожне питання тесту пропонується 5 варіантів відповідей, серед яких від одного до трьох вірних. Треба вказати правильні і перейти до наступного питання. Час відповіді на тест обмежений. Рекомендується проводити тестування на протязі 10-15 хвилин для кількості питань 20-25.



На замовлення Міністерства освіти й науки України було розроблено програмні засоби навчального призначення, в тому числі з математики. Коли постає питання створення рисунків геометричних фігур, розв'язування задач на побудову, проведення досліджень властивостей геометричного місця точок площини, пропонуємо використовувати пакет динамічної геометрії. Наприклад, при вивченні теми «Кути, вписані в коло» можна провести заняття навчального дослідження, на якому запропонувати різним групам за допомогою програмного середовища дослідити залежність величин вписаного й центрального кутів, якщо вони спираються на спільну дугу; дослідити величини вписаних кутів, які спираються на одну і ту саму хорду; перевірити, що

кут між хордою AB і дотичною до кола, що проходить через точку A , дорівнює половині дуги AB . Після виконання роботи доповідач від кожної групи звітує про її роботу. Перед проведенням такого дослідження на занятті потрібно ознайомитися з роботою даного програмного середовища.

Вважаємо, що тісна співпраця викладачів математики та інформатики якісно змінює результати з обох дисциплін. Викладання математики при цьому набуває більш динамічної форми, а інформатика стає прикладною.

Моделювання в алгебрі

Найбільш досконалим і разом з тим найбільш ефективним засобом є засіб створення математичних моделей тих процесів і явищ, які вивчаються. Саме цей шлях моделювання відкриває двері для застосування могутніх засобів математичного аналізу, так як по самій своїй природі математичні методи не можуть додаватися безпосередньо до дійсності, а тільки до математичних моделей того чи іншого кола явищ. Зрозуміло, що результати дослідження такої моделі будуть мати практичний інтерес, якщо сама модель адекватно або достатньо добре відображає реальну ситуацію. Для більш точного опису дійсності доводиться будувати більш складні і точні математичні моделі, враховуючи всі властивості явища, яке розглядається. Досконалість математичних моделей, які застосовують у тій чи іншій науці, математичний апарат, який використовують для їх дослідження, певною мірою характеризують рівень розвитку науки.

Задача 1. У математиці багато задач, пов'язаних із обчисленням похідних функцій і використанням геометричної інтерпретації першої похідної функції. Розглянемо технологію побудови дотичної до заданої точки функції і визначення параметрів її рівняння, яка може бути реалізована в електронних таблицях MS Excel.

Якщо задана функція $f(x)$, то перша похідна функції у даній точці з координатами x_0 і y_0 є кутовим коефіцієнтом дотичної у цій точці. Рівняння дотичної, що проходить через точку з координатами x_0 і y_0 , має вигляд:

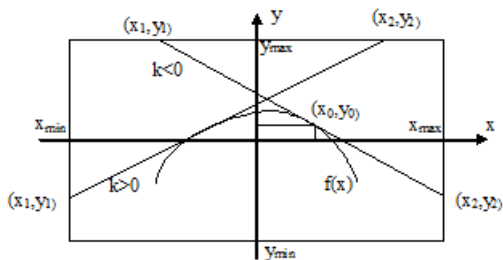
$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (1)$$

де $k = f'(x_0)$ — кутовий коефіцієнт; x_0 і y_0 — координати точки.

Потрібно побудувати графік функції $f(x)$ і дотичну у прямокутній області діаграми, обмеженій мінімальними і максимальними значеннями абсцис (x_{\min} і x_{\max}) і ординат (y_{\min} і y_{\max}).

Оскільки дотична є прямою лінією, що проходить через задану точку, то її можна побудувати по координатах двох точок: (x_1, y_1) і (x_2, y_2) , які розміщені на межах прямокутника.

Знайдемо координати точок дотичної із урахуванням значення кутового коефіцієнту $k = f'(x_0)$. Значення кутового коефіцієнту можуть бути додатними, від'ємними, нульовими або мати безконечно великі значення.



Нехай $k > 0$. Розглянемо можливі варіанти розміщення точок. При $x_1 = x_{\min}$ із врахуванням формули (1) $y_1 = k(x_{\min} - x_0) + y_0$.

Якщо виконується нерівність $y_{\min} < y_1 < y_{\max}$, то координати першої точки визначені. У протилежному випадку розглядаємо інші варіанти розміщення точки. При $y_1 < y_{\min}$ задаємо $y_1 = y_{\min}$ і одержуємо $x_1 = (y_{\min} - y_0 + kx_0) / k$. При $y_1 > y_{\max}$ задаємо $y_1 = y_{\max}$ і обчислюємо $x_1 = (y_{\max} - y_0 + kx_0) / k$.

Координати другої точки дотичної розраховуються аналогічним чином. При цьому задаємо $x_2 = x_{\max}$ і $y_2 = k(x_{\max} - x_0) + y_0$.

Якщо виконується нерівність $y_{\min} < y_2 < y_{\max}$, то координати другої точки визначені. У протилежному випадку розглядаємо наступні варіанти розміщення точки. При $y_2 < y_{\min}$ $y_2 = y_{\min}$ і $x_2 = (y_{\min} - y_0 + kx_0) / k$. При виконанні нерівності $y_2 > y_{\max}$ задаємо $y_2 = y_{\max}$ і підраховуємо $x_2 = (y_{\max} - y_0 + kx_0) / k$.

Якщо $k < 0$, то одержуємо аналогічні вирази для визначення координат точок дотичної. При цьому завжди в першу чергу розраховуємо праву точку дотичної (див. мал.).

При $k = 0$ дотична являє собою горизонтальну лінію відносно осі аргументів. Відповідно, $x_1 = x_{\min}$, $y_1 = y_0$ і $x_2 = x_{\max}$, $y_2 = y_0$. Якщо

$k \rightarrow \pm\infty$, дотична стає вертикальною лінією. Таким чином, $x_1 = x_0$, $y_1 = y_{min}$ і $x_2 = x_0$, $y_2 = y_{max}$.

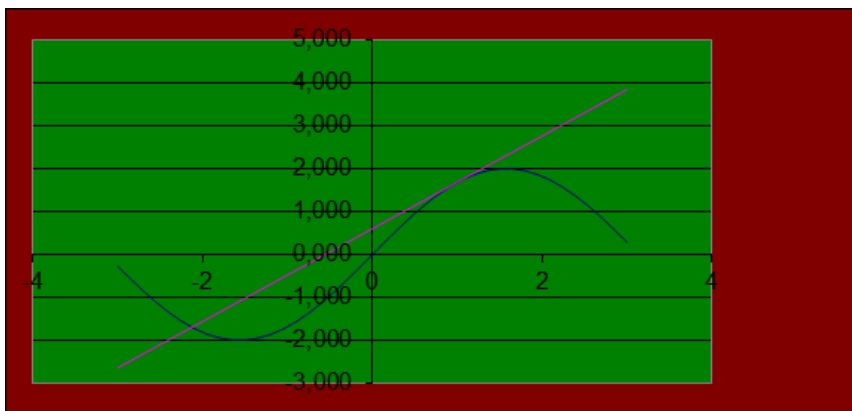
У режимі відображення формул таблиця виглядає так (для зручності подамо у вигляді ряду фрагментів):

27	Точки	=ЕСЛИ(И(F8>C2;F8<D2);A2;ЕСЛИ(F8<C2; (C2-G2+H2*F2)/H2; (D2-G2+H2*F2)/H2))	=H2*(A2-F2)+G2
28		=ЕСЛИ(И(G8>C2;G8<D2);B2;ЕСЛИ(G8>D2; (D2-G2+H2*F2)/H2; (C2-G2+H2*F2)/H2))	=H2*(B2-F2)+G2

	A	B	C
1	Xmin	Xmax	Ymin
2	-3	3	-5
3			
4		X	Y
5		-3	=2*SIN(B5)
6		-2,7	=2*SIN(B6)
7		-2,4	=2*SIN(B7)
8		-2,1	=2*SIN(B8)
9		-1,8	=2*SIN(B9)
10		-1,5	=2*SIN(B10)
11		-1,2	=2*SIN(B11)
12		-0,9	=2*SIN(B12)
13		-0,6	=2*SIN(B13)
14		-0,3	=2*SIN(B14)
15		0	=2*SIN(B15)
16		0,3	=2*SIN(B16)
17		0,6	=2*SIN(B17)
18		0,9	=2*SIN(B18)
19		1,2	=2*SIN(B19)
20		1,5	=2*SIN(B20)
21		1,8	=2*SIN(B21)
22		2,1	=2*SIN(B22)
23		2,4	=2*SIN(B23)
24		2,7	=2*SIN(B24)
25		3	=2*SIN(B25)

	E	F	G	H	I	J	K
1		X0	Y0	k			
2		1	=2*SIN(F2)	=2*COS(F2)			
3							
4							
5							
6							
7		Y1	Y2				
8		=H2*(A2-F2)+G2	=H2*(B2-F2)+G2				
9				Рівняння дотичної			
10	Y	=	=H2	*	X	=ЕСЛИ(G2-H2*F2>=0;"+";"-")	=ABS(G2-H2*F2)

У результаті побудови дотичної до графіка функції будемо мати таку картину:



Моделювання в геометрії

Моделювання геометричних місць точок

Основою для моделювання на екрані комп'ютера — декартова прямокутна система координат. Обчислення координат часто бувають досить складні. Додаткові проблеми виникають у зв'язку з точністю обчислень. У деяких випадках для знаходження координат і похибки обчислень необхідні додаткові знання розділів вищої математики. Тому математичні моделі спрощені.

Написання моделюючих програм — хороша справа в техніці програмування: побудова алгоритму, типи та подання даних, параметри процедур, аналіз точності обчислень і швидкості роботи програм і т.д.

Постановка завдання комп'ютерного моделювання геометричного місця точок (г.м.т.) здійснюється однією з двох форм:

Засобами середовища програмування Delphi моделювати процес побудови г.м.т.:

- а) обчислюючи координати всіх точок за допомогою математичних формул;
- б) виконуючи сканування екрану для знаходження координат точок шляхом перевірки умов, отриманих за допомогою математичних співвідношень.

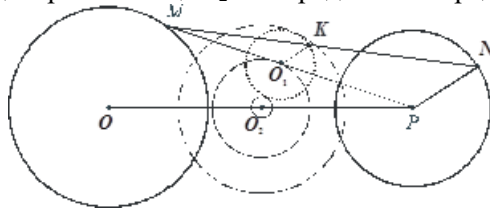
Процес моделювання виконується за схемою: *постановка задачі, план моделювання, технологія моделювання*. У всіх завданнях побудови моделі передреує геометричне розв'язання. Проводячи комп'ютерний

експеримент за моделлю, зверніть особливу увагу на тестування програми з різними наборами даних, типи даних і на похибку обчислень.

Задача 1. Дано два кола. Знайти геометричне місце середин всіх можливих відрізків з кінцями на цих колах.

Розв'язання.

Нехай коло (O, R_1) , коло (P, R_2) — дані кола. Зафіксуємо точку M на колі (O, R_1) . Якщо точка N описує коло (P, R_2) , то середини відрізків MN — точки K — описують коло з центром в точці O_1 — середині PM і радіусом $\frac{1}{2}R_2$. При переміщенні точки M по першому колу точка O_1 опише коло з центром в точці O_2 — середина OP і радіусом $\frac{1}{2}R_1$.



Розглядаючи множину відрізків MN з кінцями на цих колах, отримаємо: точки K описують всілякі кола радіусом $\frac{1}{2}R_2$, а їх центри, точки O_1 , описують кола радіусом $\frac{1}{2}R_1$ з центром в точці O_2 . Значить, шукане г.м.т. — кільце з центром в точці O_2 , внутрішній і зовнішній радіуси якого рівні $\frac{1}{2}(R_1 - R_2)$ і $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.

Моделювання.

Постановка задачі. Засобами середовища програмування моделювати процес побудови г.м.т., обчислюючи всі координати та використовуючи математичні формули.

План моделювання.

1. Обчислювати координати поточних точок M і N кіл (O, R_1) і (P, R_2) за формулами: $x_m = x_o + R_1 \cos \alpha$, $y_m = y_o + R_1 \sin \alpha$, $x_n = x_p + R_2 \cos \alpha$, $y_n = y_p + R_2 \sin \alpha$ для всіх значень α від 1° до 360° .

2. Знаходити координати середин всіх відрізків MN за формулами

$$\frac{x_m + x_n}{2}, \frac{y_m + y_n}{2}.$$

Шукане г.м.т. — множина середин відрізків MN .

Технологія моделювання.

1. Зобразити дані кола — процедура Circles.

2. У процедурі Ring:

— обчислити в циклі з параметром i та кроком в один радіан допоміжні величини (косинуси і синуси кутів від 1° до 360° — елементи масивів c і s дійсного типу);

— здійснювати обхід двох кіл, використовуючи вкладені цикли з зазначеним вище кроком: в зовнішньому циклі з параметром xv обчислювати координати xm , ym точок M (фіксація точок першого кола); у внутрішньому з параметром uv обчислювати координати xn , yn точок N (переміщення по другому колу при фіксованій точці на першому); зображати відрізки MN з деяким кроком, використовуючи підпорядковану процедуру MN (затримка t — параметр процедури $Ring$); зображати середини відрізків MN , елементи г.м.т., за допомогою стандартної процедури $PutPixel$.

Програма на Delphi.

```
unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls,
  Forms,
  Dialogs, ExtCtrls;
type
  TForm1 = class(TForm)
    PaintBox1: TPaintBox;
    procedure PaintBox1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form1: TForm1;
const xo=200;yo=240;ro=110;
xp=500;yp=240;rp=70;

implementation
{$R *.dfm}

procedure TForm1.PaintBox1Click(Sender: TObject);
var x,y:real; i:integer;
```

```

begin
with PaintBox1.Canvas do
begin

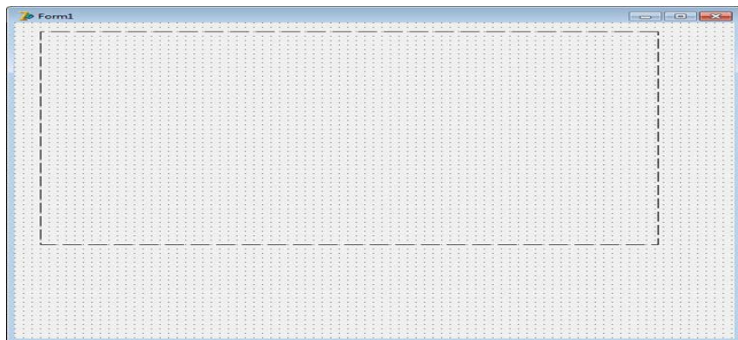
Pen.Width:=2;
Ellipse (90,130,310,350);
Ellipse (430,170,570,310);

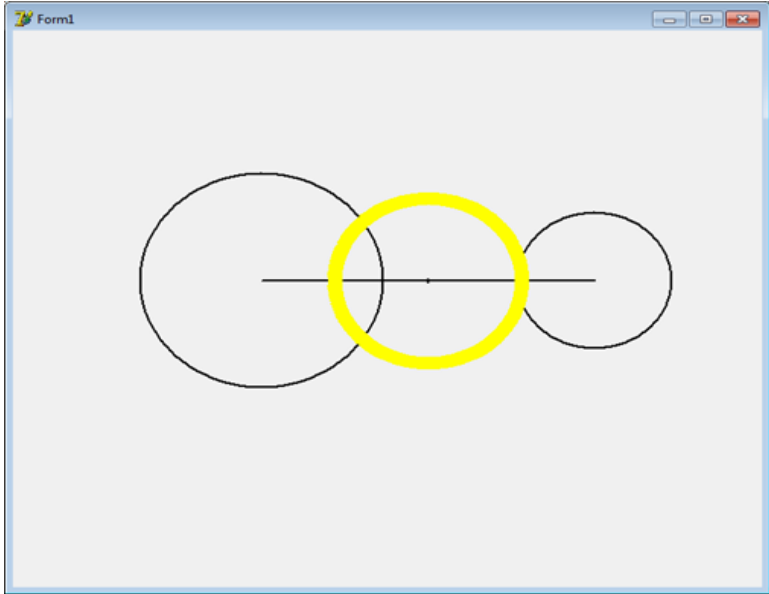
Pen.Color := clBlack;
MoveTo(xo,yo);
LineTo(xp,yp);
MoveTo(round((xo+xp)/2),round((yo+yp)/2-2));
LineTo(round((xo+xp)/2),round((yo+yp)/2+2));

Pen.Color := clYellow;
i:=0;
x:=(xo+ro*cos(i)+xp+rp*cos(i))/2;
y:=(yo+ro*sin(i)+yp+rp*sin(i))/2;
MoveTo(round(x),round(y));
for i:=1 to 360 do
begin
x:=(xo+ro*cos(i)+xp+rp*cos(i))/2;
y:=(yo+ro*sin(i)+yp+rp*sin(i))/2;
LineTo(round(x),round(y));
end;

end;
end;
end.

```





РОЗДІЛ 4. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ

Класична екологія — наука про взаємодію організмів і навколишнього середовища. Сьогодні, говорячи про екологію, частіше за все мають у вигляді не класичну, а соціальну екологію, що оформилася як науковий напрям і напрям суспільно-політичної діяльності на 100 років пізніше, і займається проблемами охорони довколишнього середовища, взаємодією з нею людського співтовариства.

В даному розділі ми обмежимося деякими класичними моделями «старої» екології, що обумовлене наступними причинами. По-перше, вони достатньо прості і вивчені, постановка їх цілком очевидна і в пізнавальному плані цікава і корисна. По-друге, моделі розповсюдження забруднень навколишнього середовища вимагають використання вельми складного математичного апарату. Для того, щоб дати уявлення про задачі, що стоять перед сучасними дослідниками в цій області, далі наведений опис однієї з глобальних моделей, які пробують з'ясувати шляхи взаємодії екосистеми планети з індустріальною і економічною системами сучасного суспільства.

Зупинимося на деяких поняттях, які зустрічатимуться в цьому розділі. Під особоною розуміється окремий індивідуум, окремий організм. Популяція — це сукупність особин одного виду, існуючих в один і той же час і які займають певну територію. І, нарешті, співтовариство — це сукупність спільно співіснуючих популяцій.

В класичній екології розглядаються взаємодії декількох типів:

- організму і навколишнього середовища;
- особин усередині популяції;
- між особинами різних видів (між популяціями).

Математичні моделі в екології використовуються практично з моменту виникнення цієї науки. І хоча поведінка організмів в живій природі набагато важче адекватно описати засобами математики, ніж найскладніші фізичні процеси, моделі допомагають встановити деякі закономірності і загальні тенденції розвитку окремих популяцій, а також співтовариств. Здається дивним, що люди, які займаються живою природою, відтворюють її в штучній математичній формі, але є вагомими причини, які стимулюють ці заняття. Ось деякі цілі створення математичних моделей в класичній екології.

1. Моделі допомагають виділити суть або об'єднати і виразити за допомогою декількох параметрів важливі розрізнені властивості великого числа унікальних спостережень, що полегшує екологу аналіз даного процесу або проблеми.

2. Моделі виступають як «спільна мова», за допомогою якої може бути описано кожне унікальне явище, і відносні властивості таких явищ стають більш зрозумілими.

3. Модель може служити зразком «ідеального об'єкту» або ідеальної поведінки, при порівнянні з якою можна оцінювати і вимірювати реальні об'єкти і процеси.

4. Моделі дійсно можуть пролити світло на реальний світ, недосконалими імітаціями якого вони є.

При побудові моделей в математичній екології використовується досвід математичного моделювання механічних і фізичних систем, проте з урахуванням специфічних особливостей біологічних систем, а саме:

- складна внутрішня будова кожної особини;
- залежність умов життєдіяльності організмів від багатьох чинників зовнішнього середовища;
- незамкнутості екологічних систем;
- величезного діапазону зовнішніх характеристик, при яких зберігається життєздатність систем.

Залучення комп'ютерів істотно розсувало межі моделювання екологічних процесів. З одного боку з'явилася можливість всесторонньої реалізації складних математичних моделей, які не допускають аналітичного дослідження, з іншого — виникли принципово нові напрями, і перш за все — імітаційне моделювання.

Моделі внутрішньовидової конкуренції

Розглянемо найпростішу з вказаних моделей — з дискретними періодами розмноження, в якій чисельність популяції у момент часу t рівна N_t і змінюється в часі пропорційно до величини основної швидкості відтворювання R . Такими видами є, наприклад, велика частина рослин, деякі види комах, у яких різні покоління чітко рознесені в часі. Коефіцієнт R характеризує кількість особин, яке відтворюється з розрахунку на одну існуючу, а також виживання вже існуючих.

Дана модель може бути виражена рівнянням

$$N_{t+1} = N_t R. \quad (1)$$

Розв'язок якого має вигляд $N_t = N_0 R^t$, де N_0 — початкова чисельність популяції. Ця модель описує популяцію, в якій відсутня конкуренція і в якій R є константою; 1, якщо $R > 1$, то чисельність популяції нескінченно збільшуватиметься. В реальності в якийсь момент починають працювати механізми заборони зростання популяції. В літературі наводиться немало цікавих прикладів швидкого зростання чисельності популяцій, якби для їх розмноження існували ідеальні умови. Особливо це відноситься до комах, рослин і мікроорганізмів, які могли б покрити Земну кулю товстим шаром, якщо їм створити хороші умови для розмноження. Але насправді такого зростання популяцій, коли їх чисельність збільшується в геометричній прогресії, на кілька-небудь тривалих проміжках часу, не спостерігається.

Отже, в першу чергу необхідно змінити рівняння (1) таким чином, щоб «чиста швидкість» відтворення залежало від внутрішньовидової конкуренції.

Конкуренцію можна визначити як використання якогось ресурсу (страви води, світла, простору) яким-небудь організмом, який тим самим зменшує доступність цього ресурсу для інших організмів. Якщо конкуруючі організми належать до одного виду, то взаємини між ними називають *внутрішньовидовою конкуренцією*; якщо ж вони відносяться до різних видів, то їх взаємовідносини називають *міжвидовою конкуренцією*.

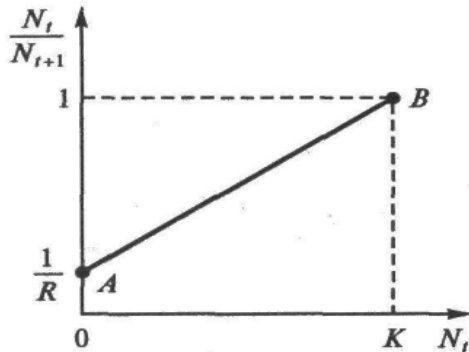


Рис. 1. До питання про граничну швидкість росту популяції

На рис.1 показана найпростіша можлива залежність швидкості відтворення від чисельності популяції.

Точка A відображає ситуацію, в якій чисельність популяції близька до нуля, конкуренція при цьому практично відсутня і фактичну швидкість відтворення цілком можна описувати параметром R в його первинному вигляді. Отже, при низькій густині популяції рівняння (1) цілком справедливе. В перетвореному вигляді воно буде виглядати так: $\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R}$.

Точка B , навпаки, відображає ситуацію, в якій чисельність популяції висока, і в значній мірі виявляється внутрішньовидова конкуренція. Фактична швидкість відтворення в результаті конкуренції настільки знижена, що популяція в цілому може лише відновлювати в кожному поколінні свою чисельність, тому що кількість особин, що народилися, врівноважується кількістю загиблих. Гіпотезі, відображеній на рис.1, відповідає рівняння

$$N_{t+1} = \frac{N_t R}{1 + a N_t}, \quad (2)$$

де $a = \frac{R-1}{K}$; K — гранична густина площини. Це рівняння є моделлю росту популяцій, обмежених міжвидовою конкуренцією. Суть цієї моделі в тому, що константа в рівнянні (1) замінена на фактичну швидкість відтворення, тобто $\frac{K}{1 + a N_t}$, яка зменшується по мірі росту чисельності популяції N_t . Вагомість одержаного рівняння полягає в його простоті. Такий тип конкуренції приводить до саморегуляції чисельності популяцій.

Після нескладної зміни в рівнянні (2) може бути одержана набагато більш загальна модель, що враховує інтенсивність конкуренції. Найпростіша з можливої залежності падіння швидкості росту популяції від її чисельності, зображеної на рис.1, не є законом природи, а всього лише зручна гіпотеза. Далеко не завжди реальна динаміка чисельності популяції, яка визначається внутрішньовидовою конкуренцією, навіть якісно узгоджується із зображенням на рис.2. Більш загальна гіпотеза про закон падіння швидкості росту популяції в залежності від її чисельності приводить до наступного рівняння:

$$N_{t+1} = \frac{N_t R}{1 + (a N_t)^b} \quad (3)$$

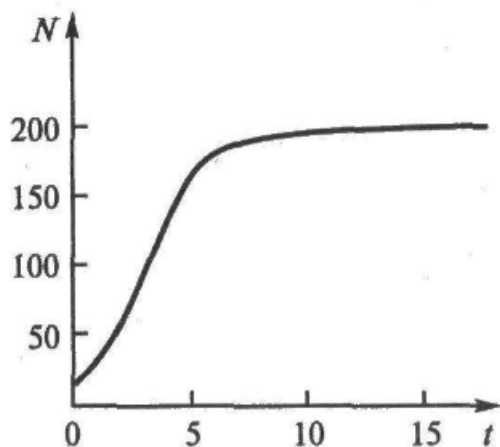


Рис. 2. Зміна чисельності популяції згідно рівняння при $R = 2$, $K = 200$, $N_0 = 20$

Спільність даної моделі на відміну від рівняння (2) обумовлена введенням в модель параметра b , який визначає тип залежності падіння швидкості росту популяції від її чисельності.

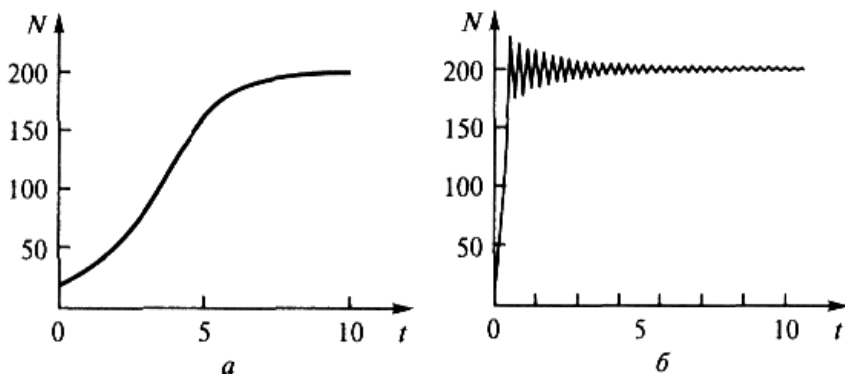


Рис. 3.1. Різні варіанти динаміки чисельності популяції:
 а — монотонне встановлення стаціонарної чисельності популяції при $b = 1,4$; $R = 2$; б — коливальне-встановлення стаціонарної чисельності популяції при $b = 3,9$; $R = 2$;

Набір величин a , b , R можна використовувати для порівняння і протистояння сильно розрізних ситуацій. Іншою позитивною якістю рівняння (3) є його здатність висвітлювати нові сторони реального миру. Шляхом аналізу кривих динаміки популяцій, одержаних за допомогою рівняння, можна прийти до попередніх висновків щодо динаміки природних популяцій.

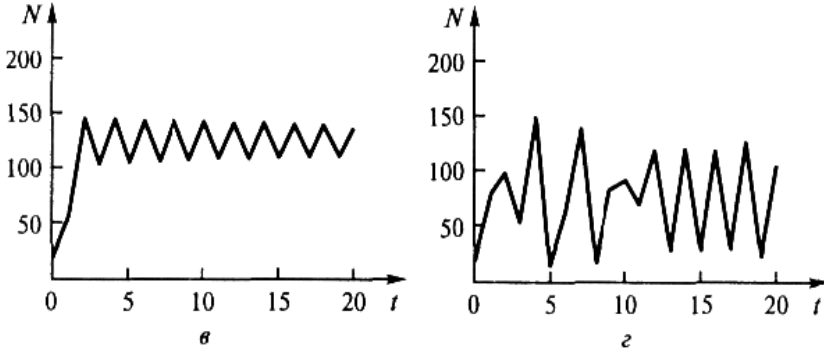


Рис. 3.2. Різні варіанти динаміки чисельності популяції:
 a — стійкі граничні цикли зміни чисельності популяції при $b = 3,6$; $R = 4$; z — випадкові зміни чисельності популяції при $b = 4,4$; $R = 4$

На рис. 3.1, рис. 3.2 показані різні варіанти динаміки чисельності популяцій, побудованих за допомогою чисельного моделювання, одержані за допомогою рівняння (3) при різному поєднанні параметрів b і R .

Важливою частиною дослідження, зв'язаного з моделлю (3), є побудова на фазовій площині (b , R) меж, які розділяють монотонне згасання, затухаюче колювання, стійкі граничні цикли і випадкові (хаотичні) зміни (рис.4). Для цього треба задати значення a і N_0 і проводити розрахунки, змінюючи параметри b , R . Розрізнити кожний з можливих режимів можна спробувати візуально, виконуючи побудовані на екрані комп'ютера графіки зміни чисельності популяції і запам'ятовуючи відповідні значення параметрів b , R при переході від одного режиму до іншого. Проте треба розуміти, що встановлення відмінностей між квазіперіодичними, аперіодичними і хаотичними рухами — складна математична задача. Для її вирішення використовуються методи перетворень Фур'є і інші, розгляд яких виходить за межі даного розділу.

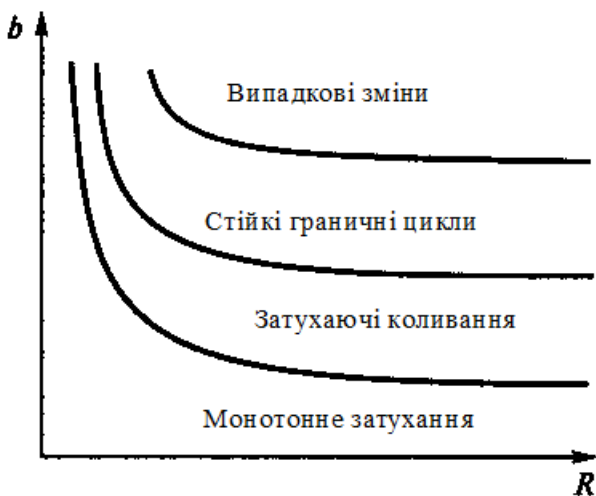


Рис. 4. Схема зображення фазової діаграми чисельності популяції з дискретним розмноженням

У зв'язку з рівняннями (2), (3) зробимо зауваження загального характеру, справедливе для всіх моделей в екології. На відміну від фізики, де модель часто являється точно встановленим законом природи, в екології модель більш умовна. Її адекватність реальності (в тій мірі, в якій моделювання взагалі на це претендує) перевіряється лише експериментально. Оскільки екологи багато раз спостерігали кожен з динамік, зображених на рис.3.1, 3.2, можна зробити висновок про користь відповідної моделі (інакше вона була б лише математичною вправою).

Дотепер ми розглядали моделі, застосовні до популяцій з дискретними періодами розмноження (див. рис.4). Але в природі зустрічаються і популяції, де народження і загибель організмів відбувається безперервно; для таких популяцій моделі, виражені рівняннями з попереднього підрозділу, непридатні. Розглянемо **популяцію з безперервним розмноженням** і побудуємо модель зміни її чисельності. Математичним апаратом тут є диференціальні рівняння.

Швидкість росту в цьому випадку можна позначити $\frac{dN}{dt}$, тоді середня швидкість збільшення чисельності з розрахунку на одну особину визначається величиною $\frac{dN}{dt} \frac{1}{N}$.

Без урахування внутрішньовидової конкуренції одержуємо $\frac{dN}{dt} \frac{1}{N} = r$ або $\frac{dN}{dt} = rN$.

Через r позначена миттєва питома швидкість росту чисельності, тобто приріст чисельності за одиницю часу в перерахунку на одну особину. Згідно цієї моделі, внаслідок того, що не врахована міжвидова конкуренція, чисельність популяції при $r > 0$ буде необмежено зростати, тобто спостерігатиметься експоненціальне зростання.

Тепер спробуємо врахувати внутрішньовидову конкуренцію. Для цього скористаємось методом, який одного разу вже застосовували (див. рис.1).

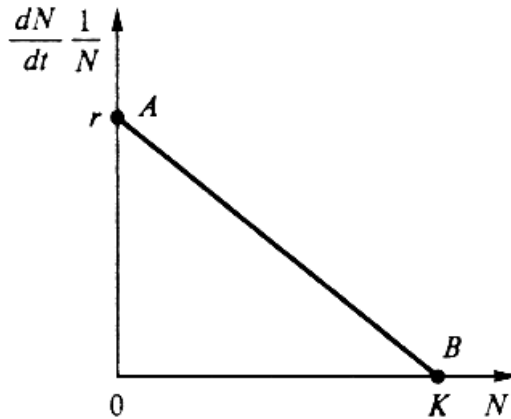


Рис. 5. Залежність швидкості відтворення від чисельності популяції

Звернемося до рис.5. Коли чисельність популяції близька до нуля, швидкість росту визначається величиною r , оскільки конкуренція ще не робить вплив на приріст популяції (точка A). Коли ж при зростанні N досягається значення K , швидкість росту популяції знижується до нуля (точка B). Записавши рівняння прямої AB , одержимо

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{K-N}{K}. \quad (4)$$

Останнє рівняння відоме під назвою «логістичного». Рівняння відноситься до одного із стандартних типів і допускає аналітичне рішення:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}. \quad (5)$$

В історії екології логістичне рівняння зіграло значну роль, зробивши великий вплив на вживання в екології математичних методів. З другого боку, простота рівняння накладає обмеження на область його вживання, так як з його допомогою можна описати небагато реальних популяцій. Але, не дивлячись на всі обмеження, логістичне рівняння використовується як складова частина і в інших моделях динаміки чисельності популяцій, що розглядатимуться далі.

Зміна чисельності популяції відповідно до формул 4) — (5) зображає рис.6.

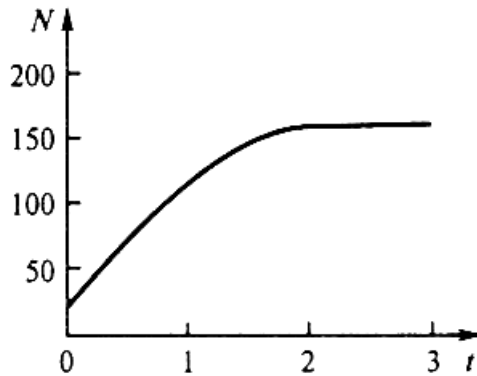


Рис. 6. Залежність швидкості відтворення від чисельності популяцій

Логістична модель міжвидової конкуренції.

Сутність міжвидової конкуренції полягає в тому, що у особин одного виду зменшується плодючість, виживання і швидкість росту в результаті використання того ж ресурсу, що і особинами іншого виду, причому під вплив конкуренції в тій чи іншій мірі піддаються особини обох видів.

Так як ми маємо справу з двома різними популяціями, то введемо відповідні позначення. Нехай N_1 — чисельність першої популяції, а N_2 — другої. Граничну густину насичення і максимальні природжені швидкості росту популяцій позначимо відповідно K_1 , K_2 , r_1 і r_2 (рис. 7).

Звернемося до логістичного рівняння (4) і спробуємо врахувати в ньому міжвидову конкуренцію. Припустимо, що M особин другого виду надають такий же вплив на перший вид, як одна особина першого виду. Константу $1/M$ в цьому випадку називають *коефіцієнтом конкуренції*.

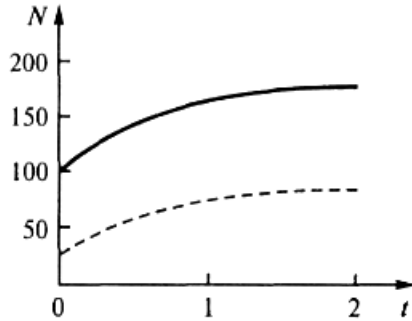


Рис. 7. Стійке співіснування популяцій при $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $K_1 = 200$, $K_2 = 180$, $a_{12} = 0.5$, $a_{21} = 0.65$, $N_1^{(0)} = 100$, $N_2^{(0)} = 25$. Стійке співіснування досягається лише при $a_{12}a_{21} < 1$. Суцільна лінія — чисельність першої популяції, штрихова — другої популяції

Позначимо її a_{12} . Таким чином, щоб відобразити сумарну дію на перший вид, потрібно в логістичному рівнянні в чисельнику дробу замість N записати $N_1 + a_{11}N_2$. Аналогічно виходить рівняння для дослідження чисельності другої популяції. У результаті одержуємо систему двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \frac{K_1 - N_1 - a_{12}N_2}{K_1}, \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \frac{K_2 - N_2 - a_{21}N_1}{K_2}. \end{cases} \quad (6)$$

Модель міжвидової конкуренції, виражена цією системою, названа в честь її авторів, моделлю Лотки—Вольтерри.

Зауважимо, що якщо коефіцієнти a_{11} або a_{21} більші одиниці, то вплив із сторони конкуруючої популяції на особин даного виду сильніший, ніж із сторони особин свого виду.

Головне питання, яке цікавить дослідника міжвидовий конкуренції — за яких умов збільшується або зменшується чисельність кожного виду? Для відповіді на це питання треба побудувати діаграми, де були б відображені всі можливі поєднання чисельності обох видів. На таких діаграмах чисельність одного виду відкладають по горизонтальній осі, а іншого — по вертикальній. При одних поєднаннях чисельностей будуть зауважувати зростання вибраної для дослідження популяції, при інших — зменшення її чисельності. Також для кожного з видів можна провести ізокліни — лінії, вздовж яких не спостерігається ні збільшення, ні зменшення чисельності.

Розглянемо як можна побудувати ізокліну для першого виду. По визначенню для цієї лінії $\frac{dN_1}{dt} = 0$. Із першого рівняння системи (6) одержимо $r_1 N_1 (K_1 - N_1 - a_{12} N_2) = 0$. Ця рівність виконується, якщо який-небудь із множників дорівнює нулю. Найбільший інтерес являє ситуація, в якій $K_1 - N_1 - a_{12} N_2 = 0$ або $N_1 = K_1 - a_{12} N_2$

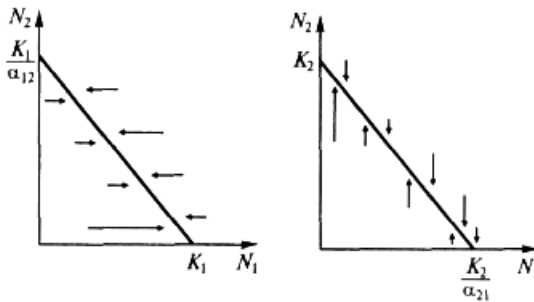


Рис. 8. Ізокліни отримані за допомогою моделі Лотки—Вольтерри; довжина стрілок пропорційна зміні чисельності, стрілки вказують напрям зміні чисельності

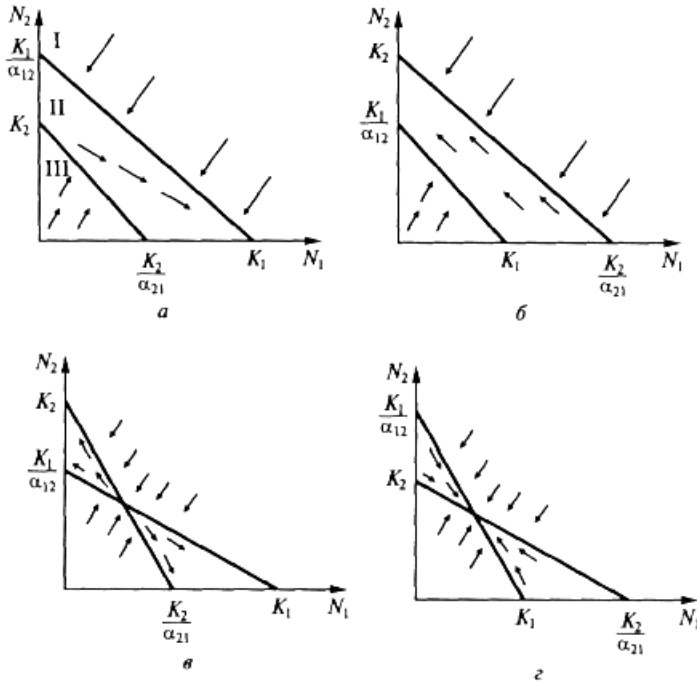


Рис. 9. Результати кокуренції, отримані за допомогою моделі Лотки—Вольтерри при різних параметрах: а) в області I — чисельність обох популяцій падає; б) в області II — чисельність першої популяції росте, другий — зменшується; в) в області III — чисельність обох популяцій збільшується;

Для розв’язання поставленої раніше задачі об’єднаєм в одній фазовій площині ізокліни для обох видів і будемо одночасно досліджувати динаміку їх чисельності. Ізокліни одна відносно другої розташовані чотирма різними способами, що характеризує різне закінчення кокуренції. На рис.9. представлені результати кокуренції, отримані за допомогою системи рівнянь (6).

Динаміка чисельності популяцій хижака жертви

Розглядаючи динаміку чисельності популяцій хижака і жертви, екологи насамперед намагаються зрозуміти її закономірності і пояснити різницю між типами динамік. В простіших моделях хижак і жер-

тва розглядаються на основі безвідносного впливу на них інших видів. Одна із самих перших і простих моделей була запропонована, як і модель міжвидової конкуренції, Лоткою і Вольтеррою і носить їх ім'я.

Модель складається із двох компонентів: C — чисельність популяції хижака, N — чисельність популяції жертви.

Передбачається, що у відсутність хижака популяція жертви росте експоненціально. Чим більша чисельність тієї і іншої популяції, тим частіше відбуваються зустрічі. Число зустрічних і з'їдених жертв буде залежати від ефективності, з якою хижак знаходить і ловить жертву. Якщо позначити через a' «ефективність пошуку», то швидкість поїдання жертви буде рівна $a'CN$, і в кінці для чисельності жертви одержуємо $\frac{dN}{dt} = rN - a'CN$, де r — швидкість росту чисельності популяції жертви у відсутність популяції хижака.

При відсутності їжі окремі особини хижака голодують і гинуть. Припустимо знову, що чисельність хижака з відсутністю їжі буде зменшуватись експоненціально $\frac{dC}{dt} = -qC$, де q — смертність. Швидкість народження нових особин в даній моделі є залежною від двох обставин: швидкості споживання їжі $a'CN$ і ефективності f , з якою ця їжа переходить в потомство хижака. Отже, для чисельності хижака остаточно одержуємо $\frac{dC}{dt} = fa'CN - qC$.

Оскільки процеси треба розглядати разом, об'єднаємо рівняння в систему:
$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN - a'CN, \\ \frac{dC}{dt} = fa'CN - qC. \end{cases}$$

Як і в попередньому підрозділі, властивості цієї моделі можна досліджувати, побудувавши ізокліни.

Для жертви маємо $\frac{dN}{dt} = 0$; $rN - a'CN = 0$ або, виразивши C , одержимо $C = \frac{r}{a'}$.

Відповідне рівняння ізокліни для популяції хижака $N = \frac{q}{fa'}$

Якщо помістити обидві ізокліни на одному рисунку, одержимо картину взаємодії популяцій (рис. 10).

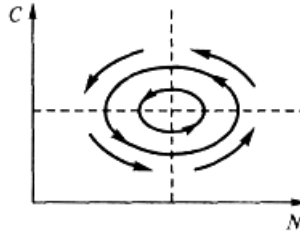


Рис. 10. Динаміки чисельності популяцій хижака і жертви; чисельність обох популяцій утворює періодичні коливання

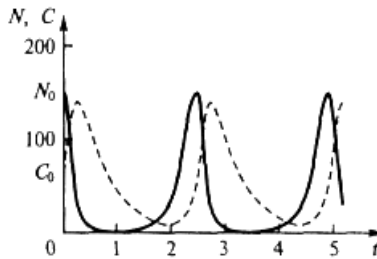


Рис. 11. Динаміка чисельності популяції хижака і жертви при $r = 5$, $a' = 0,1$; $q = 2$; $f = 0,6$; $N_0 = 150$; $C_0 = 50$; суцільна лінія — чисельність жертви, штрихова — хижака

Як видно на рис.11, чисельності популяцій хижака і жертви утворюють періодичні коливання: при збільшенні чисельності хижаків зменшується чисельність популяції жертви, і навпаки. Такі коливання чисельності будуть продовжуватись у моделі до тих пір, поки яка-небудь зовнішня дія не змінить чисельність популяцій, після чого відбудеться перехід в новий стійкий стан (така ситуація називається «нейтральні стійкі цикли»).

Імітаційне моделювання динаміки популяцій

Використовування математичних моделей, заснованих на диференціальних рівняннях або їх дискретних аналогах, далеко не єдиний шлях в комп'ютерному моделюванні динаміки популяцій. Іншу цікаву групу складають чисто стохастичні моделі або динамічні моделі з елементами стохастичності. Опишемо дві можливі моделі такого класу: одну — без деталей, іншу — у всіх деталях, включаючи реалізуючу її програму.

Перша модель. Дві популяції знаходяться в співвідношенні «хижак—жертва», описані раніше, але модель абсолютно інша. На деякому клітчастому полі (яке наочно — все або по частинах — зображується на дисплеї) знаходяться вовки (декілька) і зайці (багато). Зайці роблять безладні переміщення довжини і напрями яких — випадкові величини, які відповідають деякому закону розподілу вірогідності, а кожний вовк в кожному мить орієнтується на найближчого зайця і може виконувати обмежені стрибки. Якщо вовк протягом деякого, наперед визначеного, проміжку часу залишається без здобичі (тобто не потрапляє в клітку, де знаходиться заєць), то він помирає. Зайці і вовки через певні моменти розмножуються, наприклад, кожний другий заєць приносить двох нащадків, кожний другий вовк приносить одного нащадка, причому швидкість розмноження вовків в два рази менша ніж зайців. Все це може барвисто зобразити на екрані, стан якого міняється через фіксовані моменти часу. Це — чисте імітаційне моделювання, кінцевою метою якого є, як і в описаних моделях, встановлення долі популяцій залежно від багатьох чинників, що входять в модель.

Тут немає диференціальних рівнянь, та зате повною мірою виявляється стохастика — моделювання випадкових процесів. Реалізація такої моделі вимагає великого мистецтва програміста, сприяє формуванню вірогідних уявлень.

Друга модель, яку опишемо у всіх деталях, запропонована Д. Конвейем — імітаційна модель зростання, розпаду і різних змін в популяції живих організмів, відома під назвою «Життя».

Для побудови алгоритму гри розглянемо квадратне поле з $n + 1$ стовпців і рядків із звичайною нумерацією від 0 до n (рис.12). Крайні граничні стовпці і рядки для зручності визначимо як «мертву зону», вони відіграють лише допоміжну роль.

Для будь-якої внутрішньої клітки поля з координатами (i, j) можна визначити вісім сусідів. Якщо клітинка «жива», її замальовуємо, якщо клітинка «мертва», вона порожня.

Задамо правила гри. Якщо клітинка (i, j) «жива» і в оточенні більше трьох «живих» клітинок, вона гине (від перенаселення). «Жива» клітинка також гине, якщо в оточенні менше двох «живих» клітинок (від самотності). «Мертва» клітинка оживає, якщо навкруги неї є три «живі» клітинки. Для зручності введемо, двовимірний масив $A[0..n, 0..n]$, елементи якого приймають значення 0, якщо відповідна клітинка порожня, і 1, якщо клітинка «жива», будемо використовувати змін-

ну S для підрахунку кількості «живих» клітинок в оточенні даної клітинки.

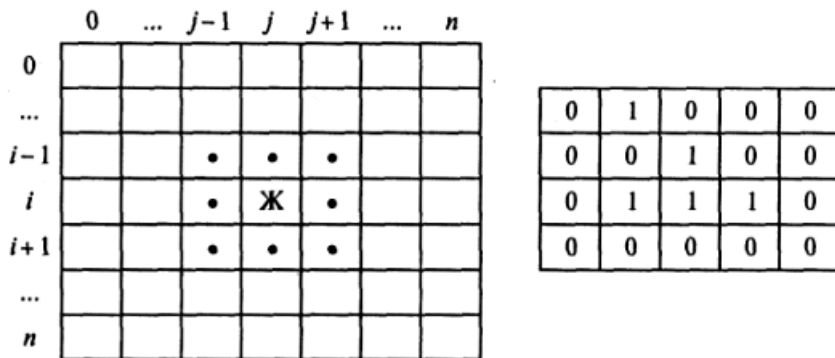


Рис. 12 До імітаційної моделі «Життя»

Тоді алгоритм визначення стану клітинки з координатою (i, j) можна представити таким чином:

$$S := A[i-1, j-1] + A[i-1, j] + A[i-1, j+1] + A[i+1, j-1] + A[i+1, j] + A[i+1, j+1] + A[i, j+1] + A[i, j-1]$$

If $(A[i, j] = 1)$ And $((S > 3)$ Or $(S < 2))$ Then $B[i, j] := 0$;

If $(A[i, j] = 0)$ And $(S = 3)$ Then $B[i, j] := 1$;

Тут масив $B[0...n, 0...n]$ визначає координати поля на наступному етапі. Для всіх внутрішніх клітинок від $i = 1$ до $n-1$ і $j = 1$ до $n-1$ справедливо сказане раніше. Відзначимо, що подальші покоління визначаються аналогічно, лише треба здійснити процедуру пере присвоєння.

For I:= 1 To N - 1 Do

For J:= 1 To N - 1 Do $A[I, J] := B[I, j]$;

На екрані дисплея зручніше виводити стан поля не в матричному, а в графічному вигляді.

Залишилося лише визначити процедуру задання початкової конфігурації на полі гри. При випадковому визначенні початкового стану кліток підходить алгоритм

$$K1 := \text{Random}(N - 1) + 1; \quad A[K1, K2] := 1$$

Цікавіший випадок, коли початкову конфігурацію ми задаємо самі, і робимо це безпосередньо в графічному вигляді.

Поставимо декілька питань. Які конфігурації зникають з часом і як швидко? Які структури можуть існувати нескінченно? Які закони організації структур, їх взаємодії? Перед спробою відповісти на ці питання заздалегідь відзначимо лише деякі структури (рис.13 і 14)



Рис. 13. Стаціонарні структури, які не залежать від часу

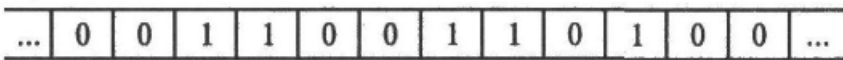


Рис. 14. Цикли «-2»

Але найцікавіші структури, що рухаються — «планери», «кораблі», «паровози», їх зіткнення, «анігіляція» і зародження нових структур.

Представляє інтерес модель гри в одновимірному випадку. Тут є один ряд клітинок. В деяких з них задаємо «життя». Вимагається вивчити еволюцію клітинок, якщо задані правила їх існування і зародження.

Визначимо суму значень п'яти сусідніх клітинок (самої клітки і двох сусідніх до неї зліва і справа). На наступному кроці залежно від суми, яка може бути рівна 0, 1, 2, 3, 4, 5, клітинкам привласнюється значення 0, 1, 0, 0: 0, 0 або 0, 1, 1, 0, 0.



Нехай $X(N)$ — масив клітинок. $X(i) = 0$, якщо i -а клітинка порожня, і $X(i) = 1$, якщо в i -й клітинці є «життя»

$$S = X(I - 2) + X(I - 1) + X(i) + X(I + 1) + X(I + 2).$$

Якщо $Y(N)$ — масив клітинок на наступному тимчасовому кроці, то він заповнюється, наприклад, за наступним правилом — якщо $S = 1$, то $Y(i) = 1$, інакше $Y(i) = 0$.

Огляд моделей прогнозування

В даний час нараховується понад 100 класів моделей. Число загальних класів моделей, які в тих чи інших варіаціях повторюються в інших, набагато менше. Частина моделей і відповідних методів відноситься до окремих процедур прогнозування. Частина методів представляє набір окремих прийомів, що відрізняються від базових або один від одного кількістю прийомів і послідовністю їх застосування.

В аналітичному огляді всі методи прогнозування поділяються на дві групи: інтуїтивні та формалізовані.

Інтуїтивне прогнозування застосовується тоді, коли об'єкт прогнозування або занадто простий, або, навпаки, настільки складний, що аналітично врахувати вплив зовнішніх факторів неможливо. Інтуїтивні методи прогнозування не передбачають розробку моделей прогнозування і відображають індивідуальні судження фахівців (експертів) щодо перспектив розвитку процесу. Інтуїтивні методи засновані на мобілізації професійного досвіду і інтуїції. Такі методи використовуються для аналізу процесів, розвиток яких або повністю, або частково не піддається математичній формалізації, тобто для яких важко розробити адекватну модель. До таких методів належать методи експертних оцінок, історичних аналогій, передбачення за зразком. Крім того, в даний час широко поширене застосування експертних систем, в тому числі з використанням нечіткої логіки.

Формалізовані методи розглядають моделі прогнозування, які поділяються на статистичні моделі і структурні моделі.

У статистичних моделях функціональна залежність між майбутніми та фактичними значеннями часового ряду, а також зовнішніми факторами задана аналітично. До статистичних моделей належать такі групи:

- регресивні моделі;
- авторегресійні моделі;
- моделі експоненціального згладжування.

У структурних моделях функціональна залежність між майбутніми та фактичними значеннями часового ряду, а також зовнішніми факторами задана структурно. До структурних моделей належать такі групи:

- нейромережеві моделі;
- моделі на базі ланцюгів Маркова;
- моделі на базі класифікаційно-регресійних дерев.

Крім того, необхідно відзначити, що для вузькоспеціалізованих завдань іноді застосовуються особливі моделі прогнозування. Так, наприклад, для завдання прогнозування рівня цукру крові людини застосовуються моделі на основі диференціальних рівнянь. Для завдання прогнозування транспортного потоку, яке в останні кілька років актуальне для мегаполісів, застосовуються гідродинамічні моделі. Для прогнозування природних явищ, таких як землетруси, застосовується, наприклад, модель, в основу якої покладено нелінійні клітини (або стільники), що знаходяться під впливом зовнішнього поля, і у яких є внутрішній стан, що змінюється в часі під впливом цього поля. Аналогічні моделі розробляються і застосовуються для спеціальних процесів і систем.

Існує багато задач, які потребують вивчення відносин між двома і більше змінними. Для вирішення таких завдань використовується регресійний аналіз. В даний час регресія отримала широке застосування, включаючи завдання прогнозування та управління. Метою регресійного аналізу є визначення залежності між вихідною змінною і безліччю зовнішніх факторів (регресорів). При цьому коефіцієнти регресії можуть визначатися за методом найменших квадратів або методом максимальної правдоподібності.

Найпростішим варіантом регресійної моделі є *лінійна регресія*. В основу моделі покладено припущення, що існує дискретний зовнішній фактор $X(t)$, який впливає на досліджуваний процес $Z(t)$, при цьому зв'язок між процесом і зовнішнім фактором лінійний. Модель прогнозування на підставі лінійної регресії описується рівнянням

$$Z(t) = \alpha_0 + \alpha_1 X(t) + \varepsilon_t, \quad (7)$$

де α_0 і α_1 — коефіцієнти регресії; ε_t — помилка моделі. Для отримання прогнозованих значень $Z(t)$ в момент часу t необхідно мати значення $X(t)$ в той же момент часу t , що рідко можливо на практиці.

На практиці на процес $Z(t)$ впливають цілий ряд дискретних зовнішніх факторів $X_1(t), \dots, X_S(t)$. Тоді модель прогнозування має вигляд

$$Z(t) = \alpha_0 + \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_s X_s(t) + \varepsilon_t, \quad (8)$$

Недоліком даної моделі є те, що для обчислення майбутнього значення процесу $Z(t)$ необхідно знати майбутні значення всіх факторів $X_1(t), \dots, X_s(t)$, що майже неможливо на практиці.

В основу *нелінійної регресійної моделі* покладено припущення про те, що існує відома функція, що описує залежність між вихідним процесом $Z(t)$ і зовнішнім фактором $X(t)$

$$Z(t) = F(X(t), A). \quad (9)$$

У рамках побудови моделі прогнозування необхідно визначити параметри функції A . Наприклад, можна припустити, що

$$Z(t) = \alpha_1 \cos(X(t)) + \alpha_0 \quad (10)$$

Для побудови моделі досить визначити параметри $A = [\alpha_1, \alpha_0]$. Однак на практиці рідко зустрічаються процеси, для яких вид функціональної залежності між процесом $Z(t)$ і зовнішнім фактором $X(t)$ заздалегідь відомий. У зв'язку з цим нелінійні регресійні моделі застосовуються рідко.

В основу *авторегресійних* моделей закладено припущення про те, що значення процесу $Z(t)$ лінійно залежить від деякої кількості попередніх значень того ж процесу $Z(t-1), \dots, Z(t-p)$.

В області аналізу часових рядів модель авторегресії (autoregressive, AR) і модель середнього змінного (moving average, MA) є однією з найбільш використовуваних.

Модель авторегресії є виключно корисною для опису деяких часових рядів, які зустрічаються на практиці. У цій моделі поточне значення процесу виражається як кінцева лінійна сукупність попередніх значень процесу і імпульсу, який називається «білим шумом»

$$Z(t) = C + \varphi_1 Z(t-1) + \varphi_2 Z(t-2) + \dots + \varphi_p Z(t-p) + \varepsilon_t. \quad (11)$$

Формула (11) описує процес авторегресії порядку p , який в літературі часто позначається $AR(p)$, тут C — константа, $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ — коефіцієнти, ε_t — помилка моделі. Для визначення φ_i і C використовують метод найменших квадратів або метод максимальної правдоподібності.

Інший тип моделі має велике значення в описі часових рядів і часто використовується спільно з авто регресією, називається моделлю середнього змінного порядку q і описується рівнянням

$$Z(t) = \frac{1}{q} (Z(t-1) + Z(t-2) + \dots + Z(t-q)) + \varepsilon_t \quad (12)$$

У літературі процес (12) часто позначається $MA(q)$; де q — порядок середнього змінного, ε_t — похибка прогнозування. Модель середнього змінного є по суті справи фільтром низьких частот. Потрібно відзначити, що існують прості, зважені, кумулятивні, експоненціальні моделі середнього змінного.

Для досягнення більшої гнучкості в корекції моделі часто доцільно об'єднати в одній моделі авторегресію і середнє змінне. Загальна модель позначається $ARMA(p, q)$ поєднує в собі фільтр у вигляді середнього змінного порядку q і авторегресії фільтрованих значень процесу порядку p .

Якщо в якості вхідних даних використовуються не самі значення часового ряду, а їх різниця d -того порядку (на практиці d необхідно визначати, проте в більшості випадків $d \leq 2$), то модель носить назву авторегресії інтегрованого середнього змінного. У літературі цю модель називають $ARIMA(p, d, q)$ (autoregression integrated moving average).

Розвитком моделі $ARIMA(p, d, q)$ є модель $ARIMAX(p, d, q)$, яка описується рівнянням [1]

$$Z(t) = AR(p) + \alpha_1 X_1(t) + \dots + \alpha_s X_s(t) \quad (13)$$

Тут $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — коефіцієнти зовнішніх факторів $X_1(t), \dots, X_s(t)$. У даній моделі найчастіше процес $Z(t)$ є результатом моделі $MA(q)$, тобто відфільтрованими значеннями вихідного процесу. Далі для прогнозування $Z(t)$ використовується модель авторегресії, в якій введені додаткові регресори зовнішніх факторів $X_1(t), \dots, X_s(t)$.

Авторегресійна модель з умовною гетероскедастичністю (autoregressive conditional heteroskedasticity, GARCH) була розроблена в 1986 році Тімом Петером Борреслево і є моделлю залишків для моделі $AR(p)$. На першому етапі для вихідного часового ряду визначається модель $AR(p)$ (11). Далі передбачається, що похибка моделі ε_t має дві складові $\varepsilon_t = \sigma_t \vartheta_t$, де σ_t — залежне від часу стандартне відхилення; ϑ_t — випадкова величина, що має нормальний розподіл, середнє значення, рівне 0, і стандартне відхилення, яке дорівнює 1. При цьому залежне від часу стандартне відхилення описується рівнянням

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_q \varepsilon_{t-q}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1} + \dots + \gamma_p \sigma_{t-p}. \quad (14)$$

Тут β_0, \dots, β_q і $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ — коефіцієнти. Рівняння (14) називається моделлю $GARCH(p, q)$ і має два параметри: p характеризує порядок

авторегресії квадратів залишків; q — кількість попередніх оцінок залишків.

Найбільш часто застосування дана модель отримала в фінансовому секторі. На сьогоднішній день існує ряд модифікацій моделі під назвами NGARCH, IGARCH, EGARCH, GARCH-M і інші.

Авторегресійна модель з розподіленим лагом (autoregressive distributed lag models, ARDLM) недостатньо докладно описана в літературі.

Часто при моделюванні процесів на досліджувану змінну впливають не тільки поточні значення процесу, а й його лаги, тобто значення часового ряду, що передують досліджуваному моменту часу. Модель авторегресії розподіленого лага описується рівнянням

$$Z(t) = \varphi_0 + \varphi_1 Z(t-l-1) + \dots + \varphi_p Z(t-l-p) + \varepsilon_t \quad (15)$$

Тут $\varphi_0, \dots, \varphi_p$ — коефіцієнт, l — величина лага. Модель (15) називається ARDLM(p, l) і найчастіше застосовується для моделювання економічних процесів.

Моделі експоненціального згладжування розроблені в середині XX століття і до сьогоднішнього дня є широко поширеними в силу їх простоти і наочності.

Модель експоненціального згладжування (exponential smoothing, ES) застосовується для моделювання фінансових і економічних процесів. В основу експоненціального згладжування закладена ідея постійного перегляду прогнозних значень в міру надходження фактичних. Модель ES привласнює експоненціально спадні ваги спостереженнями в міру їх старіння. Таким чином, останні доступні спостереження мають більший вплив на прогнозне значення, ніж старші спостереження.

Функція моделі ES має вигляд $Z(t) = S(t) + \varepsilon_t$

$$S(t) = \alpha Z(t-1) + (1-\alpha)S(t-1), \quad (16)$$

де α — коефіцієнт згладжування, $0 < \alpha < 1$; початкові умови визначаються як $S(1) = Z(0)$. У даній моделі кожне наступне згладжене значення $S(t)$ є зваженим середнім між попереднім значенням часового ряду $Z(t)$ і попереднього згладженого значення $S(t-1)$.

Модель Хольта або подвійне експоненціальне згладжування застосовується для моделювання процесів, що мають тренд. У цьому випадку в моделі необхідно розглядати дві складові: рівень і тренд.

Рівень i тренд згладжуються окремо $Z(t) = S(t) + \varepsilon_t$;
 $S(t) = \alpha Z(t - 1) + (1 - \alpha)(S(t - 1) - B(t - 1))$,
 $B(t) = \gamma(S(t - 1) - S(t - 2)) + (1 + \gamma)B(t - 1)$ (17)

Тут α — коефіцієнт згладжування рівня, як і в моделі (16), γ — коефіцієнт згладжування тренда.

Модель Хольта-Вінтерса або потрійне експоненціальне згладжування застосовується для процесів, які мають тренд і сезонну складову

$$Z(t) = (R(t) + G(t))S(t) \quad (18)$$

Тут $R(t)$ — згладжений рівень без урахування сезонної складової

$$R(t) = \frac{\alpha Z(t-1)}{S(t-L)} + (1 + \alpha)(R(t - 1)G(t - 1)), \quad (19)$$

$G(t)$ — згладжений тренд:

$$G(t) = \beta(S(t - 1) - S(t - 2)) + (1 - \beta)g(t - 1), \quad (20)$$

а $S(t)$ — сезонна складова:

$$S(t) = \frac{\gamma Z(t-1)}{S(t-L)} + (1 + \gamma)S(t - L). \quad (21)$$

Величина L визначається довжиною сезону досліджуваного процесу. Моделі експоненціального згладжування найбільш поширені для довгострокового прогнозування.

В даний час найпопулярнішою серед структурних моделей є модель на основі штучних нейронних мереж (artificial neural network, ANN). Нейронні мережі складаються з нейронів (рис. 15).

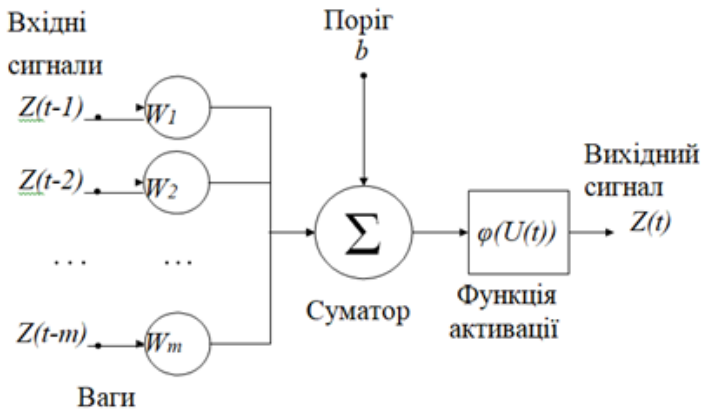


Рис. 15. Нелінійна модель нейрона

Модель нейрона можна описати за допомогою рівнянь

$$U(t) = \sum_{i=1}^m \omega_i Z(t - i) + b; Z(t) = \varphi(U(t)), \quad (22)$$

де $Z(t - 1), \dots, Z(t - m)$ — вхідні сигнали; $\omega_1, \dots, \omega_m$ — синаптичні ваги нейрона; b — поріг; $U(t)$ — функція активації.

Функції активації бувають трьох основних типів:

- функція одиничного стрибка;
- лінійна функція;
- сигмоїдальна функція.

Спосіб зв'язку нейронів визначає архітектуру нейронної мережі.

Взаємозалежності від способу зв'язку нейронів мережі діляться на:

- одношарові мережі прямого поширення;
- багатшарові мережі прямого поширення;
- рекурентні мережі.

Таким чином, за допомогою нейронних мереж можливе моделювання нелінійної залежності майбутнього значення часового ряду від його фактичних значень і від значень зовнішніх факторів. Нелінійна залежність визначається структурою мережі і функцією активації.

Моделі прогнозування на основі ланцюгів Маркова (Markov chain model) припускають, що майбутній стан процесу залежить тільки від його поточного стану і не залежить від попередніх. У зв'язку з цим процеси, що моделюються ланцюгами Маркова, повинні відноситися до процесів з короткою пам'яттю.

Приклад ланцюга Маркова для процесу, що має три стани, представлений на рис. 16.

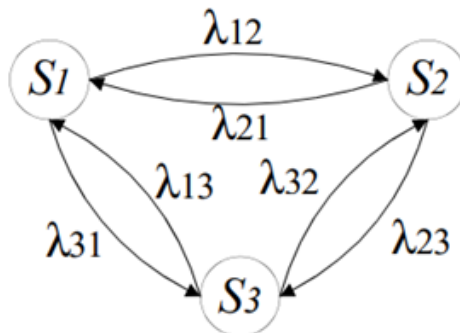


Рис. 16. Ланцюг Маркова з трьома станами

Тут S_1, \dots, S_3 — стан процесу $Z(t)$; λ_{12} — ймовірність переходу зі стану S_1 в стан S_2 , λ_{23} — ймовірність переходу зі стану S_2 в стан S_3 і т. д. При побудові ланцюга Маркова визначається безліч станів і ймовірності переходів. Є поточний стан процесу S_i , то в якості майбутнього стану процесу вибирається такий стан S_j , ймовірність переходу в який (значення λ_{ij}) максимальна.

Таким чином, структура ланцюга Маркова і ймовірності переходу станів визначають залежність між майбутнім значенням процесу і його поточним значенням.

Класифікаційно-регресійні дерева (classification and regression trees, CART) є ще однією популярною структурною моделлю прогнозування часових рядів. Структурні моделі CART розроблені для моделювання процесів, на які впливають як безперервні зовнішні фактори, так і категоріальні. Якщо зовнішні фактори, що впливають на процес $Z(t)$, неперервні, то використовуються регресивні дерева; якщо чинники категоріальні, то — класифікаційні дерева. У разі, якщо необхідно враховувати фактори обох типів, то використовуються змішані класифікаційно-регресійні дерева.

Згідно з моделлю CART, прогнозоване значення часового ряду залежить від попередніх значень, а також від деяких незалежних змінних. На представленому рисунку спочатку попереднє значення процесу порівнюється з константою Z_0 . Якщо значення $Z(t-1)$ менше Z_0 , то виконується наступна перевірка: $X(t) > X_{11}$. Якщо нерівність не виконується, то $Z(t) = C_3$, інакше перевірки тривають до того моменту, поки не буде знайдений лист дерева, в якому відбувається визначення майбутнього значення процесу $Z(t)$. Важливо, що при визначенні значення в розрахунок приймаються як безперервні змінні, наприклад, $X(t)$, так і категоріальні Y , для яких виконується перевірка присутності значення в одному з попередньо визначених підмножин. Значення порогових констант, наприклад, Z_0, X_{11} , а також підмножин Y_{12}, Y_{22} виконується на етапі навчання дерева.

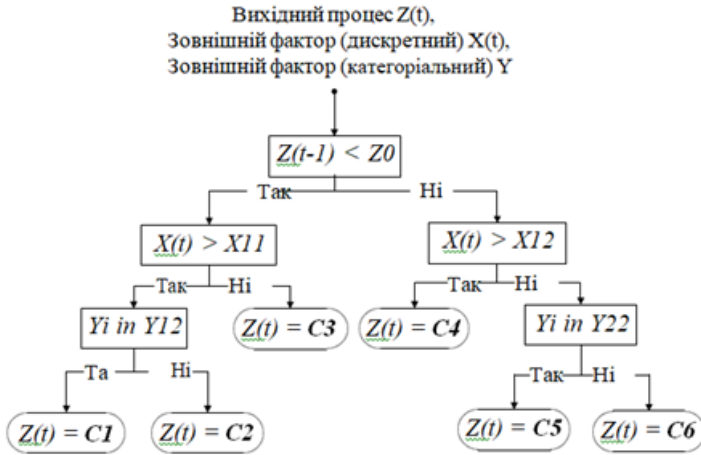


Рис. 17. Бінарне класифікаційно-регресійне дерево

Таким чином, CART моделює залежність майбутньої величини процесу $Z(t)$ за допомогою структури дерева, а також граничних констант і підмножин.

Крім класів моделей прогнозування, розглянутих вище, існують менш поширені моделі і методи прогнозування. Головним недоліком моделей і методів, згаданих у цьому розділі, є недостатня методологічна база, тобто недостатньо докладний опис можливостей як моделей, так і шляхів визначення їх параметрів. Крім того, у відкритому доступі можна знайти лише невелику кількість статей, присвячених застосуванню цих методів.

Метод опорних векторів (support vector machine, SVM) застосовується, наприклад, для прогнозування руху ринків і цін на електроенергію. В основу методу покладена класифікація, вироблена за рахунок переведення вихідних часових рядів, представлених у вигляді векторів, в простір більш високої розмірності і пошуку гіперплощини для розділення з максимальним зазором в цьому просторі. Алгоритм SVM працює в припущенні, що чим більша різниця або відстань між цими паралельними гіперплощинами, тим менше буде середня помилка класифікатора. При цьому завдання прогнозування вирішується таким чином, що на етапі навчання класифікатора виявляються незалежні змінні (зовнішні фактори), майбутні значення яких визначають в який з визначених раніше підкласів потрапить прогноз $Z(t)$.

Генетичний алгоритм (genetic algorithm, GA) був розроблений і часто застосовується для вирішення завдань оптимізації, а також пошукових завдань. Однак деякі модифікації GA дозволяють вирішувати завдання прогнозування.

Алгоритм прогнозування на основі GA дозволяє приділити належну увагу більш ніж 15 зовнішнім факторам, використовуючи базовий GA. Принцип роботи заснований на тому, що вихідні значення процесу $Z(t)$ і зовнішніх чинників $X_1(t), \dots, X_s(t)$ розкладають в набори, що складаються з 0 і 1, які називають генотипами. Далі застосовують ряд перетворень: схрещування і мутації для формування перетворених наборів, які називаються фенотипами. Вихідні та отримані набори досліджуються з використанням функції пристосованості. Якщо рішення вийшло незадовільним, то знову проводиться схрещування і мутації, в результаті чого виходить ще більше нових наборів (нове покоління), які знову оцінюються. Ітеративний процес триває до тих пір, поки рішення не буде задовільним.

Модель на основі передавальних функцій (transfer function, TF) застосовується для прогнозування процесу $Z(t)$ з урахуванням зовнішнього фактора $X(t)$. Рівняння, що відбиває залежність майбутнього значення має вигляд

$$Z(t) = \gamma(B)X(t) + \tau(t), \quad (23)$$

де B — оператор зсуву $BZ(t) = Z(t-1)$, ..., $B^k Z(t) = Z(t-k)$. Часовий ряд $\tau(t)$ характеризує зовнішнє обурення. При цьому функція $\gamma(B)$ має вигляд

$$\gamma(B) = \gamma_0 + \gamma_1 B + \gamma_2 B^k + \dots \quad (24)$$

Коефіцієнти функції (24) γ_i описують динамічні відносини між процесами $Z(t)$ і $X(t)$.

Моделювання біологічних процесів

В усіх випадках використання ресурсів живої природи повинно базуватися на здатності популяції до саморегуляції своєї чисельності і до поступового відновлення біологічного потенціалу після вилучення певної кількості особин. Визначення норм вилучення особин та біомаси з популяції є центральним завданням природокористування та екологічного моніторингу, важливим є також визначення порогу стійкості популяції по відношенню до антропогенного впливу. Перевищення допустимих норм експлуатації популяцій може призвести до її зникнення.

Задача 1. Початкова кількість популяції мишей складає 5000 осіб. Мишами харчуються два хижака — лисиці і сови. Виживша до кінця кожного року частина популяції мишей збільшується на 50%. Початкова чисельність лисиць рівна 20, річний приріст чисельності популяції лисиць складає 13%. Одна лисиця з'їдає по 40 мишей в рік. Початкова чисельність складає 15 осіб, річний приріст популяції совів рівний 10%. Одна сова з'їдає по 30 мишей в рік. Смертність мишей за деякими причинами рівна 10%, смертність лисиць — 5%, совів — 3%. Розрахувати, яка буде чисельність популяції мишей, лисиць і совів через 5 і 10 років.

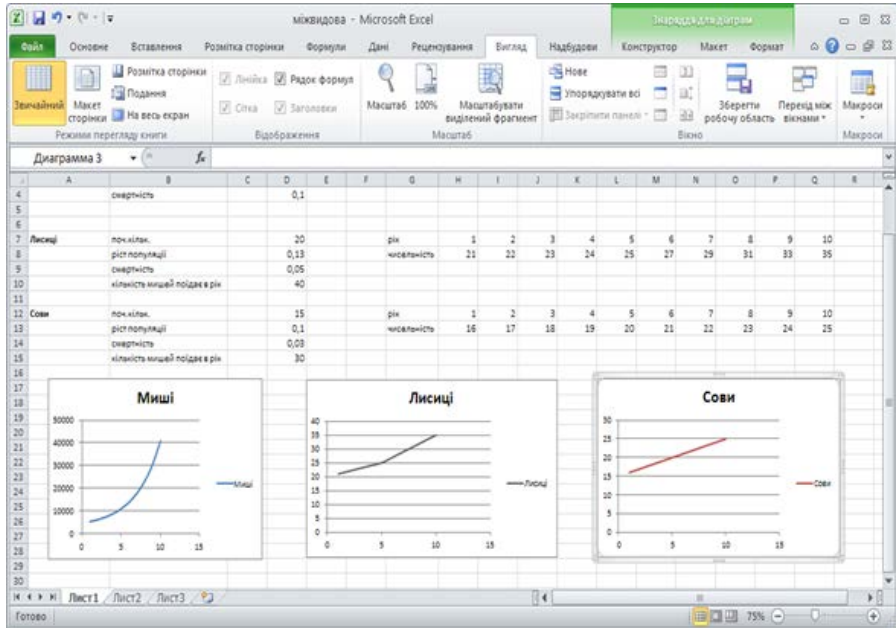
Розв'язання.

Параметри об'єктів системи представлені в вигляді таблиці:

<i>Об'єкт</i>	<i>Параметри</i>	<i>Вид параметрів</i>	<i>Позначення</i>
<i>Миші</i>	<i>Початкова кількість осіб</i> <i>Ріст популяції мишей (%)</i> <i>Смертність мишей (%)</i> <i>Чисельність мишей в і-й рік</i>	<i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Розрахункові дані</i>	M_o P_m C_m M_i
<i>Лисиці</i>	<i>Початкова кількість осіб</i> <i>Кількість мишей, яких поїдає одна лисиця в рік</i> <i>Ріст популяції лисиць (%)</i> <i>Смертність лисиць (%)</i> <i>Чисельність лисиць в і-й рік</i>	<i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Розрахункові дані</i>	L_o K_l P_l C_l L_i
<i>Сови</i>	<i>Початкова кількість осіб</i> <i>Кількість мишей, яких поїдає одна сова в рік</i> <i>Ріст популяції совів (%)</i> <i>Смертність совів (%)</i> <i>Чисельність совів в і-й рік</i>	<i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Розрахункові дані</i>	S_o K_c P_c C_c S_i
<i>Система</i>	<i>Чисельність мишей через 5 і 10 років</i> <i>Чисельність лисиць через 5 і 10 років</i> <i>Чисельність совів через 5 і 10 років</i>	<i>Результат</i> <i>Результат</i> <i>Результат</i>	M_5, M_{10} L_5, L_{10} C_5, C_{10}

Модель даної ситуації буде представлена системою рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} \text{для } i \geq 1 \{ & L_i = L_{i-1}(1 + P_L - C_L), \\ & C_i = C_{i-1}(1 + P_C - C_C), \\ & M_i = (M_{i-1} - L_i \cdot K_L - C_i \cdot K_C)(1 + P_M - C_M). \end{aligned}$$



Виконавши розрахунки, отримуємо значення:

Тварини	Роки									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Миші	5152	5266	5328	5317	5203	4890	4298	3315	1785	511
Лисиці	21	22	23	24	25	27	29	31	33	35
Сови	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Як видно із таблиці, чисельність лисиць і совів непохитно росте, чисельність мишей перші три роки зростає, а починаючи з четвертого року — спадає. До десятого року популяція мишей зникне.

Задача 2. Початкова чисельність популяції оленя складає 2000 осіб. Оленями харчуються вовки. Популяція оленів, які вижили, до кінця кожного року збільшує свою чисельність на 40%. Початкова чисельність популяції вовків складає 15 осіб, один вовк споживає по 30 оленів щорічно, роковий приріст популяції вовків складає 10%.

Мета моделювання: розрахувати, яка буде чисельність оленів через 1, 3, 5 і 10 років.

Об'єкт моделювання:

— екологічна система «хижак — жертва». Для встановлення параметрів кожного із вхідних в систему об'єктів необхідно виділити деякі спрощені припущення, наприклад такі:

- смертність оленів по деяких причинах рівна нулю;
- смертність вовків рівна нулю.

Розробка інформаційної моделі: модель даної ситуації буде представлена системою рекурентних співвідношень:

$$\text{Для } i \geq 1 \{B_i = B_{i-1} + (I + P_6),$$

$$\{O_i = (O_{i-1} - B_i \cdot C)(I + P_0).$$

Значення O_1, O_3, O_5, O_{10} і будуть вихідними результатами.

Розробку комп'ютерної моделі можна виконати як в системі програмування, так і в якомусь пакеті прикладних програм.

Параметри об'єктів системи представимо в вигляді таблиці (при виділених припущеннях):

<i>Об'єкт</i>	<i>Параметри</i>	<i>Вид параметрів</i>	<i>Позна-чення</i>
<i>Олені</i>	<i>Початкова кількість осіб</i> <i>Ріст популяції (%)</i> <i>Чисельність оленів в i-й рік</i>	<i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Розрахункові дані</i>	O_0 P_0 O_i
<i>Вовки</i>	<i>Початкова кількість осіб</i> <i>Кількість оленів, яких поїдає один вовк в рік</i> <i>Ріст популяції вовків в рік</i> <i>Чисельність вовків в i-й рік</i>	<i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Вихідні дані</i> <i>Розрахункові дані</i>	B_0 C P_6 B_i
<i>Система</i>	<i>Чисельність оленів</i>	<i>Результат</i>	O

Комп'ютерний експеримент: текстовий розрахунок можна провести самостійно. А в якості експерименту можна прослідкувати за ха-

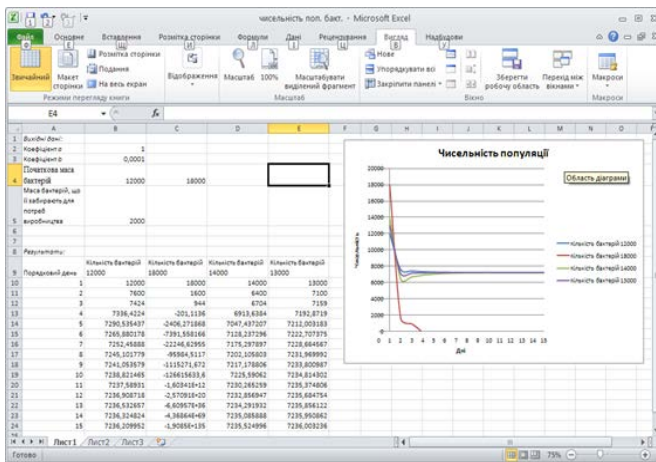
рактором зміни чисельності одного із видів, змінюючи вихідну чисельність осіб і інших показників, також підібрати такі показники, при яких чисельність кожного із видів залишалась би постійною. Для більшої наглядності експерименту можна побудувати графіки, які відображають зміни чисельності кожного виду.

Аналіз отриманої моделі на адекватність об'єкту і мети моделювання: звичайно, дана модель є достатньо спрощеною і малореалістичною. Тому необхідно обговорити, які додаткові, не враховані в умовах задачі, фактори можуть вплинути на зміну чисельності популяції кожного виду.

Задача 3. На заводі планується вирощувати культуру бактерій. Відомо, що якщо маса бактерій x г, то через день вона збільшиться на $(a - bx)x$ г, де коефіцієнти a і b залежать від виду бактерій. Завод щоденно для своїх потреб буде забирати m г бактерій. Дослідити зміну маси бактерій залежно від її початкового значення (для цього важливо знати, як змінюється маса бактерій через 1, 2, 3, ... 30 днів).

Розробка моделі. Вихідні дані: a і b — коефіцієнти; x_0 — початкова маса бактерій; m — маса бактерій, що її забирають для потреб виробництва; Кількість бактерій кожного наступного дня залежить від кількості бактерій попереднього дня і вираховується за формулою: $x_{i+1} = x_i + (a - b \cdot x_i)x_i - m$ — маса бактерій наступного дня.

Результатами є значення маси бактерій через 1, 2, 3, 4, ..., 30 днів.



Бачимо, що маса бактерій швидко зменшується і прямує до значення 7236 г.

Варіанти додаткових досліджень. Що відбудеться до кінця місяця, якщо збільшити початкову масу бактерій? Візьмемо такі значення, як 13000 г, 14000 г, 18000 г.

Аналіз результатів. У результаті цих експериментів можна побачити, що до кінця місяця маса бактерій кожен раз вперто прямує до 7236 г. А при початковій масі в 18000 г вже через 2 дні бактерії загинуть. Обчислювальний експеримент показує, що існує такий інтервал значень початкової маси (від 2764 до 17236 г), при якому на протязі деякого часу маса бактерій стабілізується на рівні 7236 г. Якщо ж узяти початкову масу за межами цього інтервалу, то бактерії загинуть.

Задача 4. Спрогнозувати чисельність окремих популяцій (багато-річні трави, моллюски (слимаки), дикі кабани) в умовах нерівномірного розподілу видів і ресурсів, а також провести чисельне дослідження можливих сценаріїв співіснування і витіснення одного виду іншим.

Якщо вважати, що зовнішніх впливів на популяцію немає, тоді баланс чисельності популяції складається з таких основних факторів: народжуваність; смертність; імміграція; еміграція.

Для зручності вважатимемо, що чисельність деякого виду популяції є неперервною величиною. Такий клас задач на сьогоднішній день має розроблені математичні моделі, які використовують апарат диференціальних рівнянь.

Процес зміни чисельності популяції за невеликий проміжок часу Δt можна описати рівнянням:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + B(t, x(t))\Delta t - D(t, x(t))\Delta t, \quad (1)$$

де $B(t, x(t))$ — кількість народжених і таких, що емігрували, $D(t, x(t))$ — кількість померлих і таких, що іммігрували. Очевидно, що $B(t, 0) \equiv 0$, $D(t, 0) \equiv 0$.

Перейшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, одержимо диференціальне рівняння $\Delta t = B(t, x(t)) - D(t, x(t))$.

Для сучасного моделювання систем «хижак-жертва» або «споживач-ресурс» широко застосовують таку систему рівнянь:

$$\frac{dR}{dt} = Q - V(R, N)N, \quad (2)$$

$$\frac{dN}{dt} = -mN + kV(R, N)N, \quad (3)$$

де R — кількість ресурсу; N — кількість (біомаса) особин популяції споживачів; Q — швидкість надходження ресурсу в систему; $V(R, N)$ — функція, яка моделює швидкість споживання ресурсу однією особиною популяції (питома швидкість споживання); $k < 1$ — час-

тина ресурсу, використовувана за продуктивних цілей; m — коефіцієнт смертності, обернено пропорційний середній тривалості життя особин в певних умовах навколишнього середовища.

Негативне ставлення одного виду до іншого, пов'язане з боротьбою за існування, за домінування, за їжу, простір та інші ресурси між організмами з однаковими потребами. У результаті конкуренції один вид скорочує ресурси іншого виду, який внаслідок цього повільніше росте, залишає менше число нащадків і має менше шансів вижити.

Будемо розглядати сукупність взаємодіючих між собою популяцій. Під популяцією розуміється сукупність особин, що можуть давати життєздатне потомство й піддаються впливу однакових зовнішніх і внутрішніх факторів середовища існування. Вважатимемо, що ареал проживання особин популяції обмежений.

Сутність міжвидової конкуренції полягає в тому, що у особин одного виду зменшується плодючість, виживання і швидкість відтворення.

Так як ми маємо справу з різними популяціями, то звернемося до логістичного рівняння і спробуємо врахувати міжвидову конкуренцію.

Метою числового експерименту є аналіз чисельності трьох видів. Для побудови математичної моделі використаємо вхідні дані: кількість травоїдних — 100; кількість рослин — 200; кількість хижаків — 110; кількість рослин, які з'їдає одна особа популяції травоїдних тварин — 1; кількість рослин на квадратний метр — 10; кількість травоїдних, які з'їдає одна особа популяції хижака — 0,5; швидкість розмноження популяції травоїдних тварин — 0,1; швидкість росту рослин — 40%; швидкість розмноження популяції хижака — 0,10001; доступна площа для розмноження рослин — 19; тривалість життєвого циклу — 12.

Числове моделювання здійснювалося на базі двох рівнянь:

1) рівняння для обчислення показника приросту популяції

$$V_n = rN - \frac{r}{k} N^2, \text{ де } r = \frac{\ln(N_2) - \ln(N_1)}{t_2 - t_1};$$

2) рівняння для обчислення показника максимально можливої біомаси $N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$.

Прогнозовані показники відображено у вигляді графіків (рис. 1), які отримали з допомогою системи програмування C#.

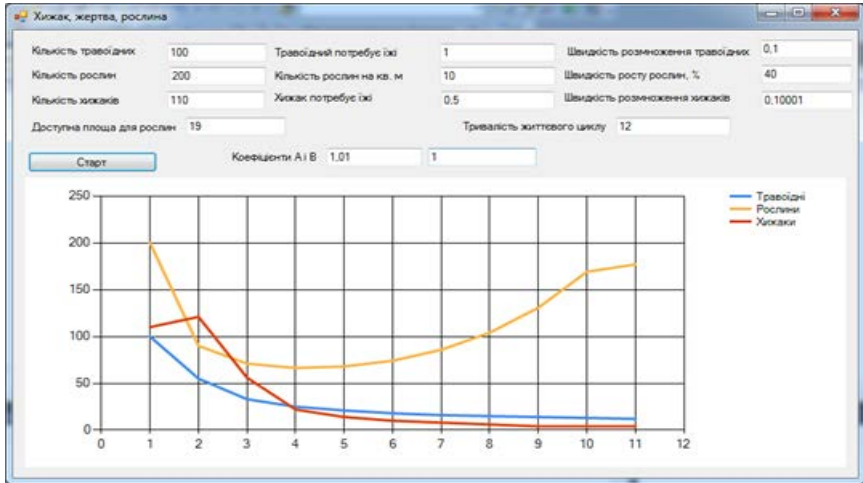


Рис. 1. Модель співвідношення популяцій на визначеній території (MicrosoftVisualStudioC#)

Для того, щоб довести правильність постановки задачі та отриманого розв'язку цієї ж задачі засобами Microsoft VisualStudio C# 2010, побудовано комп'ютерну модель у середовищі Mathcad.

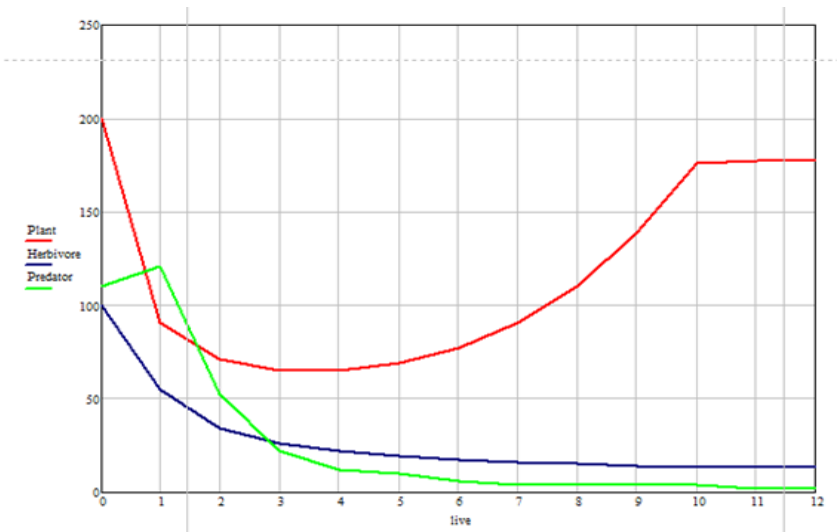


Рис. 2. Модель співвідношення популяцій на визначеній території (Mathcad)

Побудована у Mathcad 15 (рис. 2) модель дає підстави зробити висновки, що згідно постановки задачі було правильно описано математичний функціонал, який дозволяє отримати її розв'язок. У обох розроблених комп'ютерних моделях отримали однаковий результат.

Верифікацію розроблених моделей проведено по даних моніторингу певного виду популяцій, що були отримані студентами природничого факультету під час весняно-літньо-осінніх польових практик та звіти лісництва Чортківського району Тернопільської області.

Задача 5. Зробити прогноз зміни чисельності комах-запилювачів в залежності від кількості груп рослин виділеної території на базі моделі ARIMA

Аналіз вхідних даних, постановка задачі

Нехай у деякому середовищі існує популяція (комахозапильних рослин). На площу розташування особин обмеження накладати не будемо. Протягом тривалого часу ведеться екологічний моніторинг, в результаті якого зібрано дані про кількість особин популяції комахозапильних рослин у зазначені проміжки часу.

Спробуємо спрогнозувати чисельність популяції в умовах нерівномірного розподілу видів і ресурсів, а також провести чисельне дослідження можливих сценаріїв існування виду у заданому інтервалі часу (2018 — 2025 рр.).

Для побудови моделі використаємо вхідні дані, наведені у таблиці 1, які будемо зберігати в окремому документі .csv.

Таблиця 1. Вхідні дані

Часова позначка (рік)	Кількість особин популяції комахо- запильних рослин (одиниць)
2000	456
2001	582
2002	756
2003	800
2004	930
2005	1100
2006	1120
2007	1050
2008	1150
2009	1330
2010	1350

2011	1100
2012	1135
2013	1120
2014	1140
2015	1000
2016	865
2017	1140

Для кращого сприйняття візуалізуємо дані у вигляді графіку (рис. 3).

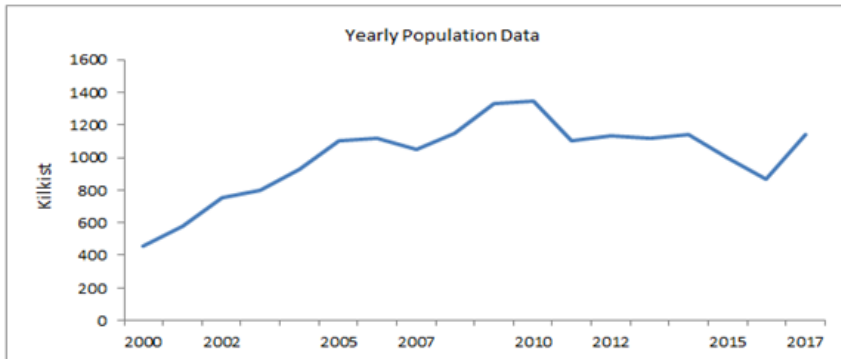


Рис. 3. Щорічні показники кількості особин популяції

Розробки комп'ютерної моделі і її програмна реалізація включає такі кроки:

- імпорт вхідних даних;
- модель часових рядів ARIMA
- підбір параметрів для моделі часових рядів ARIMA;
- аналіз часових рядів в моделі ARIMA для прогнозування чисельності окремої біологічної популяції;
- перевірка отриманих прогнозів;
- підготовка та візуалізація прогнозів на майбутні періоди часу.

Складовими моделі є:

- авторегресійна модель порядку p
- модель із середнім змінним порядку q .

Авторегресійна модель порядку p має вигляд:

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

де Y_t — рівень тимчасового ряду в момент часу t (залежна змінна); φ_p — коефіцієнти, які треба оцінити; ε_t — випадкове збурення, яке описує вплив змінних, не врахованих в моделі. Коефіцієнт φ_0 — визначає постійний рівень ряду і пов'язаний з математичним очікуванням μ .

Модель із середнім змінним порядком q задається рівнянням:

$$Y_t = \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1} - \omega_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \omega_q \varepsilon_{t-q}, \quad (5)$$

де Y_t — рівень ряду в момент часу t ; ω_q — коефіцієнти, які треба оцінити; ε_{t-i} — значення залишків i -тих часових періодів (незалежні змінні).

Моделі із середнім змінним (позначаються *MA*) дають прогноз значення Y_t на основі лінійної комбінації обмеженого числа q залишків в той час, коли авторегресійні моделі (позначаються *AR*) дають прогноз значень Y_t на основі лінійної функції апроксимації обмеженого числа p минулих значень Y_t .

Використання поняття змінного середнього в даному випадку означає, що відхилення залежної змінної від свого середнього, тобто величина $Y_t - \mu$, є лінійною комбінацією біжучих (на даний час) і минулих значень вектора випадкових збурень.

Для комбінованої моделі використовується позначення *ARMA*(p, q), p — порядок авторегресійної частини моделі, q — порядок частини змінного середнього. Модель *ARMA* має загальний вид:

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1} - \omega_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \omega_q \varepsilon_{t-q} \quad (6)$$

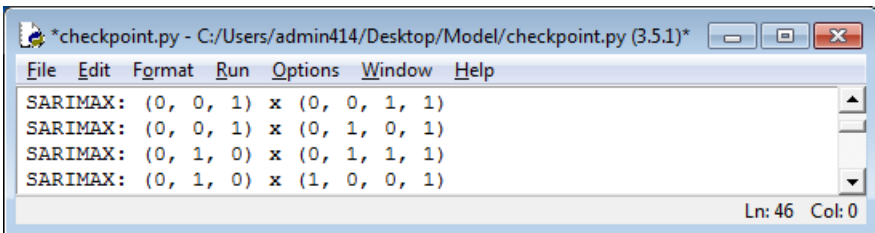
Бокс і Дженкінс запропонували виділити клас нестационарних рядів, які через обчислення послідовних різниць можна привести до стаціонарного виду *ARMA*. Якщо ряд після обчислення d послідовних різниць зводиться до стаціонарного, то для прогнозування його рівнів можна застосувати комбіновану модель авторегресії і змінного середнього, яка позначається *ARIMA*(p, d, q), де p — порядок авторегресії (*AR*), який дозволяє додати попередні значення часового ряду; d — порядок інтегрування (порядок відмінностей вихідного часового ряду), який додає в модель поняття різниць часових рядів (визначає кількість минулих часових точок, які потрібно викреслити з поточного значення); q — порядок змінного середнього, який дозволяє встановити помилку моделі.

Модель *ARIMA* дає можливість обробляти дані часового ряду для кращого розуміння властивостей цього ряду або ж для прогнозування його подальшого розвитку.

Використаємо модель *ARIMA* — *ARIMA* (p, d, q) (P, D, Q) s , де (P, D, Q) відповідають тим самим визначенням, але застосовуються до сезонної складової часового ряду. Параметр s визначає періодичність тимчасового ряду. При підборі даних часових рядів в моделі *ARIMA* головним є обчислення значення *ARIMA* (p, d, q) (P, D, Q) s , які оптимізують необхідний показник.

Скористаємося можливостями системи програмування *Python 3*, яка дозволяє підключити потужні бібліотеки для обробки статистичних даних (в рядку команд записуємо *pip install pandas numpy datetime pyflux matplotlib*). Модулі цих бібліотек містять процедури і функції, які значно полегшують програмну реалізацію алгоритмів нового методу прогнозування на підставі запропонованої моделі при вирішенні задачі прогнозування популяційних часових рядів.

Функція *SARIMAX()* з модуля *statsmodels* може підібрати нову сезонну модель *ARIMA* і оцінити її загальну якість для кожної комбінації параметрів. Оптимальним набором параметрів буде той, в якому потрібні критерії найпродуктивніші. З допомогою системи програмування генеруємо різні комбінації параметрів для досліджуваної моделі (рис. 4):



```
*checkpoint.py - C:/Users/admin414/Desktop/Model/checkpoint.py (3.5.1)*
File Edit Format Run Options Window Help
SARIMAX: (0, 0, 1) x (0, 0, 1, 1)
SARIMAX: (0, 0, 1) x (0, 1, 0, 1)
SARIMAX: (0, 1, 0) x (0, 1, 1, 1)
SARIMAX: (0, 1, 0) x (1, 0, 0, 1)
Ln: 46 Col: 0
```

Рис. 4. Генерування різних комбінацій параметрів

Використаємо наведені вище значення параметрів для автоматизації процесу оцінки моделей *ARIMA* по різних комбінаціях. У статистиці цей процес відомий як пошук по сітці параметрів.

При оцінці і порівнянні статистичних моделей, що відповідають різним параметрам, враховується, наскільки та чи інша модель відпо-

відає даним і наскільки точно вона здатна прогнозувати майбутні точки даних. Використаємо значення AIC (Akaike Information Criterion), яке підходить для роботи з моделями ARIMA на основі statsmodels. AIC оцінює, наскільки добре модель відповідає даним, беручи до уваги загальну складність моделі. Чим менше функцій використовує модель, щоб досягти відповідності даним, тим вище її показник AIC. Тому потрібно знайти модель з найменшим значенням AIC (рис.5).

```

*checkpoint.py - C:/Users/admin414/Desktop/Model/checkpoint.py (3.5.1)*
File Edit Format Run Options Window Help
ARIMA (0, 1, 0) x (1, 0, 0, 1) 1 AIC:134.1258271541158
ARIMA (0, 1, 0) x (1, 0, 1, 1) 1 AIC:104.57685046797204
ARIMA (0, 1, 0) x (1, 1, 0, 1) 1 AIC:120.29834947836284
ARIMA (0, 1, 0) x (1, 1, 1, 1) 1 AIC:90.29379761618745
ARIMA (0, 1, 1) x (0, 0, 0, 1) 1 AIC:102.94718692564297
ARIMA (0, 1, 1) x (0, 0, 1, 1) 1 AIC:92.30509676592155
ARIMA (0, 1, 1) x (0, 1, 0, 1) 1 AIC:88.13723840124091
ARIMA (0, 1, 1) x (0, 1, 1, 1) 1 AIC:79.3109038843379
ARIMA (0, 1, 1) x (1, 0, 0, 1) 1 AIC:104.57685256927105
ARIMA (0, 1, 1) x (1, 0, 1, 1) 1 AIC:91.83854655265941
ARIMA (0, 1, 1) x (1, 1, 0, 1) 1 AIC:90.13417686760877
ARIMA (1, 0, 0) x (0, 0, 0, 1) 1 AIC:146.2317687939189
ARIMA (1, 0, 0) x (0, 0, 1, 1) 1 AIC:135.66740926163638
ARIMA (1, 0, 0) x (0, 1, 0, 1) 1 AIC:134.1258271541158
ARIMA (1, 0, 0) x (0, 1, 1, 1) 1 AIC:104.57685258131143
ARIMA (1, 0, 0) x (1, 0, 0, 1) 1 AIC:136.78082542666327
ARIMA (1, 0, 0) x (1, 0, 1, 1) 1 AIC:132.78989081819952
ARIMA (1, 0, 0) x (1, 1, 0, 1) 1 AIC:104.94804248473625
ARIMA (1, 0, 0) x (1, 1, 1, 1) 1 AIC:106.38879380291672
ARIMA (1, 0, 1) x (0, 0, 0, 1) 1 AIC:135.6660592077362
Ln: 66 Col: 12

```

Рис. 5. Пошук моделі з найменшим значенням AIC

Зауваження. AIC — інформаційний критерій Акаїке (Akaike Information Criterion) — це міра відносної якості статистичних моделей для заданого набору даних. Маючи сукупність моделей для цих даних, AIC оцінює якість кожної з моделей відносно кожної з інших моделей. Отже, AIC пропонує засоби для обирання моделі.

З рейтингу, який дав AIC, ARIMA(0, 1, 1)x(0, 1, 1, 1) отримує найменший показник AIC (170.03). Отже, ці параметри можна вважати оптимальними.

Проведемо перевірку точності прогнозу в порівнянні з реальними даним. Зробимо це з допомогою відповідного коду в системі програмування:

Атрибути `get_prediction()` і `conf_int()` дозволяють отримувати значення та інтервали для прогнозів часових рядів.

Аргумент `dynamic=False` включає покрокове прогнозування, тобто прогнози в кожній точці генеруються з використанням повної історії

```
plt.clf()
pred = results.get_prediction(start='2010-01-01', dynamic=False)
pred_ci = pred.conf_int()
ax = plt.plot(data.index, data['kilkist'])
pred.predicted_mean.plot(ax=ax, label='One-step ahead Forecast',
alpha=.7)
ax.fill_between(pred_ci.index, pred_ci.iloc[:, 0], pred_ci.iloc[:, 1], color='k',
alpha=.2)
ax.set_xlabel('Date')
ax.set_ylabel('kilkist')
plt.legend()
plt.show()
y_forecasted = pred.predicted_mean
y_truth = y['2010-01-01:']
# Compute the mean square error
mse = ((y_forecasted - y_truth) ** 2).mean()
print("The Mean Squared Error of our forecasts is {}".format(round(mse, 2)))
pred_dynamic = results.get_prediction(start=pd.to_datetime('2010-01-
01'), dynamic=True, full_results=True)
pred_dynamic_ci = pred_dynamic.conf_int()
ax = y[:].plot(label='observed', figsize=(20, 15))
pred_dynamic.predicted_mean.plot(label='Dynamic Forecast', ax=ax)
ax.fill_between(pred_dynamic_ci.index, pred_dynamic_ci.iloc[:, 0],
pred_dynamic_ci.iloc[:, 1], color='k', alpha=.25)
ax.fill_betweenx(ax.get_ylim(), pd.to_datetime('2010-01-01'), y.index[-1],
alpha=.1, zorder=-1)
ax.set_xlabel('Date')
ax.set_ylabel('kilkist')
plt.legend()
plt.show()
```

Щоб порівняти прогнозовані значення з реальними значеннями часового ряду задля визначення точності результатів, було проведено верифікацію моделі за допомогою програмного коду (рис.6).

```
arima.py - C:/Users/admin414/Desktop/Model/arima.py (3.5.1)
File Edit Format Run Options Window Help
import numpy as np
import pandas as pd
import pyflux as pf
from datetime import datetime
import matplotlib.pyplot as plt

data = pd.read_csv('population12.csv')
data.index = data['data'].values

plt.figure(figsize=(15,5))\n
plt.plot(data.index,data['kilkist'])
plt.ylabel('Kilkist')\n
plt.title('Yearly Population Data');

model = pf.ARIMA(data=data,ar=4,ma=4,integ=0,target='kilkist')
x = model.fit("\MLE")
x.summary()

model.plot_z(indices=range(1,9))
model.plot_fit(figsize=(15,5))
model.plot_predict_is(10,figsize=(15,5))
model.plot_predict(h=8,past_values=15,figsize=(15,5))

model.predict(h=8)

Ln: 17 Col: 11
```

Рис. 6. Верифікація моделі

Отримані графіки дозволяють порівняти прогнозовані значення з реальними значеннями часового ряду (рис.7).

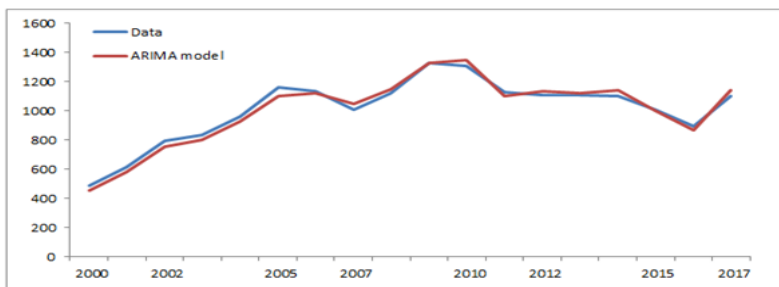


Рис. 7. Співставлення реальних даних з отриманими прогнозами

Відхилення, які оцінюють різницю отриманих результатів з реальними даними в середньому до 10%, є хорошим показником за думкою фахівців.

Отже, можна будувати прогноз майбутніх значень популяційних часових рядів. Знову скористаємося системою програмування:

```

# Атрибут get_forecast() об'єкта часового ряду може обчислити
значення на вказану кількість кроків
pred_uc = results.get_forecast(steps=8)
pred_ci = pred_uc.conf_int()

# Візуалізація часового ряду і прогнозування його значень
ax = y.plot(label='observed', figsize=(20, 15))
pred_uc.predicted_mean.plot(ax=ax, label='Forecast')
ax.fill_between(pred_ci.index, pred_ci.iloc[:, 0], pred_ci.iloc[:, 1], color='k',
alpha=.25)
ax.set_xlabel('Date')
ax.set_ylabel('kilkist')
plt.legend()
plt.show()

```

Згідно постановки задачі виконано прогноз майбутніх значень популяційних часових рядів на період з 2018 року по 2025 рік. Результат такого прогнозу представлений на рис.8.

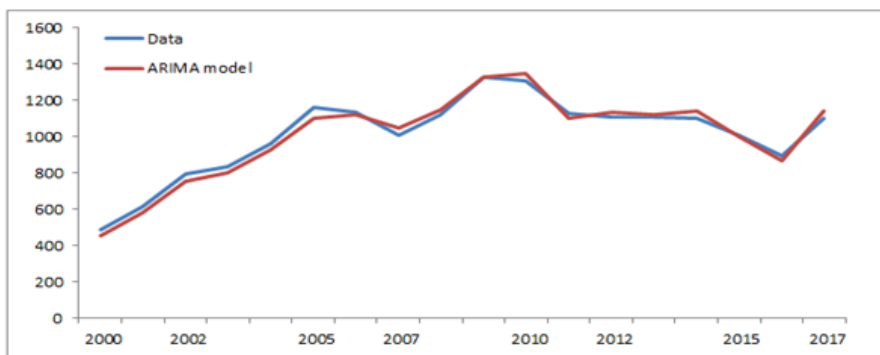


Рис. 8. Прогноз чисельності популяції на 2018 – 2025 рр.

Для наочнішого сприйняття інформації про кількість особин популяції отримані дані подамо у числовій формі (таблиця 2):

Таблиця 2. Отримані дані

2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
1204	1376	1400	1370	1245	1097	734	568

Отримані результати дають можливість зробити висновок, що дана популяція досягне свого піку у 2020 році, після чого буде поступово зменшуватися.

Математичне моделювання задач про оптимальні: використання ресурсів, раціон, розріз матеріалів

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. У результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливорює формалізацію будь-якої економічної ситуації. Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. У математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовують у практичних дослідженнях.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Усі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовують нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне облад-

нання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність). Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата

можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

В основу моделей лінійного програмування закладені два прості допущення, які майже завжди виконуються:

— припущення подільності, яке полягає в тому, що сумарна кількість ресурсів, що використовуються і відповідний прибуток строго пропорційні обсягу випущеної продукції;

— припущення адитивності полягає у рівності загальної суми всіх затрачених ресурсів кількості ресурсів, спожитих в технологічних процесах та рівності загального прибутку всім прибуткам, отриманим в процесах.

Питання про постановку задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Задача. Вибрати найдешевший режим харчування, що забезпечує наявність всіх необхідних поживних речовин.

Розв'язування. Вважатимемо, що є три види продуктів: B_1, B_2, B_3 , і необхідна кількість поживних речовин A_1, A_2, A_3, A_4 . Позначимо через

α_{ij} кількість поживних речовин вигляду A_i у продукті виду B_j , β_i — мінімальна добова потреба в речовині; c_i — ціна одиниці їжі. Дані запишемо в таблицю.

Загальна кількість спожитих речовин не повинна бути меншою, ніж мінімальна добова потреба в цій речовині.

Види поживних речовин	Види продуктів			Мінімальна потреба в речовині на добу
	B_1	B_2	B_3	
A_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
A_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
A_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
A_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	β_4
Вартість одиниці продукту	c_1	c_2	c_3	

Враховуючи обмеження, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \geq \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \geq \beta_2, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \geq \beta_3, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 \geq \beta_4. \end{cases} \quad (8)$$

Вартість всієї їжі позначимо через F і вона повинна бути мінімальною, тобто

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \text{ (min)}. \quad (9)$$

Так як від'ємна кількість їжі не має логічного змісту, то $x_i \geq 0$.

До такого класу відносяться всі задачі з подібними системами обмежень та аналогічним виглядом цільової функції, що оптимізується на максимум чи мінімум.

Математично такі задачі формулюють так: *серед невід'ємних розв'язків системи нерівностей (8) знайти такий, який надає функції (9) найменшого значення.*

Лема 2. ОЗЛП з ОР завжди може бути зведена до ОЗЛП з ОН.

І звідси випливає така теорема

Теорема 1. ОЗЛП з ОР і ОЗЛП з ОН еквівалентні між собою.

Щоб звести задачу до другої стандартної форми, можна методом Жордана — Гауса виділити базисні невідомі та використавши невід'ємність невідомих, звести до нерівностей обмеження ЗЛП.

Приклад. Звести до ОЗЛП з ОН задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, 4) \\ F = 2 - x_1 + 3x_2 \quad (min). \end{cases}$$

Розв'язування. Випишемо матрицю системи обмежень:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

і шукаємо ранг матриці. Базисним буде мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отже, ранг матриці дорівнює 2, x_1 і x_4 — вільні невідомі, x_2 і x_3 — базисні. Розв'язавши систему відносно базисних невідомих, маємо

$$\begin{cases} x_2 = 9 - 3x_1 + x_4, \\ x_3 = 1 + x_1 + 2x_4, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Так як $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, то з останньої системи маємо:

$$\begin{cases} 9 - 3x_1 + x_4 \geq 0, & \begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \end{cases} \\ 1 + x_1 + 2x_4 \geq 0, & \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0; & x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Запишемо форму через вільні невідомі

$$F = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Таким чином, ОЗЛП з ОН рівносильна до даної має вигляд:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Зауважимо, що ОЗЛП з ОН рівносильна до ОЗЛП з ОР може мати різні вигляди, все залежить від того, які ми невідомі оголосимо базисними, а які вільними.

Тест

Установіть відповідність між стандартними формами задач лінійного програмування і обмеженнями.

Перша стандартна форма

Обмеження-рівняння

Друга стандартна форма

Обмеження-нерівності

Постановка задач лінійного програмування.

Побудова математичної моделі

Задача 1. Цех приватного підприємства «Тернопіль-деталь» випускає вироби двох видів для сільськогосподарської техніки — вали ВС-400 і втулки МС-130. На виробництво одного вала робітник витрачає 3 год, а на виробництво однієї втулки — 2 год. Від реалізації одного вала підприємство отримає прибуток 8 гр. од., а від реалізації однієї втулки — 6 гр. од. Підприємство за замовленням має випустити не менше 10 валів і не менше 20 втулок. Скільки валів і скільки втулок має випустити цех, щоб отримати найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу становить 90 людино-годин?

Розв'язування

Нехай x_1 — кількість виготовлених валів, x_2 — кількість виготовлених втулок. За умовою задачі, $x_1 \geq 10$; $x_2 \geq 20$. Тоді на виробництво валів буде затрачено $3x_1$ год, а на виробництво втулок — $2x_2$ год. Маємо рівняння:

$$3x_1 + 2x_2 = 90.$$

Прибуток від реалізації одного вала становить 8 гр. од, тоді від реалізації x_1 валів він становитиме $8x_1$ (гр. од.). Аналогічно прибуток від реалізації втулок буде $6x_2$ (гр. од.).

Отримаємо рівняння для цільової функції, яке потрібно дослідити на *тах*:

$$F = 8x_1 + 6x_2 \text{ (max).}$$

Одержуємо математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 90; \\ x_1 \geq 10; \\ x_2 \geq 20; \end{cases}$$

$$F = 8x_1 + 6x_2 \text{ (max).}$$

За годину роботи, затрачену на виробництво валів, підприємство одержить $\frac{8}{3}$ гр. од., а за годину роботи з виробництва втулок — $6 : 2 = 3$ (гр. од.).

Не важко бачити, що підприємству потрібно випустити 10 валів, на що витратять $3 \cdot 10 = 30$ (люд.-год.), тоді на виготовлення втулок залишиться $90 - 30 = 60$ (люд.-год.), що дозволить випустити $60 : 2 = 30$ (шт.). За таких умов прибуто підприємства становитиме $F = 8 \cdot 10 + 6 \cdot 30 = 80 + 180 = 260$ (гр. од.).

Задача 2. Скласти математичну модель задачі. Меблева фабрика «Меблі для всіх» виготовляє стільці, столи, бюро і книжкові шафи, використовуючи плити МДФ і ДСП, до того ж на складі є 500 м^2 МДФ-плит і 1000 м^2 ДСП-плит. Трудові ресурси становлять 800 людино-годин. Нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу і прибутки подані в таблиці.

Ресурси	Витрати на один виріб			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
МДФ-плита	5	1	9	12
ДСП-плита	2	3	4	1
Трудові ресурси	3	2	5	10
Прибуток від реалізації 1 виробу	12	5	15	10

Розв'язування

Позначимо через x_1 кількість виготовлених столів; x_2 — кількість стільців; x_3 — кількість б'юро; x_4 — кількість книжкових шаф.

На складі є 500 м^2 МДФ-плити. Тому маємо обмеження:

$$5x_1 + x_2 + 9x_3 + 12x_4 \leq 500.$$

Аналогічно для ДСП-плит маємо:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 1000,$$

а для затрачених трудових ресурсів —

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 800.$$

Очевидно, що $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$.

Тоді найбільший прибуток меблева фабрика одержить, якщо цільова функція

$$F = 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 10x_4$$

досягне свого максимального значення.

Отже, математична модель задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 9x_3 + 12x_4 \leq 500; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 1000; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 800; \end{cases}$$

$$F = 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 10x_4 \text{ (max)}.$$

Задача 3. Хоростківський молокозавод випускає пастеризоване молоко, кефір і сметану, розфасовані в пакети. На виробництво 1 т пастеризованого молока, кефіру та сметани витрачається відповідно 1,01 т, 1,01 т і 9,45 т молока. Затрати робочого часу при розливі 1 т пастеризованого молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин, а на розфасовці сметани зайняті автомати протягом 3,25 год. Усього для виробництва молочної продукції завод щоденно одержує 136 т молока. Основне обладнання може бути зайняте в день згідно технології протягом 21,4 год, а автомати з розфасовки сметани — 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т пастеризованого молока, кефіру і сметани, розфасованих в пакети, дорівнюють відповідно 30 тис грн, 25 тис грн і 125 тис грн. Завод повинен забезпечувати клієнтам щоденні потреби в пастеризованому молоці не менш як 100 т.

Визначити, яку продукцію і в якій кількості щоденно виробляти заводіві, щоб прибуток від її реалізації був найбільший.

Розв'язування

Для побудови математичної моделі задачі позначимо через x_1 кількість тонн пастеризованого молока, x_2 — кефіру і x_3 — сметани, розфасованих в пакети, яку молокозавод випускатиме щоденно. У результаті порівняння фактичних затрат ресурсів з наявними одержимо таку систему обмежень:

$$\begin{cases} 1,01x_1 + 1,01x_2 + 9,45x_3 \leq 136; \\ 0,18x_1 + 0,19x_2 \leq 21,4; \\ 3,25x_3 \leq 16,25; \\ x_1 \geq 100; \\ x_2 \geq 0; \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що обмеження $x_1 \geq 100$ ми одержали, виходячи з найменшшмовливої норми випуску пастеризованого молока.

Тоді прибуток молокозаводу виражатиметься функцією

$$F = 30x_1 + 25x_2 + 125x_3,$$

яку необхідно дослідити на максимум.

Отже, математична модель задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} 1,01x_1 + 1,01x_2 + 9,45x_3 \leq 136; \\ 0,18x_1 + 0,19x_2 \leq 21,4; \\ 3,25x_3 \leq 16,25; \\ x_1 \geq 100; \\ x_2 \geq 0; \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = 30x_1 + 25x_2 + 125x_3 \text{ (max)}.$$

Завдання для самостійної роботи

Скласти математичні моделі до задач лінійного програмування.

Задача 4. Торгове підприємство для продажу товарів трьох видів використовує два види ресурсів — час і площу торгових залів. Затрати ресурсів на продаж однієї партії товару кожного виду подано в таблиці. Прибуток, одержаний від реалізації однієї партії товару першого виду, становить 3 млн. грн, другого виду — 6 млн. грн, а третього — 5 млн. грн. Визначити оптимальну структуру товарообороту, яка дозволить торговому підприємству одержати максимальний прибуток.

Ресурси	Вид товару			Обсяг ресурсів
	I	II	III	
Час, люд.-год	0,5	370	0,6	
Площа, м ²	0,1	90	0,2	

Задача 5. На п'яти станках різних типів можна виконувати п'ять операцій з обробки деталей. При цьому (через технології виробництва) за кожним з станків може бути закріплена тільки одна операція, до того ж одна і та сама операція може виконуватися тільки одним станком. Відомо час виконання кожної з операцій на кожному зі станків, який задається матрицею T :

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

Розподілити виконання операцій між станками так, щоб сумарний час на обробку деталей був мінімальний.

Задача 6. Підприємство випускає три види виробів. Місячна програма випуску становить 200 виробів першого виду, 1800 — другого, 1500 — третього. Для випуску виробів використовують матеріали, щомісячні витрати яких не можуть перевищувати 61 т. На один виріб 1-го виду витрачається 8 кг матеріалу, 2-го — 9 кг, 3-го — 15 кг. Гуртова ціна одного виробу першого виду становить 7 тис. грн, другого — 10 тис. грн, а третього — 9 тис. грн. Визначити оптимальний план випуску виробів, який забезпечує підприємству максимальний прибуток.

Задача 7. Для перевезення вантажу використовують автомобілі типів А і В. Вантажопідйомність машин кожного типу — 5 т. За один раз автомобіль А витрачає 1,5 кг мастильних матеріалів і 50 л бензину, а автомобіль В відповідно 2 кг і 30 л. На базі є 45 кг мастильних матеріалів і 900 л бензину. Витрати на експлуатацію автомобіля А становлять 6 тис. грн, а автомобіля В — 4 тис. грн. Необхідно перевести 60 т вантажу. Скільки потрібно використати автомобілів типів А і В, щоб експлуатаційні витрати були мінімальні?

Задача 8. Урядом країни виділяється 1 млрд. грн на розробку альтернативних джерел енергії. Для конкурсу з більше як сотні заявок відібрано 6 проектів, оцінка даних яких подана в таблиці.

Згідно умов конкурсу, на розробку проектів з використання сонячної енергії буде виділено не менше ніж 30% всіх інвестицій, а ядерний проект буде профінансовано не менше як на 50%. Розрахувати оптимальний варіант, який би забезпечував максимум віддачі інвестицій.

№ проекту	Класифікація проекту	Віддача проекту	Максимальна кількість
		на 1 вкладену грн	виділених коштів на проект (млн. грн)
1.	Сонячний	4,4	220
2.	Сонячний	3,8	180
3.	Синтетичне паливо	4,1	250
4.	Вугільний	3,5	150
5.	Ядерний	5,1	400
6.	Геотермальний	3,2	120

Задача 9. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А1, А2, А3 використовує три види сировини: цукор-пісок, патоку і фруктове пюре. Норми використання сировини кожного виду на виробництво одної тонни карамелі кожного виду подані в таблиці. Також відома загальна кількість сировини кожного виду і прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини.	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Об'єм сировини (т)
	А1	А2	А3	
Цукор-пісок	0,75	0,4	0,5	1000
Патока	0,4	0,4	0,3	700
Фруктове пюре	—	0,2	0,1	250
Прибуток від реалізації 1 т продукції (млн. грн)	166	250	150	

Необхідно знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток фабрики.

Задача 10. Нафтопереробний завод одержує чотири види напів-фабрикатів: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентолу. У результаті змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюється три сорти авіаційного бензину: марки А — 2 : 3 : 5 : 2; В — 3 : 1 : 2 : 1 і С — 2 : 2 : 1 : 3. Вартість 1 т вказаних сортів бензину: А — 120 тис. грн., В — 100 тис. грн., С — 150 тис. грн. Визначити пропорції змішування компонентів, при якій буде досягнуто максимальної вартості продукції, а також оптимальний план змішування за умови максимального використання компонентів.

Задача 11. На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурі лисиці та песці, для яких згодуюють три види кормів. Кількість корму кожного виду, яку повинні щоденно одержувати звірі, загальна кількість корму кожного виду, яка може бути використана фермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці та песця подано в таблиці.

Вид корму	Кількість одиниць корму, яку щоденно повинні одержувати		Загальна кількість корму
	Лисиця	Песець	
	I	2	
II	4	1	480
III	6	7	852
Прибуток від реалізації однієї шкурки (гр. од.)	32	25	

Визначити, скільки лисиць і скільки песців необхідно виростити на фермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальний.

Задача 12. На базі є для реалізації металевий прут завдовжки 3,8 м. Підприємству необхідно поставити заготовки завдовжки 1,25 м, 1,00 м і 0,70 м у кількостях відповідно 5000 шт., 7200 шт. і 8000 шт. Яка кількість прутів необхідна і якими способами потрібно нарізати заготовки, щоб відходи були мінімальними?

Задача 13. Є три ділянки землі, на яких можуть бути засіяні кукурудза, пшениця, ячмінь і просо. Площа кожної з ділянок відповідно

дорівнює 700 га, 280 га і 320 га, необхідно засіяти відповідно під культури: кукурудза — 440 га, пшениця — 230 га, ячмінь — 210 га і просо — 320 га. Урожайність кожної з культур для кожної з ділянок задано матрицею C :

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 18 & 24 \\ 45 & 28 & 22 & 18 \\ 50 & 22 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Визначити, скільки гектарів кожної культури на кожній з ділянок необхідно засівати, щоб загальний збір зерна був максимальний.

Перша і друга стандартні форми задач лінійного програмування

Задача 14. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана — Гауса (звичайних жорданових виключень)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язування

Запишемо коефіцієнти та вільні члени кожного рядка в таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	-3	2	6
1	-2	0	-1	-6
0	1	1	3	16
2	-3	2	0	6

Взявши за розв'язуючий (ключовий) елемент коефіцієнт при x_1 у першому рівнянні, переписемо без зміни рядок таблиці, яка містить цей елемент (назвемо його розв'язуючим рядком) (оскільки ключовий елемент дорівнює 1), а всі елементи розв'язуючого (першого) стовпця, крім розв'язуючого, замінимо нулями. Для цього застосуємо звичайні жорданові виключення. У результаті перетворень отримаємо нову таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	-3	2	6
0	-3	3	-3	-12
0	1	1	3	16
0	-5	8	-4	-6

Послідовно провівши перетворення за описаним алгоритмом, отримаємо такі ітераційні таблиці.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	-2	1	2
0	1	-1	1	4
0	0	2	2	12
0	0	3	1	14

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	0	3	14
0	1	0	2	10
0	0	1	1	6
0	0	0	-2	-4

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	0	0	8
0	1	0	0	6
0	0	1	0	4
0	0	0	1	2

З останньої таблиці можна виписати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 8, \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6, \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 2. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо: $x_1 = 8$; $x_2 = 6$; $x_3 = 4$; $x_4 = 2$.

Задача 15. Перетворити систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 12; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 10; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

задачі лінійного програмування з I стандартної форми в II.

Розв'язування

Задача лінійного програмування містить чотири невідомі. Очевидно, що в даній системі обмежень є дві базисні невідомі (за кількістю обмежень) і дві вільні невідомі — $4 - 2 = 2$.

Виберемо в якості базисних невідомих, наприклад, змінні x_3 і x_4 , тоді вільними будуть x_1 і x_2 .

Додамо перше рівняння до другого і одержаний результат запишемо як перше рівняння новоутвореної системи:

$$3x_1 + 3x_2 + x_4 = 22.$$

Домножимо перше рівняння вихідної системи на 2, друге — на 3, а результати додамо й запишемо як друге рівняння новоутвореної системи: $8x_1 + 7x_2 + x_3 = 54$.

Тому маємо:
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 22; \\ 8x_1 + 7x_2 + x_3 = 54. \end{cases}$$

Знайдемо з останньої системи базисні невідомі:

$$\begin{cases} x_4 = 22 - 3x_1 - 3x_2; \\ x_3 = 54 - 8x_1 - 7x_2. \end{cases}$$

Оскільки $x_i \geq 0$, то одержимо систему:

$$\begin{cases} 22 - 3x_1 - 3x_2 \geq 0; \\ 54 - 8x_1 - 7x_2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 22; \\ 8x_1 + 7x_2 \leq 54. \end{cases}$$

Розглянуті вище перетворення можна виконати і за допомогою звичайних жорданових перетворень:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	-1	3	12
2	1	1	-2	10

x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	3	0	1	22
2	1	1	-2	10

x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	3	0	1	22
8	7	1	0	54

Слід відмітити, що вибір базисних невідомих може бути довільним, це ніяким чином не впливає на розв'язок задачі.

Для перетворення системи обмежень задачі лінійного програмування з II стандартної форми в I необхідно лише пам'ятати, що якщо нерівність-обмеження записано зі знаком « \leq », то до її лівої частини потрібно додати змінну $x_j \geq 0$, де j є наступним значенням після останньої реальної змінної. Якщо нерівність-обмеження записано зі знаком « \geq », то від її лівої частини потрібно відняти змінну $x_j \geq 0$.

Завдання для самостійної роботи

16. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана — Гауса.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Для кращого розуміння алгебраїчних властивостей задач лінійного програмування скористаємось їх геометричною інтерпретацією. Введемо поняття опуклої множини.

Означення 1. Множину точок M називають **опуклою**, якщо разом з будь-якими двома її точками множині належить і відрізок, що їх сполучає.

Означення 2. Множину називають **обмеженою**, якщо її можна помістити в кулю (коло) скінченного радіуса з центром у будь-якій точці множини, і **необмеженою** в протилежному випадку.

Означення 3. **Граничною** називають таку точку множини, в довільному околі якої є і точки, що належать множині, і точки, що їй не належать.

Означення 4. Сукупність граничних точок множини називають її **границею**.

Найпростіший приклад опуклої множини — опуклий багатокутник. Його границя складається з відрізків чи прямих. Точки, в яких перетинаються відрізки чи прямі границі багатокутника, називаються його **вершинами**.

Означення 5. **Перетином** областей називають множину точок, що належать кожній з цих областей.

Теорема 2. Перетин будь-якого числа опуклих областей завжди є опуклою множиною.

Для геометричної інтерпретації будемо розглядати задачі лінійного програмування, які містять лише дві невідомі, оскільки вони легко відображаються на прямокутній декартовій системі координат. Задачі з трьома невідомими на рисунку розглядатимуться в проекції, що утруднить їх розгляд, а задачі з більшою кількістю невідомих взагалі важко уявити геометрично. Варто відзначити, що можна розглядати і задачі з більшою кількістю невідомих, але за умови, що задача буде зведена з першої стандартної форми до другої стандартної форми.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \quad (\text{extr}). \quad (2)$$

Лема 3. Розв'язком нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ є півплощина.

Означення 6. Півплощину, побудовану за нерівністю $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ називають **півплощиною розв'язків нерівності**, її границю — **граничною прямою** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Означення 7. Сукупність точок, яка задовольняє систему нерівностей (1), називають **многокутником розв'язків** (або **областю допустимих значень**) задачі лінійного програмування (1), (2).

Теорема 3. Многокутник розв'язків завжди є **опуклою фігурою**.

Теорема 4. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у **вершинах многокутника розв'язків**.

Таким чином, задачу лінійного програмування можна інтерпретувати так: у многокутнику розв'язків знайти таку вершину, де цільова функція набуває найменшого (найбільшого) значення.

Тест

Установіть відповідність між початком речення і його закінченням.

Геометричною інтерпретацію обмеження-нерівності є ...	півплощина.
Геометричною інтерпретацію обмеження-рівняння є ...	пряма.
Многокутник розв'язків завжди є ...	опуклим.
Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у ...	вершинах.

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

На основі геометричної інтерпретації сформуємо алгоритм графічного методу відшукування оптимальних значень цільової функції.

1. Будуємо многокутник розв'язків. Він складається з перетину окремих півплощин розв'язків системи (1). У силу обмежень $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ многокутник розв'язків завжди міститься у першому квадранті. Для кожного обмеження достатньо знайти дві точки, які належать граничній прямій.

Якщо многокутник розв'язків замкнений, то тоді задача лінійного програмування має чисельне значення мінімуму і максимуму. Якщо многокутник розв'язків незамкнений, то принаймні одне з екстремальних значень дорівнює нескінченності. Якщо побудувати многокутник розв'язків не вдалося, то кажуть, що задача лінійного програмування не має розв'язків.

2. Знаходимо оптимальну точку. Вона міститься у вершині многокутника розв'язків. Для її відшукування будуть *вектор нормалі* прямої цільової функції \bar{N} . Початок вектора нормалі міститься у точці $(0; 0)$,

а кінець — у точці $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)$, або, що те саме, у точці $(c_1; c_2)$. Для

вектора нормалі визначальним є його напрям, а не абсолютна величина (для зручності величину вектора можна змінити, помноживши її на невід'ємне число для збереження напрямку).

3. Перпендикулярно до вектора нормалі будуємо лінію рівня. Для зручності її можна побудувати за двома точками $(0; 0)$ і $(-c_2; c_1)$ або $(0; 0)$ і $(c_2; -c_1)$. Якщо переміщувати лінію рівня за напрямом вектора нормалі, то остання спільна точка лінії рівня і многокутника розв'язків (вершина) буде точкою максимуму. Якщо переміщувати лінію рівня проти напрямку вектора нормалі, то остання спільна точка лінії рівня і многокутника розв'язків (вершина) буде точкою мінімуму.

4. Обчислюємо оптимальні значення. Знаходимо координати вершин, у яких міститься максимум і мінімум як розв'язки систем лінійних рівнянь, що визначають сторони многокутника, які утворюють ці вершини. Знайдені координати підставляємо у форму цільової функції (2).

Зауважимо, що значення максимуму ніколи не може бути більшим за значення мінімуму.

Задача 1. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$F = 2x_1 + 3x_2 \text{ за умов обмеження } \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Побудуємо прями, що відповідають рівнянням, зрозумілим із системи обмежень, і відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

I: $x_1 + 3x_2 = 10$. Пряма проходить, наприклад, через точки (1; 3) і (4; 2). Щоб визначити, яка з двох отриманих півплощин є розв'язком відповідної нерівності, підставляємо у її рівняння координати довільної точки і визначаємо істинність нерівності. Наприклад, підставивши у нерівність $x_1 + 3x_2 \leq 10$ координати точки (0; 0), одержимо $0 + 3 \cdot 0 \leq 10$; $0 \leq 10$ — істинна нерівність. Тоді розв'язком заданої нерівності будуть усі точки, які містяться нижче від граничної прямої.

II: $x_1 + x_2 = 6$; (6; 0), (0; 6).

III: $2x_1 + x_2 = 5$; (2; 1), (0; 5).

Умова $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ вказує на достатність розгляду в першому квадранті.

Усім умовам належності до відповідних півплощин відповідає чотирикутник $ABCD$. Будуємо вектор нормалі $\vec{N}(2;3)$. Перпендикулярно до вектора нормалі проводимо лінію рівня. Якщо переміщати її за напрямом вектора нормалі, то останньою спільною точкою многокутника розв'язків і лінії рівня буде точка B . Точка B утворена в результаті перетину **I** і **II** обмежень. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10; \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ 2x_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, $B(4; 2)$.

Якщо переміщати її проти напрямку вектора нормалі, то останньою спільною точкою многокутника розв'язків і лінії рівня буде точка D .

Точка D утворена в результаті перетину **III** обмеження і прямої $x_2 = 0$. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

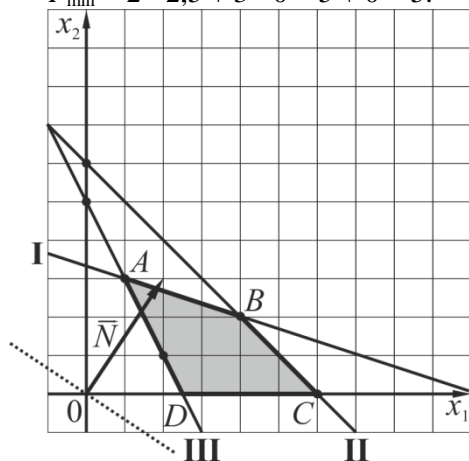
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 = 5; \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2,5; \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, $D(2,5; 0)$.

Знайдемо екстремальні значення цільової функції, підставивши координати відповідних точок у її рівняння.

$$F_{\max} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14;$$

$$F_{\min} = 2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 0 = 5 + 0 = 5.$$



Тест

1. Установіть відповідність між прямими та точками, через які вони проходять.

$2x_1 + 3x_2 = 3$	$(0; 1)$
$2x_1 + 3x_2 = 5$	$(1; 1)$
$2x_1 + 3x_2 = 2$	$(1; 0)$
$2x_1 + 3x_2 = 0$	$(0; 0)$

2. Якщо кінець вектора нормалі міститься в точці $(2; -3)$, то лінії рівня належить точка...

$(2; 3)$	$(3; 2)$	$(3; -2)$	$(0; 0)$	$(-3; 2)$
A	B	B	Г	Д

Практикум: графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Задача 1. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$F = x_1 + 4x_2 \text{ за умов обмеження } \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 8. \end{cases}$$

Розв'язування

Побудуємо прямі, що відповідають рівнянням, зрозумілим із системи обмежень, і відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

I: $-2x_1 + x_2 = 4$. Пряма проходить, наприклад, через точки $(-2; 0)$ і $(0; 4)$. Щоб визначити, яка з двох отриманих півплощин є розв'язком відповідної нерівності, підставляємо у її рівняння координати довільної точки і визначаємо істинність нерівності. Наприклад, підставивши у нерівність $-2x_1 + x_2 \leq 4$ координати точки $(0; 0)$, одержимо $-2 \cdot 0 + 0 \leq 4$; $0 \leq 4$ — істинна нерівність. Тоді розв'язком заданої нерівності будуть усі точки, які містяться праворуч від граничної прямої.

II: $x_1 + x_2 = 10$; $(6; 4)$, $(4; 6)$.

III: $x_1 - 3x_2 = 6$; $(0; -2)$, $(3; -1)$.

IV: $x_1 + 2x_2 = 3$; $(1; 1)$, $(3; 0)$.

Усім умовам належності до відповідних півплощин відповідає шестикутник $ABCDEF$. Будуємо вектор нормалі $\vec{N}(1; 4)$. Перпендикулярно до вектора нормалі проводимо лінію рівня. Якщо переміщати її за напрямом вектора нормалі, то останньою спільною точкою шестикутника розв'язків і лінії рівня буде точка C . Точка C утворена в результаті перетину **I** і **II** обмежень. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 + x_2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 = 6; \\ x_1 + x_2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2; \\ x_1 + x_2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 8. \end{cases}$$

Отже, $C(2; 8)$.

Якщо переміщати її проти напрямку вектора нормалі, то останньою спільною точкою багатокутника розв'язків і лінії рівня буде точка F . Точка F утворена в результаті перетину **IV** обмеження і прямої $x_2 = 0$. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

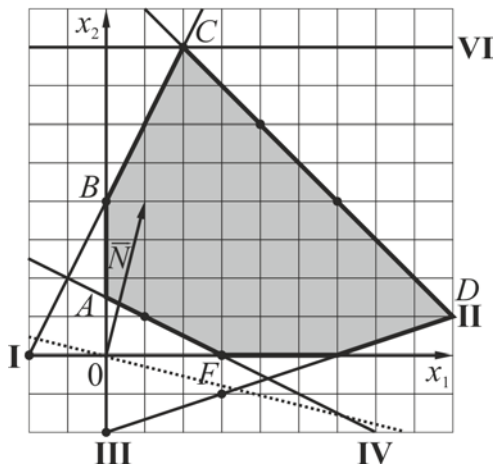
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3; \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, $F(3; 0)$.

Знайдемо екстремальні значення цільової функції, підставивши координати відповідних точок у її рівняння.

$$F_{\max} = 2 + 4 \cdot 8 = 2 + 32 = 34;$$

$$F_{\min} = 3 + 4 \cdot 0 = 3 + 0 = 3.$$



Задача 2. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$F = 0,2x_1 + 0,4x_2 \text{ за умов обмеження } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Побудуємо прями, що відповідають рівнянням, зрозумілим із системи обмежень, і відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

I: $2x_1 + x_2 = 8$. Пряма проходить, наприклад, через точки $(2; 4)$ і $(3; 2)$. Щоб визначити, яка з двох отриманих півплощин є розв'язком відповідної нерівності, підставляємо у її рівняння координати довільної точки і визначаємо істинність нерівності. Наприклад, підставивши у нерівність $2x_1 + x_2 \geq 8$ координати точки $(0; 0)$, одержимо $2 \cdot 0 + 0 \geq 8$; $0 \geq 8$ — хибна нерівність. Тоді розв'язком заданої нерівності будуть усі точки, які містяться праворуч від граничної прямої.

II: $x_1 + 3x_2 = 9$; $(0; 3)$, $(3; 2)$.

III: $x_1 + x_2 = 7$; $(3; 4)$, $(4; 3)$.

Усім умовам належності до відповідних півплощин відповідає незамкнутий багатокутник, який міститься в першій координатній чверті й обмежений ламаною $ABCDEF$. Оскільки координати вектора нормалі достатньо малі, то домножимо їх на 10 й одержимо вектор нормалі $\vec{N}(2; 4)$, співнапрямлений із заданим. Перпендикулярно до вектора нормалі проводимо лінію рівня. Якщо переміщати її за напрямом вектора нормалі, то ми не знайдемо останньої спільної точки багатокутника розв'язків. Ця точка міститься у нескінченності.

Якщо переміщати лінію рівня проти напрямку вектора нормалі, то останньою спільною точкою багатокутника розв'язків і ліній рівня буде точка D . Точка D утворена в результаті перетину **II** і **III** обмежень. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

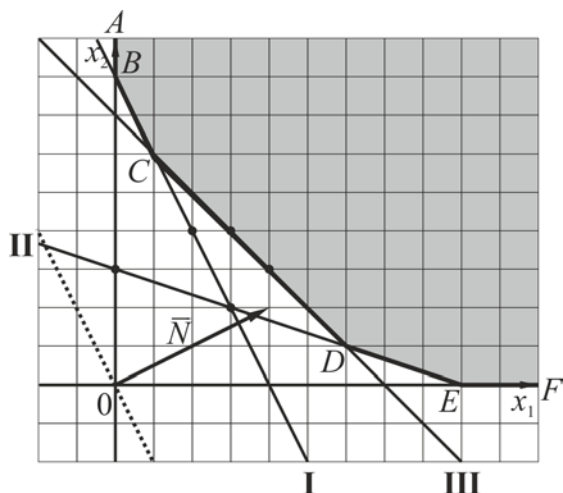
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9; \\ x_1 + x_2 = 7; \end{cases} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9; \\ 2x_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9; \\ x_2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6; \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, $D(6; 1)$.

Знайдемо екстремальні значення цільової функції, підставивши координати відповідних точок у її рівняння.

$$F_{\max} = +\infty;$$

$$F_{\min} = 0,2 \cdot 6 + 0,4 \cdot 1 = 1,2 + 0,4 = 1,6.$$



Задача 3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$F = 3x_1 - x_2 \text{ за умов обмеження } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Побудуємо прямі, що відповідають рівнянням, зрозумілим із системи обмежень, і відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

I: $x_1 + x_2 = 6$. Пряма проходить, наприклад, через точки $(3; 3)$ і $(4; 2)$. Щоб визначити, яка з двох отриманих півплощин є розв'язком відповідної нерівності, підставляємо у її рівняння координати довільної точки і визначаємо істинність нерівності. Наприклад, підставивши у нерівність $x_1 + x_2 \leq 6$ координати точки $(0; 0)$, одержимо $0 + 0 \leq 6$; $0 \leq 6$ — істинна нерівність. Тоді розв'язком заданої нерівності будуть усі точки, які містяться ліворуч від граничної прямої.

II: $3x_1 - x_2 = 9$; $(3; 0)$, $(4; 2)$.

III: $-x_1 + 2x_2 = 8$; $(0; 4)$, $(2; 5)$.

Усім умовам належності до відповідних півплощин відповідає п'ятикутник $ABCDE$. Будуємо вектор нормалі $\vec{N}(3; -1)$. Перпендику-

лярно до вектора нормалі проводимо лінію рівня. Якщо переміщати її за напрямом вектора нормалі, то останньою спільною точкою многокутника розв'язків і лінії рівня буде точка C або точка D . Точка C утворена в результаті перетину **I** і **II** обмежень. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 = 15; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3,75; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3,75; \\ 3 \cdot 3,75 - x_2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3,75; \\ x_2 = 2,25. \end{cases}$$

Отже, $C(3,75; 2,25)$.

Точка D утворена в результаті перетину **II** обмеження і прямої $x_2 = 0$. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 9; \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 = 9; \\ x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, $D(3; 0)$.

Якщо переміщати її проти напрямку вектора нормалі, то останньою спільною точкою многокутника розв'язків і лінії рівня буде точка A . Точка A утворена в результаті перетину **III** обмеження і прямої $x_1 = 0$. Знайдемо її координати із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0; \\ 2x_2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

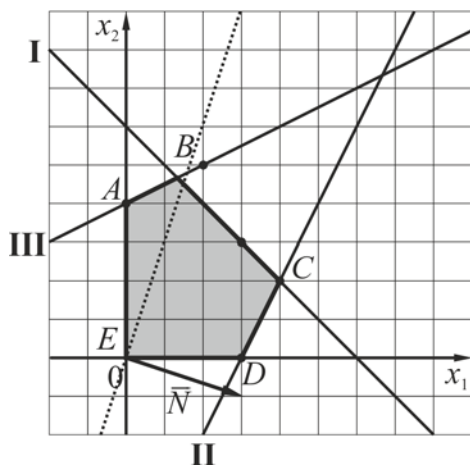
Отже, $A(0; 4)$.

Знайдемо екстремальні значення цільової функції, підставивши координати відповідних точок у її рівняння.

$$F_{\max C} = 3 \cdot 3,75 - 2,25 = 11,25 - 2,25 = 9;$$

$$F_{\max D} = 3 \cdot 3 - 0 = 9 - 0 = 9;$$

$$F_{\min A} = 3 \cdot 0 - 4 = 0 - 4 = -4.$$



Із розв'язання задачі бачимо, що значення цільової функції у точках C і D рівні, тобто максимальне значення досягається у двох вершинах. Більше того, яку б точку відрізка CD ми б не взяли, значення цільової функції у цій точці теж дорівнюватиме 9. Це слідує з того, що лінія рівня паралельна до CD (доведіть самостійно).

Задача 4. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$F = 3x_1 - x_2 \text{ за умов обмеження } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

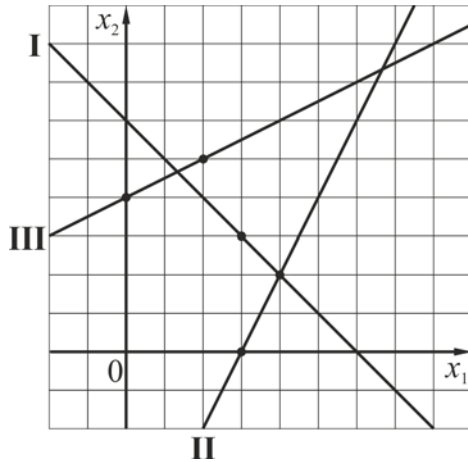
Побудуємо прямі, що відповідають рівнянням, зрозумілим із системи обмежень, і відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

I: $x_1 + x_2 = 6$. Пряма проходить, наприклад, через точки $(3; 3)$ і $(4; 2)$. Щоб визначити, яка з двох отриманих півплощин є розв'язком відповідної нерівності, підставляємо у її рівняння координати довільної точки і визначаємо істинність нерівності. Наприклад, підставивши у нерівність $x_1 + x_2 \leq 6$ координати точки $(0; 0)$, одержимо $0 + 0 \leq 6$; $0 \leq 6$ — істинна нерівність. Тоді розв'язком заданої нерівності будуть усі точки, які містяться ліворуч від граничної прямої.

II: $3x_1 - x_2 = 9$; $(3; 0)$, $(4; 2)$.

III: $-x_1 + 2x_2 = 8$; $(0; 4)$, $(2; 5)$.

З рисунка неважко побачити, що для даної системи обмежень не існує багатокутника розв'язків. Отже, задана задача лінійного програмування не має розв'язку.



Завдання для самостійної роботи

Знайти графічним методом екстремальні значення цільової функції для задач лінійного програмування.

1.
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \quad F = 5x_1 + 2x_2 + 5 \text{ (extr).}$$
2.
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \quad F = -4x_1 - 3x_2 + 15 \text{ (extr).}$$

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Поняття про симплексний метод та канонічну форму

Симплексний метод — один з основних методів розв'язування задач лінійного програмування. Розглянемо його ідею на конкретному прикладі задачі про використання ресурсів з двома видами ресурсів та двома видами продукції.

Означення 1. Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати *опорним*.

Задача 1. Знайти найбільше значення функції $F = 12 + x_1 + 2x_2$ за системи обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Розв'язування

Очевидно, що тут x_3 і x_4 — базисні невідомі, а x_1 і x_2 — вільні. Візьмемо початковий опорний план так: $x_1 = x_2 = 0$ (вільні невідомі дорівнюють нулю), тоді одержимо, що $x_3 = 12$, $x_4 = 16$. Отже, маємо, що $X^{(1)} = (0; 0; 12; 16)$, $F(X^{(1)}) = 12$.

Такий розв'язок відповідає ситуації, коли продукція не виробляється. Будемо збільшувати ту з вільних невідомих, яка має додатний коефіцієнт у цільовій функції (причому більший), тому що значення цільової функції при цьому зростатиме. Це означає, що при випуску продукції прибуток збільшуватиметься. Отже, збільшуватимемо x_2 .

Нехай $x_1 = 0$. Система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Щоб x_2 і x_4 були додатними, то в першому рівнянні змінній x_2 можна надати найбільшого значення $\frac{12}{3} = 4$, а в другому рівнянні —

$\frac{16}{2} = 8$. Очевидно, що x_2 не повинно бути більше 4, бо інакше в друго-

му рівнянні x_3 набуде від'ємних значень, що неможливо з умови невід'ємності значень змінних. Тоді за значення x_2 вибираємо найменшу частку від ділення вільних членів на відповідні коефіцієнти при x_2 .

Отже, $x_2 = 4$, звідки $x_3 = 0$, $x_4 = 8$. Ми одержали другий опорний план і відповідну йому цільову функцію: $X^{(2)} = (0; 4; 0; 8)$, $F(X^{(2)}) = 20$.

Бачимо, що значення цільової функції зростає.

Тепер базисними невідомими є x_2 і x_4 , а x_1 і x_3 — вільні невідомі. Розв'язавши вихідну систему рівнянь відносно нового базису методом Жордана — Гауса, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 4, \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = 8 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Запишемо цільову функцію через нові вільні невідомі:

$$F = 12 + x_1 + 2\left(4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 20 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3.$$

Видно, що при збільшенні вільних невідомих значення цільової функції буде спадати (від'ємні коефіцієнти при невідомих), тому знайдений розв'язок є оптимальним.

Отже, **ідея методу** полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб цільова функція оптимізувалася (зростала чи спадала залежно від умови задачі). Змінні, які переходять з базисних у вільні, повинні зберігати умову невід'ємності і на кожному кроці можна міняти місцями лише одну базисну невідому з однією вільною.

Кожному опорному плану відповідає певним чином записана задача лінійного програмування з обмеженнями-рівностями. Форма її запису має деякі закономірності.

1) Система рівнянь записана так, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи, до того ж з коефіцієнтом, що дорівнює одиниці. Якщо рівняння розмістити так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то матриця базисних невідомих буде одиничною.

2) Вільні члени системи обмежень — невід'ємні.

3) Оптимізуюча форма (цільова функція) залежить лише від вільних невідомих.

Означення 2. Задачу лінійного програмування з обмеженнями-рівностями, яка задовольняє умови 1)–3), називають *канонічною формою*.

Означення 3. Систему обмежень, що задовольняє умови 1)–2), називають *канонічною системою обмежень*.

Якщо система обмежень — канонічна, а форма залежить ще від базисних невідомих, то задачу лінійного програмування називаються *майже канонічною*.

Тест

Яка з умов може не виконуватися для задачі лінійного програмування з обмеженнями-рівностями, записаної в канонічному вигляді?

1. Виділено вихідний базис.
2. Вільні члени системи обмежень — невід’ємні.
3. Оптимізуюча форма залежить лише від вільних невідомих.
4. У систему обмежень входить не більше чотирьох невідомих.

Основні характеристики симплексного методу

При розв’язуванні задач на практиці будемо застосовувати метод ітерації, коли при виборі кожного опорного плану, починаючи з першого, за допомогою деяких правил визначають, чи знайдено оптимальний розв’язок задачі чи потрібно переходити до наступного опорного плану. Такий метод називають *симплексним методом* (чи *симплекс-методом*).

Розглянемо основні властивості методу.

1. **Повнота.** Вказуємо, чи правила роботи є однозначними чи ні, як практично побудувати перший опорний план, чи буде останній побудований план оптимальним розв’язком задачі.

2. **Область застосовності.** Вказуємо, для яких задач можна застосовувати метод і визначити, чи підпадає конкретна задача під алгоритм методу. Якщо розв’язок існує, але останній опорний план його не дає, то треба вказати, якої помилки припущено.

3. **Властивість збіжності.** Вказуємо, чи завжди алгоритм забезпечує збіжність, чи завжди збіжність приводить до правильного результату, скільки ітерацій потрібно виконати для отримання оптимального

розв'язку, чи можна вважати план оптимальним, якщо проведення ітерацій було припинено на деякому кроці.

4. Вимоги до обчислень. З'ясуємо, наскільки складними та громіздкими є обчислення методу та при якій точності обчислень ми одержимо задовільні результати.

Зазначимо, що вперше симплексний метод застосував американський вчений Дж. Данціг в 1949 році, хоча сам алгоритм методу, крім правил вибору ключового елемента, був відомий ще у XIX столітті.

Робота із симплекс-таблицями

Зауважимо, що немає потреби при кожній ітерації вписувати формули переходу. Цей процес можна формалізувати, використовуючи спеціальні симплекс-таблиці. При роботі з ними не будемо розрізняти, де обмеження, а де оптимізуюча (цільова) функція, а перетворення проведемо дещо модифікованим методом Жордана — Гауса.

Критерій оптимальності за симплекс-таблицями. Якщо цільова функція максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то опорний план є **оптимальним**.

Коефіцієнти рядка 0 можна інтерпретувати як приріст функції F при збільшенні вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним, якщо коефіцієнт додатний.

Запишемо **алгоритм роботи з симплекс-таблицями**.

1. Зведемо задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнюємо таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) та коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевіряємо задачу на оптимальність за критерієм.
4. Для вибору **ключового стовпця** знаходимо найбільший елемент у 0-му рядку при дослідження цільової функції на максимум, чи найменший елемент при дослідженні її на максимум.
5. Перевіряємо, чи є у ключовому стовпці додатні елементи. Якщо додатних елементів немає, то задача не має обмеженого оптимального розв'язку (розв'язок дорівнює $\pm\infty$). Якщо такий елемент один, то називатимемо його **ключовим**. Якщо таких елементів кілька, то складемо відношення вільних членів (чисел стовпчика «опорний план») до відповідних додатних чисел ключового стовпчика і вибираємо серед них найменше.

6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця маємо **ключовий елемент**.

7. Замість базисної невідомої ключового рядка вводимо нову базисну невідому — невідому ключового стовпчика.

8. Для заповнення ключового рядка ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для нової таблиці будемо називати **ведучим**. Якщо ключовий елемент дорівнює 1, то ключовий рядок переписуємо у нову таблицю.

9. Усі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гауса:

а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати, у попередній таблиці, і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;

б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;

в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених в б), і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці.

У результаті у ключовому стовпці всі коефіцієнти біля базисних невідомих, крім ключового, мають дорівнювати 0.

10. Перевіряємо новий опорний план на оптимальність. Якщо він не оптимальний, то повертаємось до пункту 4, якщо оптимальний, то виписуємо отриманий розв'язок.

Розглянемо правила роботи із симплекс-таблицями на прикладі.

Задача 2. Задачу лінійного програмування задано у вигляді таблиці:

Види сировини	Види продукції		Запаси сировини
	P_1	P_2	
S_1	2	1	224
S_2	3	2	428
S_3	4	1	336
Прибуток	24	9	

Знайти оптимальний план виробництва.

Розв'язування

Позначимо через x_1 план випуску продукції першого виду P_1 , а через x_2 — продукції другого виду P_2 . Складемо математичну модель отриманої задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 224, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 428, \\ 4x_1 + x_2 \leq 336, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases}$$

$$F = 24x_1 + 9x_2 \text{ (max)}.$$

Зведемо її до першої стандартної форми, ввівши додаткові невідомі $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 224, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 428, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 336, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}; \end{cases}$$

$$F - 24x_1 - 9x_2 = 0 \text{ (max)}.$$

Складемо симплекс-таблицю та проведемо всі необхідні перетворення за алгоритмом, описаним вище.

Зауваження. Базисні стовпчики заповнюються формально і поки що для аналізу задачі не використовуються. Тому можна заповнювати таблиці і без стовпчиків базисних невідомих.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	F	0	$-24 \downarrow$	-9	0	0	0
	1	x_3	224	2	1	1	0	0
	2	x_4	428	3	2	0	1	0
	3	$x_5 \rightarrow$	336	4	1	0	0	1
II	0	F	2016	0	$-3 \downarrow$	0	0	6
	1	$x_3 \rightarrow$	56	0	0,5	1	0	-0,5
	2	x_4	176	0	1,25	0	1	-0,75
	3	x_1	84	1	0,25	0	0	0,25
III	0	F	2352	0	0	6	0	3
	1	x_2	112	0	1	2	0	-1
	2	x_4	36	0	0	-2,5	1	0,5
	3	x_1	56	1	0	-0,5	0	0,5

З останньої таблиці виписуємо оптимальний план:

$$X_{\max} = (56; 112; 0; 36; 0), F_{\max} = 2352.$$

З економічної точки зору це означає, що оптимального плану ми досягнемо при випуску 56 одиниць першої продукції і 112 одиниць другої продукції.

Тест

Задано цільову функцію деякої задачі лінійного програмування: $F = 4x_1 + 12x_2$. Який вигляд матиме ця цільова функція після зведення до першої стандартної форми?

$$F - 4x_1 + 12x_2 = 0$$

А

$$F + 4x_1 - 12x_2 = 0$$

Б

$$F = 4x_1 + 12x_2$$

В

$$F - 4x_1 - 12x_2 = 0$$

Г

$$F + 4x_1 + 12x_2 = 0$$

Д

Поняття про метод штучного базису

Вибір початкової канонічної форми дає змогу формалізувати відшукування оптимального розв'язку за симплекс-таблицями. Канонічна форма задачі легкобудується, коли система обмежень виглядає так, як це було в задачі про використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

При такому типі обмежень введені додаткові невідомі надавали системі обмежень (а з нею і задача лінійного програмування з обмеженнями-рівностями) канонічної форми. З іншого боку, така структура обмежень не охоплює всіх можливих випадків, що трапляються в лінійних оптимізаційних моделях. Крім того, є такі задачі, які взагалі не мають жодного допустимого плану.

Нехай задано задачу лінійного програмування з обмеженнями-рівностями

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$F = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (max)$$

записана так, що всі вільні члени $b_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$. Цього завжди можна досягти, помноживши, якщо це потрібно, рівняння з від'ємним вільним членом на -1 .

Щоб одержати одиничну матрицю при базисних невідомих, формально до лівої частини кожного рівняння додаємо по одній невідомій $u_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$, які будемо називати **штучними**. У результаті система обмежень набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + u_1 = b_1, \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + u_m = b_m, \\ x_1, \dots, x_n \geq 0, u_1, \dots, u_m \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

До неї додаємо штучну формулу f :

$$f = u_1 + u_2 + \dots + u_m \text{ (min)}. \quad (2)$$

Задача (1), (2) є задачею лінійного програмування, яка записана у майже канонічній формі відносно базисних невідомих u_1, u_2, \dots, u_m . Залишається у формі (2) із системи обмежень (1) записати $u_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$, через вільні невідомі x_1, x_2, \dots, x_n .

Означення 1. Систему обмежень будемо називати **сумісною** в області невід'ємних значень, якщо вона має хоча б один допустимий розв'язок.

Справедливим є такий критерій сумісності системи обмежень в області невід'ємних значень.

Теорема 1. Для того щоб система обмежень була сумісною в області невід'ємних значень, необхідно і достатньо, щоб на розв'язках (1) $f_{\min} = 0$.

З теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. Якщо оптимальний план задачі (1)–(2) містить хоча б одну штучну невідому u_i , то вихідна задача не має розв'язку, оскільки вона не є сумісною в області невід'ємних значень.

Теорема 1 дає практично крім факту існування допустимого плану і метод його відшукування. Зазвичай, знайдений допустимий план є завжди опорним.

Слід зауважити, що при розв'язуванні задач лінійного програмування не завжди доцільно додавати штучні невідомі до всіх рівнянь системи обмежень, а лише до тих, які не містять базисних невідомих.

На прикладі розглянемо методику пошуку опорного плану за методом штучного базису.

Задача 3. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$F = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \text{ (max)}.$$

Розв'язування.

Вводимо штучні невідомі $u_1 \geq 0$ у перше рівняння системи і $u_2 \geq 0$ — у друге:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + u_1 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + u_2 = 16, \\ x_1, \dots, x_4, u_1, u_2 \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

перетворюємо цільову функцію

$$F - 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \text{ (max)}$$

і формуємо штучну форму f :

$$\begin{aligned} f &= u_1 + u_2 = 18 - 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 16 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = \\ &= 34 - 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 34 - (7x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4). \end{aligned}$$

Заповнюємо початкову таблицю.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7	-1	3	4
	1	u_1	18	4	-2	1	3
	2	u_2	16	3	1	2	1
	3	F	0	-2	1	-3	1

Зробимо кілька зауважень.

Зауваження 1. Щоб знайти опорний план, потрібно перевести штучні невідомі з базисних у вільні. З цією метою у методі штучного базису використовуємо редуковані таблиці, оскільки після переходу у вільні штучні невідомі нас вже не цікавитимуть.

Зауваження 2. Нульовий рядок (рядок оцінок) заповнюємо за штучною формою. Його можна дістати формальним додаванням чисел відповідних стовпчиків системи обмежень.

Зауваження 3. Для того, щоб у кінцевому підсумку основна оптимізуюча форма також була виражена через вільні невідомі, ми їй

відводимо останній рядок у таблиці і виконуємо з ним ті самі перетворення, що і з іншими рядками.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7 ↓	-1	2	4
	1	$u_1 \rightarrow$	18	4	-2	1	3
	2	u_2	16	3	1	2	1
	3	F	0	-2	1	-3	1
II	0	f	2,5	0	2,5 ↓	1,25	-1,25
	1	x_1	4,5	1	-0,5	0,25	0,75
	2	$u_2 \rightarrow$	2,5	0	2,5	1,25	-1,25
	3	F	9	0	0	-2,5	2,5
III	0	f	0	0	0	0	0
	1	x_1	5	1	0	0,5	0,5
	2	x_2	1	0	1	0,5	-0,5
	3	F	9	0	0	-2,5	2,5

У нульовому рядку другої ітерації вже немає додатних чисел, тому план $X^* = (5; 1; 0; 0; 0; 0)$ є оптимальним для задачі (3), а план $X = (5; 1; 0; 0)$ — опорним для вихідної задачі. Тепер розв'язуємо вихідну задачу. Випишуємо ще раз таблицю другої ітерації, де в нульовому рядку будуть елементи цільової функції F (3-й рядок таблиці). Результати операції подано у новій таблиці.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	F	9	0	0	-2,5 ↓	2,5
	1	x_1	5	1	0	1/2	0,5
	2	$x_2 \rightarrow$	1	0	1	0,5	-0,5
II	0	F	14	0	5	0	0
	1	x_1	4	1	-1	0	1
	2	x_3	2	0	2	1	-1

План $X^* = (4; 0; 2; 0)$ є оптимальним для вихідної задачі, $F_{\max} = 14$.

Зауваження 4. Методом штучного базису можна окремо (без оптимізуючої форми) досліджувати систему обмежень на сумісність в області невід'ємних значень. Це доцільно робити в тих випадках, коли

Умови означення виконуються автоматично. Наприклад, очевидно, що матриця системи обмежень першої задачі є транспонованою до матриці системи обмежень другої задачі.

Першу з цих задач лінійного програмування називають вихідною задачею, другу — двоїстою до вихідної. Зауважимо, що двоїстою задачею до двоїстої буде знов вихідна задача.

Економічну суть двоїстих задач можна пояснити на прикладі задачі про ресурси. Вихідною є задача: організувати випуск продукції так, щоб, використовуючи наявні ресурси, отримати найбільший (максимальний) прибуток. Двоїста до неї: якою має бути ціна кожного ресурсу, щоб при заданих запасах і прибутках від одиниці продукції загальні витрати були найменшими (мінімальними).

Загальні правила складання двоїстих задач

Зрозуміло, що для кожної задачі лінійного програмування можна побудувати двоїсту, бо задача лінійного програмування завжди зводиться до другої стандартної форми (з обмеженнями-нерівностями).

Сформулюємо **правила побудови двоїстої задачі**.

Перевірка умов:

1) у всіх обмеженнях вільні члени містяться праворуч, елементи з невідомими — ліворуч;

2) усі обмеження нерівності вихідної задачі записані так, що знаки спрямовані в один бік (якщо це не так, то потрібно домножити обмеження на -1);

3) загальний знак нерівностей пов'язаний з оптимізацією форми таким чином:

$$\langle \leq \rangle \Rightarrow \text{max}; \quad \langle \geq \rangle \Rightarrow \text{min}.$$

Побудова двоїстої задачі.

1. Кожному обмеженню вихідної задачі відповідає невідома u_i двоїстої задачі, причому двоїста невідома, що відповідає обмеженню нерівності, має бути невід'ємною, а рівності — довільного знаку.

2. Кожній невідомій x_j двоїстої задачі відповідає обмеження двоїстої. Будуються ці обмеження так: перемножуються коефіцієнти a_{ij} , що стоять при x_j , на відповідні двоїсті невідомі u_i . Результати множення підсумовуються і розміщуються в лівій частині обмеження, а в правій — коефіцієнт c_j при x_j в оптимізуючій формі.

3. У всіх обмеженнях двоїстої задачі ставимо один і той самий знак нерівності, протилежний до загального знака нерівності системи обмежень вихідної задачі.

4. Цільову функцію (форму) двоїстої задачі оптимізуємо протилежно до форми вихідної задачі.

5. Коефіцієнти при двоїстих невідомих у цільовій функції є вільними членами системи обмежень вихідної задачі. Вільний член c_0 цільової функції вихідної задачі переноситься у форму двоїстої задачі без змін.

Задача 4. Побудувати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1, 3}; \end{cases}$$

$$F = -10y_1 + 4y_2 + 5y_3 \quad (max).$$

Розв'язування

Замінімо знак в першій нерівності для зведення до стандартного вигляду, для цього домножимо перше обмеження його на (-1) :

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Обмеженням ставимо у відповідність двоїсті невідомі x_1 і x_2 та будемо двоїсту задачу:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 \geq -10, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$F^* = 2x_1 + 3x_2 \quad (min).$$

Зауваження. Якщо система обмежень має обмеження-рівності, то двоїста задача до побудованої двоїстої вже не буде такою як вихідна.

Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач

Зв'язок вихідної і двоїстої задач обумовлений тим, що розв'язок однієї з них можна одержати безпосередньо з розв'язку іншої. Для цього використовуємо такі важливі твердження.

Теорема 1. Якщо у двоїстих задачах одна з них має розв'язок, то буде існувати розв'язок і для іншої задачі, а оптимальні значення при цьому збігаються: $F_{\max} = F_{\min}^*$.

Теорема 2. Для того, щоб x^* і y^* були оптимальними розв'язками задач M і m відповідно, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0; \quad y_i^* \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0.$$

Дані умови називають умовами нежорсткості.

З теореми 2 випливає, що коли обмеження задачі на оптимально-му розв'язку не перетворюються на точну рівність, то відповідна невідома оптимального розв'язку обов'язково дорівнює нулю.

Ці теореми дають змогу за розв'язком однієї задачі зразу знайти розв'язок іншої, двоїстої до неї.

Розглянемо приклад з попереднього питання. У першому обмеженні шляхом множення на -1 поміняємо знак на протилежний. Розв'язавши, наприклад, задачу лінійного програмування графічним методом, одержимо, що $F_{\min} = 8$ у точці $(4; 0)$. Отже, $F_{\max}^* = 8$ для вихідної задачі. При підстановці координат в рівності системи обмежень бачимо, що тільки друге обмеження перетворюється в нуль, тому $y_1 = y_3 = 0$. Значення y_2 знаходимо з рівності $8 = 4y_2$; $y_2 = 2$. Отже, розв'язок вихідної задачі $(0; 2; 0)$.

Задачі з мішаними обмеженнями

Ми показали, що коли обмеження містять лише рівняння, за якими безпосередньо важко знайти опорний план, то його можна знайти методом штучного базису. А якщо маємо нерівності різних знаків (із додатною правою частиною) чи базис з від'ємним планом, то за двоїстим симплекс-методом.

На практиці нерідко трапляються випадки, коли система обмежень містить як рівняння, так і нерівності. Тоді можна комбінувати обидва методи. Розглянемо задачі, у яких є нерівності з додатною пра-

вою частиною і рівняння. Тоді штучні невідомі вводять лише для рівнянь і за ними будують штучну форму.

Задача 5. Звести до канонічної форми систему обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Розв'язування

Перші дві нерівності зведемо до рівнянь, а для рівняння введемо штучну невідому u_1 . Тоді маємо:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + u_1 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}, u_1 \geq 0. \end{cases}$$

$$f = u_1 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3;$$

$$4 = f + 2x_1 - x_2 + 2x_3.$$

Розв'яжемо задачу за допомогою симплекс-методу. Наведемо симплекс- таблицю перетворень.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	f	4	$2 \downarrow$	-1	2	0	0
	1	x_4	6	-1	4	-2	1	0
	2	x_5	6	1	1	2	0	1
	3	$u_1 \rightarrow$	4	2	-1	2	0	0
II	0	f	0	0	0	0	0	0
	1	x_4	8	0	3,5	-1	1	0
	2	x_5	4	0	1,5	1	0	1
	3	x_1	2	1	-0,5	1	0	0

Друга ітерація дає нам таку канонічну форму системи обмежень:

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_5 = 8, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

Зауваження 1. Застосовуючи метод штучного базису до задач із мішаними обмеженнями, бажано так вибирати ключовий стовпчик, щоб штучні невідомі переходили із базисних у вільні.

Зауваження 2. У випадку обмежень-нерівностей зі знаком « \geq » нескладними перетвореннями можна одержати додатний базис. Для цього в задачі із мішаними обмеженнями візьмемо рівняння з додатним вільним членом ($b_i > 0$). Нерівності зі знаком « \geq » поділимо на такі числа, щоб після ділення вільні члени були менші за b_i . Після цього перейдемо до обмежень-рівнянь і віднімемо їх послідовно від вибраного рівняння. Усі додаткові невідомі у здобутих рівняннях матимуть коефіцієнт +1 і додатні плани.

Задача 6. Система обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad :2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 2, \end{cases}$$

у результаті перетворень набуває вигляду:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Тепер для вибору кінцевого базису досить лише ввести штучну невідому для третього рівняння.

Стійкість симплексного методу. Виродженість та зациклювання

На практиці часто виникає потреба не лише знайти оптимальний план, але й системно проаналізувати та чітко встановити взаємозв'язки між усіма факторами математичної моделі задачі. У багатьох випадках слід з'ясувати, у яких інтервалах можна змінювати вхідні параметри задачі без суттєвого відхилення оптимального плану, без значного порушення структури базису, який формує цей план.

Спочатку розглянемо, як змінюватиметься оптимальний план при зміні коефіцієнтів оптимізуючої форми вихідної задачі. Нехай канонічна форма вихідної задачі має вигляд:

$$\begin{aligned}
 & F = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \quad (max), \\
 & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120, \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 7}. \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Виконавши симплекс-перетворення, ми дістанемо таку канонічну форму:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 = \frac{50}{7}, \\ -\frac{6}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_4 - \frac{61}{7}x_5 + x_6 + \frac{4}{7}x_7 = \frac{325}{7}, \\ \frac{2}{7}x_2 + x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 7}, \end{cases} \quad (2) \\
 & F = \frac{695}{7} - \frac{3}{7}x_2 - \frac{11}{7}x_4 - \frac{13}{7}x_5 - \frac{5}{7}x_7,
 \end{aligned}$$

опорний план якої є оптимальним.

Якщо збільшити коефіцієнт при x_4 у цільовій функції в початковій симплекс-таблиці, припустимо на 6, то в останній симплекс-таблиці x_4 буде число $\frac{11}{7} - 6$, і розв'язок не буде оптимальним. Отже, збільшення коефіцієнта при x_4 на 6 змінює базис оптимального розв'язку.

Більш складні залежності при тих невідомих цільової функції, які перейшли в базисні. Зміна коефіцієнта невідомої x_1 на число η призводить до того, що в оптимальній таблиці буде

$$x_0 - \eta x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 = \frac{695}{7}.$$

За допомогою першого рівняння x_1 можна виключити. Для цього помножимо його на η і додамо до попереднього. Маємо:

$$x_0 + \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{7}\eta\right)x_2 + \left(\frac{11}{7} - \frac{5}{7}\eta\right)x_4 + \left(\frac{13}{7} + \frac{10}{7}\eta\right)x_5 + \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\eta\right)x_7 = \frac{695}{7} + \frac{50}{7}\eta.$$

Для того щоб план залишався оптимальним, достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$\begin{cases} -\frac{3}{7} + \frac{5}{7}\eta \geq 0, \\ \frac{11}{7} - \frac{5}{7}\eta \geq 0, \\ \frac{13}{7} + \frac{10}{7}\eta \geq 0, \\ \frac{5}{7} - \frac{1}{7}\eta \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

З останніх нерівностей маємо: $-\frac{3}{5} \leq \eta \leq \frac{11}{5}$. Крім того, легко помітити, що коли $0 \leq \eta \leq \frac{11}{5}$, то значення форми зростає.

Очевидно, що при такому аналізі основну роль відіграє оптимальний план двоїстої задачі. Дійсно, двоїсту до вихідної оптимальної канонічної форми можна записати таким чином:

$$\begin{cases} -\frac{5}{7}y_1 + \frac{6}{7}y_2 - \frac{2}{7}y_3 \leq \frac{3}{7}, \\ \frac{5}{7}y_1 - \frac{13}{7}y_2 - \frac{12}{7}y_3 \leq \frac{11}{7}, \\ -\frac{10}{7}y_1 + \frac{61}{7}y_2 + \frac{3}{7}y_3 \leq \frac{13}{7}, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

$$F^* = \frac{695}{7} + \frac{50}{7}y_1 + \frac{325}{7}y_2 + \frac{55}{7}y_3 \text{ (min)}.$$

З попередніх міркувань випливає, що зміна x_1 у початковій формі на $x_1 + \eta$ змінює y_1 на $y_1 + \eta$ в оптимальній канонічній формі двоїстої задачі. Тому ми знову приходимо до нерівностей (3), з яких $-\frac{3}{5} \leq \eta \leq \frac{11}{5}$.

$\frac{11}{7} - 6 = -\frac{31}{7}$, тому при такій зміні коефіцієнта функції остання таблиця вже не є оптимально. Звідси випливає, що до числа 11, яке стоїть при x_4 у функції F , можна додати будь-яке, що не змінює нерівності $-\frac{11}{7} + k \leq 0$. У цьому випадку зміна вихідного параметра 11 не змінює базису оптимального плану. З останньої нерівності випливає, що k можна зменшувати на будь-яке число (до $-\infty$), а збільшувати його можна лише до $k_1 = \frac{11}{7}$.

Аналогічно можна досліджувати на стійкість опорний оптимальний розв'язок при зміні значень декількох (чи навіть всіх) коефіцієнтів цільової функції. Але в цьому випадку визначити границі зміни коефіцієнтів, які не змінюють базису важче. Крім того, ці границі окремих коефіцієнтів залежні між собою. У загальному випадку це робиться за допомогою методів параметричного програмування, які реалізуються у програмах на ПК.

Аналогічний аналіз на стійкість базису оптимального розв'язку можна зробити для коефіцієнтів b_i правих частин системи обмежень і нормативних коефіцієнтів a_{ij} . Щодо останніх, то залежності досить

складні, оскільки потрібно розглядати вплив зміни a_{ij} в i -му рядку та j -му стовпчику.

При обґрунтуванні будь-якого чисельного наближеного методу найбільш складною задачею є доведення його *збіжності*. У тих задачах, які ми розглядали, значення функції на кожній ітерації зростало (при максимізації форми. З іншого боку, число ітерацій скінчене (їх не більше $\frac{n!}{m!(n-m)!}$). Тому, якщо розв'язок задачі існує, то його завжди

можна знайти.

На практиці може трапитись випадок, коли при виборі ключового елемента є кілька однакових найменших відношень. Тоді на наступній ітерації деякі базисні невідомі опорного плану будуть дорівнювати нулю. Це призводить до того, що наступні ітерації можуть не змінювати оптимізуючої форми.

Означення 1. Опорний план, у якому хоча б одна базисна координата дорівнює нулю, будемо називати *виродженим*.

Означення 2. Задачу лінійного програмування з обмеженнями-рівностями, яка має принаймні один вироджений опорний план, називають *виродженою*.

Якщо задача вироджена, то ділянок сталості функції може бути кілька. У цих випадках може не змінюватись ні значення форми, ні значення плану деяких базисних невідомих. Але і тоді можна дібрати такий ключовий елемент, що через деякий час значення форми знову почне зростати.

Виродженість базису практично не впливає на число ітерацій, потрібних для обчислення оптимального плану. Досвід показує, що число ітерацій, потрібних для відшукання кінцевого результату, міститься в межах: $1,5t < k < 3t$, де t — число обмежень задачі.

Виродженість задачі має можливість неоднозначності вибору ключового елемента, що, в свою чергу, може призвести до небажаного явища — *зациклення*. Суть його полягає в тому, що на деякій ітерації ми дістаємо симплекс-таблицю, яку вже мали, і процес знову повторюється, хоча план не є оптимальним.

Щоб уникнути цього явища, треба вибрати на відповідній ітерації інший опорний план.

Явище зациклення можна проілюструвати на такому прикладі:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0, \\ x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \end{cases}$$

$$F = \frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 \quad (max),$$

якщо при неозначеності вибору ключового елемента перевагу надавати змінній з меншим індексом.

Зауваження. З явищем виродженості можна зустрітися в методі штучного базису. Тоді ключовий елемент слід вибрати так, щоб штучні невідомі переходили у вільні.

Задача 7. Звести до канонічної форми систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Розв'язування

Вводимо штучні невідомі u_1 і u_2 , штучну форму $f = u_1 + u_2$ і розв'язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиць.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	10	3	5 ↓	0	1
	1	u_1	6	1	3	0	-1
	2	$u_2 \rightarrow$	4	2	2	-1	2
II	0	f	0	-2	2,5	2,5 ↓	-4
	1	$u_1 \rightarrow$	0	-2	0	2,5	-4
	2	x_2	2	1	1	-0,5	1
III	0	f	0	0	0	0	0
	1	x_3	0	-0,8	0	1	-1,6
	2	x_2	2	0,6	1	0	1/5

Система обмежень

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}x_1 + x_3 - \frac{8}{5}x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4} \end{cases}$$

записана у канонічній формі.

Симплекс- метод розв'язування задач лінійного програмування

Задача 1. Розв'язати задачу лінійного програмування із заданою системою обмежень та цільовою функцією:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0; \\ F = 3x_1 + 2x_2 \text{ (max)}. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо цільову функцію як одну з умов канонічного вигляду:

$$F - 3x_1 - 2x_2 = 0 \text{ (max)}.$$

Вихідна задача записана в канонічній формі. Формуємо симплекс-таблицю.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	F	0	$-3 \downarrow$	-2	0	0
	1	x_3	12	2	3	1	0
	2	$x_4 \rightarrow$	4	2	-1	0	1

1. Замість базисної невідомої x_4 вводимо нову базисну невідому x_1 (невідому ключового стовпчика).

2. Формально заповнюємо базисні стовпчики.

3. Для заповнення рядка 2 ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок будемо називатимемо ключовим (провідним).

4. Усі інші рядки заповнюємо за методом Жордана — Гауса, виключаючи x_1 послідовно з рядків 0 і 1. Для цього досить спочатку рядок 2 нової таблиці помножити на 3 і додати до 0-го рядка табл. 2, а потім рядок 2 нової таблиці помножити на (-2) і додати до першого рядка табл. 2.

Заповнення рядків за п. 4 можна формалізувати за допомогою таких правил:

а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати у попередній таблиці і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;

б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;

в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених у п. б), і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці 2.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
II	0	F	6	0	$-3,5 \downarrow$	0	1,5
	1	$x_3 \rightarrow$	8	0	4	1	-1
	2	x_1	2	1	-0,5	0	0,5

Перевіряємо її опорний план на оптимальність. Помічаємо, що нам треба перейти до наступного опорного плану, оскільки у нульовому рядку стовпчика x_2 є від'ємне число $(-3,5)$. У цьому стовпчику є лише один додатний елемент, який вибираємо в якості ключового.

Замість базисної змінної x_3 тепер буде нова базисна x_2 , ключовим буде рядок 1. Виконуємо аналогічні перетворення.

1. Ділимо числа першого рядка таблиці 2 на 4.

2. Множимо рядок таблиці 2 на 3,5 і додаємо до нульового рядка таблиці 3.

3. Перший рядок, помножений на 0,6, додаємо до другого рядка таблиці 3.

Одержуємо таблицю 3.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
III	0	F	13	0	0	0,875	1,25
	1	x_2	2	0	1	0,25	-0,25
	2	x_1	3	1	0	0,125	0,375

У нульовому рядку вже немає від'ємних чисел, тому опорний план оптимальний. Випишемо його зі стовпчика «опорний розв'язок»:

$$X = (3; 2; 0; 0), F_{\max} = 13.$$

Задача 2. Розв'язати задачу лінійного програмування із заданою системою обмежень та цільовою функцією:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases}$$

$$F = 3x_1 - 5x_2 \text{ (min)}.$$

Розв'язання

Перетворимо задану задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}; \end{cases}$$

$$F - 3x_1 + 5x_2 = 0 \text{ (min)}.$$

Виділити початковий базис відразу неможливо, тому скористаємося методом штучного базису. Додамо до другого обмеження $u_1 \geq 0$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 + u_1 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}; \end{cases}$$

$$F - 3x_1 + 5x_2 = 0 \text{ (min)}.$$

Отже, вихідний базис утворюють змінні x_3 , u_1 і x_5 . Тоді

$$f = u_1 = 2 - (3x_1 + x_2 - x_4); 2 = f + 3x_1 + x_2 - x_4.$$

Заповнюємо симплекс-таблицю.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	f	2	3 ↓	1	0	-1	0
	1	x_3	4	1	-1	1	0	0
	2	$u_1 \rightarrow$	2	3	1	0	-1	0
	3	x_5	3	-1	3	0	0	1
	4	F	0	-3	5	0	0	0
II	0	f	0	0	0	0	0	0
	1	x_3	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
	2	x_1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
	3	$x_5 \rightarrow$	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
	4	F	2	0	6 ↑	0	-1	0
III	0	x_1	$\frac{9}{30}$	1	0	0	$-\frac{9}{30}$	$-\frac{1}{10}$
	1	x_2	$\frac{11}{10}$	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
	2	x_3	$\frac{144}{30}$	0	0	1	$\frac{6}{30}$	$\frac{12}{30}$
	3	F	$-\frac{46}{10}$	0	0	0	$-\frac{4}{10}$	$-\frac{18}{10}$

Отже,

$$X^* = \left(\frac{9}{30}; \frac{11}{10}; \frac{144}{30}; 0; 0 \right), F = 3 \cdot \frac{9}{30} - 5 \cdot \frac{11}{10} = \frac{9}{10} - \frac{55}{10} = -\frac{46}{10} = -4,6.$$

Задача 3. Розв'язати задачу лінійного програмування із заданою системою обмежень та цільовою функцією:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 3x_2 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 2x_2 \text{ (max).}$$

Розв'язання

Перетворимо задану задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$F - 2x_1 - 2x_2 = 0 \text{ (max)}.$$

Виділити початковий базис відразу неможливо, тому скористаємося методом штучного базису. Додамо до першого обмеження $u_1 \geq 0$, а до другого — $u_2 \geq 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + u_1 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + u_2 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$F - 2x_1 - 2x_2 = 0 \text{ (max)}.$$

Отже, вихідний базис утворюють змінні u_1 і u_2 . Тоді

$$f = u_1 + u_2 = 2 - x_1 - x_2 - x_3 + 3 - x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 - 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 - (2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4); 5 = f + 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4.$$

Заповнюємо симплекс-таблицю.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	5	2 ↓	-2	1	-1
	1	$u_1 \rightarrow$	2	1	1	1	0
	2	u_2	3	1	-3	0	-1
	4	F	0	-2	-2	0	0
II	0	f	1	0	-4	-1	-1
	1	x_1	2	1	1	1	0
	2	u_2	1	0	-4	-1	-1
	4	F	4	0	0	2	0

Бачимо, що у рядку коефіцієнтів форми f немає додатних, хоча вона не мінімізована ($f_{\min} = 1$). Тому система обмежень вихідної задачі не має жодного допустимого плану. Це слідує з того, що у базис входить невідома $u_2 \geq 0$, яку вивести з базису неможливо.

Задача 4. Розв'язати задачу лінійного програмування із заданою системою обмежень та цільовою функцією:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases} \quad F = 8x_1 + 4x_2 + 3 \text{ (max)}.$$

Побудувати до неї двоїсту задачу і знайти розв'язок двоїстої, не роззуючи її. Перевірити оптимальність за допомогою умов нежорсткості.

Розв'язання

Перетворимо задану задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases}$$

$$F - 8x_1 - 4x_2 = 3 \text{ (max)}.$$

Заповнюємо симплекс-таблицю.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	F	3	$-8 \downarrow$	-4	0	0	0
	1	$x_3 \rightarrow$	2	1	-1	1	0	0
	2	x_4	3	-3	1	0	1	0
	4	x_5	7	1	1	0	0	1
II	0	F	19	0	$-12 \downarrow$	8	0	0
	1	x_1	2	1	-1	1	0	0
	2	x_4	9	0	-2	3	1	0
	4	$x_5 \rightarrow$	5	0	2	-1	0	1
III	0	F	49	0	0	2	0	6
	1	x_1	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	2	x_4	14	0	0	2	1	1
	4	x_2	$\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Отже, $X = \left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}; 0; 14; 0\right)$; $F_{\max} = 49$.

Побудуємо двоїсту задачу:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \end{cases} \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix}$$

$$F = 8x_1 + 4x_2 + 3 \text{ (max)};$$

й одержимо:

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 8, \\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq 4, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F^* = 2y_1 + 3y_2 + 7y_3 + 3 \text{ (min)}.$$

Розглянемо умови нежорсткості:

$$\begin{cases} y_1(x_1 - x_2 - 2) = 0, \\ y_2(-3x_1 + x_2 - 3) = 0, \\ y_3(x_1 + x_2 - 7) = 0; \end{cases} \begin{cases} y_1\left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2} - 2\right) = 0, \\ y_2\left(-3 \cdot \frac{9}{2} + \frac{5}{2} - 3\right) = 0, \\ y_3\left(\frac{9}{2} + \frac{5}{2} - 7\right) = 0; \end{cases} \begin{cases} y_1 \cdot 0 = 0, \\ y_2 \cdot (-14) = 0, \\ y_3 \cdot 0 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \neq 0, \\ y_2 = 0, \\ y_3 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(y_1 - 3y_2 + y_3 - 8) = 0, \\ x_2(-y_1 + y_2 + y_3 - 4) = 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{9}{2} \neq 0, \\ x_2 = \frac{5}{2} \neq 0, \end{cases} \text{ тому } \begin{cases} y_1 - 3y_2 + y_3 = 8, \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 4. \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$\begin{cases} y_2 = 0, \\ y_1 - 3y_2 + y_3 = 8, \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 4; \end{cases} \begin{cases} y_1 + y_3 = 8, \\ -y_1 + y_3 = 4; \end{cases} \begin{cases} y_1 = 2, \\ y_3 = 6. \end{cases}$$

$y_1 = 2; y_2 = 0; y_3 = 6$, тому
 $F^* = 2y_1 + 3y_2 + 7y_3 + 3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 6 + 3 = 49$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти симплекс-методом екстремальні значення цільової функції для задач лінійного програмування (за потреби використати метод штучного базису). До кожної задачі побудувати двоїсту до неї і знайти розв'язок двоїстої, не розв'язуючи її.

$$1. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 14, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 48, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases} F = -6x_1 - 4x_2 + 28.$$

$$2. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 50, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 28, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases} F = 6x_1 + 4x_2 + 20.$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}; \end{cases} F = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4.$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases} F = -4x_1 + 5x_2 - 22.$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}; \end{cases} F = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4.$$

РОЗДІЛ 6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Постановка транспортної задачі

Деякі задачі лінійного програмування, до яких зводяться практичні моделі управління та планування, мають особливу структуру своїх систем обмежень і можуть розв'язуватись без складання загальної симплекс-таблиці. Специфіка їх полягає в тому, що в кожному рядку таблиці лише невелика кількість елементів буде відмінною від нуля чи інших фіксованих сталих.

Особлива форма системи обмежень підказує шляхи створення спеціальних методів розв'язування, для яких немає аналогів серед задач лінійного програмування. При цьому велику роль відіграє і фізичний (реальний) зміст таких задач. Щодо програмування таких задач, то відзначимо, що вони вимагають меншого об'єму оперативної пам'яті (меншою є необхідна кількість комірок) та виконуються з економією машинного часу.

Серед спеціальних задач на практиці найчастіше застосовують так звану *транспортну задачу* та її різноманітні модифікації. Класична транспортна задача вимагає пошуку найбільш економічного плану перевезень однорідного продукту (чи взаємозамінних продуктів) з пунктів виробництва чи зберігання (фабрики, станції, складу тощо) до пунктів споживання (магазини, кіоски призначення тощо). Ефективність його оцінюється за критерієм найменшої вартості перевезення. З економічної точки зору це може бути, наприклад, найменша кількість витраченого бензину.

Нехай у m пунктах відправлення A_1, A_2, \dots, A_m зосереджено a_1, \dots, a_m одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення B_1, \dots, B_n з потребами відповідно b_1, \dots, b_n одиниць. Вартість перевезень з пункту A_i у пункт B_j вважається сталою і відомою, її позначають через c_{ij} . Зрозуміло, що всі вартості перевезень зручно організувати в двовимірний масив.

Означення 1. Транспортну задачу, для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення $\left(\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \right)$, називають *транспортною задачею з правильним балансом* (або *закритою транспортною задачею*).

Означення 2. Транспортну задачу, для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення не дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення $\left(\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \right)$, називають *транспортною задачею з неправильним балансом* (або *відкритою транспортною задачею*).

Усі дані транспортної задачі заносять в спеціальну таблицю. Оптимальний план перевезень наперед невідомий, тому позначимо кількість вантажу, яку потрібно перевезти з пункту A_i в пункт B_j , величиною x_{ij} . У правому верхньому кутку комірок запишемо вартість перевезень одиниці вантажу c_{ij} .

Пункти відправлення	Пункти споживання						Запаси		
	B_1	...	B_j	...	B_n				
A_1	x_{11}	c_{11}	...	x_{1j}	c_{1j}	...	x_{1n}	c_{1n}	a_1
...
A_i	x_{i1}	c_{i1}	...	x_{ij}	c_{ij}	...	x_{in}	c_{in}	a_i
...
A_m	x_{m1}	c_{m1}	...	x_{mj}	c_{mj}	...	x_{mn}	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...		b_j	...		b_n		

Складемо математичну модель з таких міркувань. Кількість вантажу, який потрібно перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення, з одного боку дорівнює $\sum_{i=1}^m x_{ij}$, з іншого — b_j . Так як загальна сума запасів рівна загальній сумі потреб, то

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Аналогічно, з кожного пункту відправлення відвантажено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Разом $m + n$ рівнянь систем (1) та (2) складають систему обмежень транспортної задачі.

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну вартість перевезень, потрібно просумувати вартості перевезень усіх клітинок. Таким чином, запишемо цільову функцію транспортної задачі:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (\min). \quad (3)$$

Математичною моделлю транспортної задачі є твердження: *серед усіх невід'ємних розв'язків систем рівнянь (1)–(2) знайти такий, при якому функція (3) набуває найменшого значення.*

Методи побудови першого опорного плану транспортної задачі

Оскільки транспортна задача є задачею лінійного програмування, то її можна розв'язувати і симплекс-методом. Проте, через просту будову системи обмежень, цей метод значно спрощується. Це видно вже при побудові першого опорного плану.

Діагональний метод полягає у послідовному заповненні клітинок матриці перевезень, починаючи з кутової, послідовно вичерпуючи запаси чи потреби. Усі клітинки заповнюються мінімальним числом, що є на перетині рядка запасів та стовпця потреб. При цьому переміщуються або праворуч, або вниз. Цей метод найбільш пристосований для програмування його з використанням персонального комп'ютера. Його ще називають *методом північно-західного кута*.

Метод найменшої вартості полягає в тому, що заповнення починаємо з клітинки, яка має найменшу вартість перевезення. У ній проставляємо мінімальне значення з перетину запасів і потреб. Після цього вибирається клітинка з найменшим значенням серед тих, що залишилися, і так триває до повного заповнення. Якщо запаси чи потреби якогось пункту вже вичерпались, то варто занулити ті клітинки, що ще залишилися незаповненими в рядку (стовпці).

Задача 1. Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень C , запасами A_i та потребами B_j ,

$$\begin{aligned} A_1 &= 60; A_2 = 35; A_3 = 40; \\ B_1 &= 22; B_2 = 45; B_3 = 20; B_4 = 18; B_5 = 30; \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Безпосередньою перевіркою переконаємось, що це транспортна задача з правильним балансом.

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 60 + 35 + 40 = 135;$$

$$\sum_{j=1}^5 B_j = 22 + 45 + 20 + 18 + 30 = 135.$$

Заповнимо таблицю діагональним методом.

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	22 4	38 1	— 3	— 4	— 4	60
A_2	— 2	7 3	20 2	8 2	— 3	35
A_3	— 3	— 5	— 2	10 4	30 4	40
Потреби	22	45	20	18	30	135

Обчислимо значення опорного плану:

$$F = 22 \cdot 4 + 38 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 30 \cdot 4 = 88 + 38 + 21 + 40 + 16 + 40 + 120 = 363.$$

Використовуючи метод найменшої вартості, отримаємо:

Заповнимо таблицю діагональним методом.

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	— 4	45 1	— 3	15 4	— 4	60
A_2	22 2	— 3	13 2	— 2	— 3	35
A_3	— 3	— 5	7 2	3 4	30 4	40
Потреби	22	45	20	18	30	135

Перерахуємо значення опорного плану:

$$F = 45 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 22 \cdot 2 + 13 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 30 \cdot 4 = \\ = 45 + 60 + 44 + 26 + 14 + 12 + 120 = 321.$$

Порівнюючи опорні плани, знайдені різними методами, бачимо, що найкращим є опорний план, знайдений за методом найменшої вартості, він дорівнює 321 умовні одиниці.

Для контролю правильності заповнення матриці перевезень зручно використовувати такі твердження.

Зауваження 1. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі визначається за формулою $r = m + n - 1$, де m — число пунктів відправлення, n — число пунктів споживання.

Зауваження 2. Число базисних (заповнених) клітинок завжди дорівнює рангу матриці транспортної задачі. У протилежному випадку їх потрібно доповнити до відповідної кількості за рахунок вільних з базисним значенням нуль.

Транспортна задача з неправильним балансом

На практиці транспортні задачі, у яких загальна сума запасів співпадає з загальною сумою потреб зустрічаються рідко. Набагато частіше якась з цих сум більша (наприклад, явище дефіциту чи перепоповнення ринку товарів). Такі задачі називають задачами з **неправильним балансом** і розв'язують їх **розподільчим методом**. Тобто спочатку зводять цю задачу до задачі з правильним балансом, додаючи фіктивний пункт призначення чи відправлення залежно від дефіциту потреб чи запасів. *Вартості в фіктивних пунктах вважають рівними нулю, щоб не змінювалась загальна вартість перевезень.*

При побудові першого опорного плану у розрахунках ми фіктивні пункти не враховуємо, бо всі вартості в ньому найменші (нулі), але на загальну вартість перевезень вони не впливають. Проводимо заповнення в основній таблиці, а потім остачі вносимо в фіктивні клітинки.

Задача 2. Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень C , запасами A_i та потребами B_j .

$$A_1 = 45; A_2 = 15; A_3 = 30; \\ B_1 = 18; B_2 = 35; B_3 = 17; B_4 = 14; B_5 = 16;$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що це транспортна задача з неправильним балансом.

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 45 + 15 + 30 = 90;$$

$$\sum_{j=1}^5 B_j = 18 + 35 + 17 + 14 + 16 = 100.$$

$$100 - 90 = 10.$$

Отже, необхідно ввести фіктивний пункт A_4 .

Заповнимо таблицю діагональним методом.

Пункти вiдправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	18 1	13 3	— 4	14 2	— 4	45
A_2	— 4	15 3	— 6	— 5	— 3	15
A_3	— 7	7 4	17 2	— 3	6 4	30
A_4	— 0	— 0	— 0	— 0	10 0	10
Потреби	18	35	17	14	16	100

Перерахуємо значення опорного плану:

$$F = 18 \cdot 1 + 13 \cdot 3 + 14 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 17 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = \\ = 18 + 39 + 28 + 45 + 14 + 34 + 24 = 202.$$

При розрахунку значення опорного плану на рядок (в даному випадку) фіктивних клітинок можна взагалі не звертати уваги.

Критерій оптимальності опорного розв'язку транспортної задачі методом потенціалів

Знайдемо критерій оптимальності транспортної задачі зі співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Ввівши двоїсті змінні $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ та $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, складемо двоїсту задачу до транспортної. Її система обмежень має вигляд:

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Нерівності (1) можна конкретизувати, враховуючи співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач:

1) для базисних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}; \quad (2)$$

2) для вільних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}. \quad (3)$$

Такий метод називають **методом потенціалів**. При його використанні ми спочатку шукаємо такі потенціали α_i і β_j , які задовольняють рівності (2) для всіх заповнених клітинок, а потім перевіряємо, чи виконуються нерівності (3) для всіх незаповнених клітинок.

Задача 3. Використаємо метод потенціалів для дослідження задачі 1.

Розглянемо опорний план, побудований діагональним методом:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси	
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— 4	45 1	— 3	15 4	— 4	60	$\alpha_1 = 0$
A_2	22 2	— 3	13 2	— 2	— 3	35	$\alpha_2 = 0$
A_3	— 3	— 5	7 2	3 4	30 4	40	$\alpha_3 = 0$
<i>Потреби</i>	22	45	20	18	30	135	
	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 4$	$\beta_5 = 4$		

Використовуючи умови (2), отримаємо таку систему рівнянь для знаходження потенціалів:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_2 = 1, \\ \alpha_1 + \beta_4 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 2, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 4, \\ \alpha_3 + \beta_5 = 4. \end{array} \right. \quad (4)$$

Система (4) містить 7 рівнянь із 8 невідомими. Така система має нескінченну кількість розв'язків. Знайдемо один із них. Ранг системи дорівнює $4 + 4 - 1 = 7$, тому одній невідомій, наприклад, α_1 , надаємо деякого фіксованого значення. Для спрощення обчислень нехай $\alpha_1 = 0$. Далі знаходимо всі інші потенціали і записуємо результат у таблицю.

Перевіримо виконання умов (3) для побудованого опорного плану:

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 2 = 2 \leq 4 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 2 = 2 \leq 3 +$$

$$A_1B_5: \alpha_1 + \beta_5 = 0 + 4 = 4 \leq 4 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = 0 + 1 = 1 \leq 3 +$$

$$A_2B_4: \alpha_2 + \beta_4 = 0 + 4 = 4 \leq 2 ! (4 - 2 = 2) *$$

$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = 0 + 4 = 4 \leq 3 ! (4 - 3 = 1)$$

$$A_3B_1: \alpha_3 + \beta_1 = 0 + 2 = 2 \leq 3 +$$

$$A_3B_2: \alpha_3 + \beta_2 = 0 + 1 = 1 \leq 5 +$$

Із перевірки цих умов випливає, що опорний план не оптимальний.

Виберемо клітинку, яку називатиме ключовою і відносно якої будемо оптимізувати цільову функцію. Це можна зробити за такими правилами:

1. Обираємо ті вільні клітинки, в яких не виконуються умови методу потенціалів.

2. Якщо така клітинка одна, то вибираємо її у якості ключової.

3. Якщо таких клітинок кілька, то вибираємо ту, для якої різниця лівої і правої частин найбільша.

4. Якщо в кількох клітинках різниця найбільша серед усіх і однакова за числовим значенням, то вибираємо ту, у якій вартість перевезень найменша.

Усі попередні твердження можна узагальнити у вигляді теореми.

Теорема 1. Для того, щоб опорний план транспортної задачі був оптимальним необхідно і досить, щоб коефіцієнти

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j), \quad (6)$$

обчислені для вільних клітинок, де α_i і β_j — розв'язки системи (2), були невід'ємними.

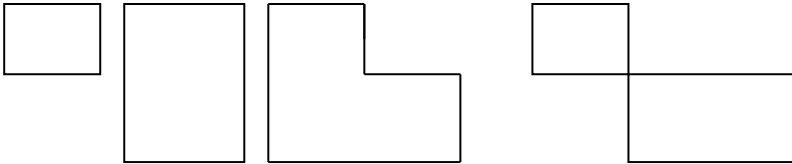
Зауваження 1. Для обчислення потенціалів не обов'язково складати систему рівнянь, їх можна знайти за таким правилом: невідомий потенціал дорівнює різниці вартості базисної клітинки і значення відомого потенціалу.

Перехід між опорними планами за циклом перерахунку

Уведемо в розгляд метод знаходження оптимального плану транспортної задачі, який носить назву *методу перерахунку за циклом*.

Означення 3. *Циклом* в матриці будемо називати замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпцю.

Можливі види циклів схематично зображені на рисунку.



Перпендикулярні ламані в циклі можуть перетинатись і точка їх перетину не буде вважатись вершиною циклу.

Означення 4. Вершини одного і того самого відрізка циклу будемо називати *сусідніми*.

Означення 5. Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки («+» і «-»), називають *означеним*.

Означення 6. Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а всі інші у базисних, називають *циклом перерахунку*.

У вільній клітинці завжди ставиться знак «+».

Означення 7. *Зсувом* по циклу перерахунку на число θ називають таку операцію, при якій в додатній вершині додається одне і те саме число θ , а у від'ємних віднімається.

Справедливими є наступні твердження.

Теорема 3. Зсув за означеним циклом у матриці перевезень перетворює один розв'язок системи обмежень транспортної задачі в інший розв'язок цієї самої задачі.

Теорема 4. Для будь-якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.

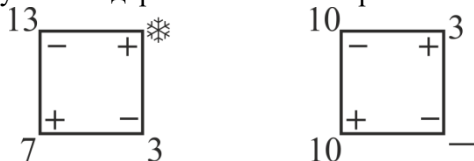
Задача 4. Перерахувати опорний план транспортної задачі з відомим першим опорним планом за циклом перерахунку.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— 4	45 1	— 3	15 4	— 4	60	$\alpha_1 = 0$
A_2	22 2	— 3	13 2	*	— 3	35	$\alpha_2 = 0$
A_3	— 3	— 5	7 2	3 4	30 4	40	$\alpha_3 = 0$
	22	45	20	18	30	135	
	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 4$	$\beta_5 = 4$		

Розв'язування

Безпосередньою перевіркою за методом потенціалів переконуємось, що план не є оптимальним. Зокрема, вільні клітинки A_2B_4 і A_2B_5 не задовольняє умову (3). Різниця між лівою і правою частинами більша в клітинці A_2B_4 , тому вибираємо її у якості ключової. Отже, потрібно здійснити перехід до іншого опорного плану.

Можливим циклом перерахунку є той, що зображений в таблиці. Виберемо у вершинах найменше базисне значення (це 3) і зробимо зсув на цю величину. У додатних вершинах додамо 3, а від'ємних віднімемо 3. У результаті одержимо новий опорний план.



$$\min(13; 3) = 3.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— 4	45 1	— 3	15 4	— 4	60	$\alpha_1 = 0$
A_2	22 2	— 3	10 2	3 2	— 3	35	$\alpha_2 = -2$
A_3	— 3	— 5	10 2	— 4	30 4	40	$\alpha_3 = -2$
	22	45	20	18	30	135	
	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 4$	$\beta_5 = 6$		

$$F = 45 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 22 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 4 = \\ = 45 + 60 + 44 + 20 + 6 + 20 + 120 = 315.$$

Зауваження 3. Значення базисних клітинок, які не брали участь у циклі, переписуємо без змін.

Вказані перетворення виконують до тих пір, поки не справдяться умови оптимальності.

Транспортна задача (практикум)

Задача 1 (закрита транспортна задача). Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі:

$$A_1 = 60; A_2 = 35; A_3 = 40; \\ B_1 = 22; B_2 = 45; B_3 = 20; B_4 = 18; B_5 = 30;$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 60 + 35 + 40 = 135;$$

$$\sum_{j=1}^5 B_j = 22 + 45 + 20 + 18 + 30 = 135.$$

Отже, задача закрита.

Виконуємо початкове заповнення методом найменшої вартості.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— 4	45 1	— 3	15 4	— 4	60	$\alpha_1 = 0$
A_2	22 2	— 3	13 2	* 2	— 3	35	$\alpha_2 = 0$
A_3	— 3	— 5	7 2	3 4	30 4	40	$\alpha_3 = 0$
	22	45	20	18	30	135	
	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 4$	$\beta_5 = 4$		

$r = n + m - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$; кількість базисних клітинок теж дорівнює 7. Так як $7 = 7$, то задача не вироджена.

$$F = 45 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 22 \cdot 2 + 13 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 30 \cdot 4 = 45 + 60 + 44 + 26 + 14 + 12 + 120 = 321.$$

Застосуємо метод потенціалів.

1) Знаходимо потенціали. Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_2 = 1$, $\beta_4 = 4$; далі $\alpha_3 = 0$; тоді $\beta_3 = 2$; $\beta_5 = 4$; далі $\alpha_2 = 0$; звідки $\beta_1 = 2$.

2) Перевіримо вільні клітинки:

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 2 = 2 \leq 4 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 2 = 2 \leq 3 +$$

$$A_1B_5: \alpha_1 + \beta_5 = 0 + 4 = 4 \leq 4 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = 0 + 1 = 1 \leq 3 +$$

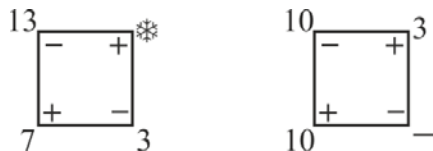
$$A_2B_4: \alpha_2 + \beta_4 = 0 + 4 = 4 \leq 2! (4 - 2 = 2) *$$

$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = 0 + 4 = 4 \leq 3! (4 - 3 = 1)$$

$$A_3B_1: \alpha_3 + \beta_1 = 0 + 2 = 2 \leq 3 +$$

$$A_3B_2: \alpha_3 + \beta_2 = 0 + 1 = 1 \leq 5 +$$

Виконаємо перерахунок за методом циклів.



$$\min(13; 3) = 3.$$

$$F_1 = 13 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 26 + 14 + 12 = 52;$$

$$F_2 = 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 20 + 20 + 6 = 46;$$

$$F_1 - F_2 = 52 - 46 = 6;$$

$$F = 321 - 6 = 315.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— $\boxed{4}$	45 $\boxed{1}$	— $\boxed{3}$	15 $\boxed{4}$	\otimes $\boxed{4}$	60	$\alpha_1 = 0$
A_2	22 $\boxed{2}$	— $\boxed{3}$	10 $\boxed{2}$	3 $\boxed{2}$	— $\boxed{3}$	35	$\alpha_2 = -2$
A_3	— $\boxed{3}$	— $\boxed{5}$	10 $\boxed{2}$	— $\boxed{4}$	30 $\boxed{4}$	40	$\alpha_3 = -2$
	22	45	20	18	30	135	
	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 4$	$\beta_5 = 6$		

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 4 = 4 \leq 4 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 4 = 4 \leq 3! (4 - 3 = 1)$$

$$A_1B_5: \alpha_1 + \beta_5 = 0 + 6 = 6 \leq 4! (6 - 4 = 2) \otimes$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = -2 + 1 = -1 \leq 3 +$$

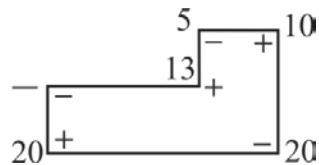
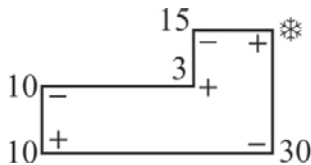
$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = -2 + 6 = 4 \leq 3! (4 - 3 = 1)$$

$$A_3B_1: \alpha_3 + \beta_1 = -2 + 4 = 2 \leq 3 +$$

$$A_3B_2: \alpha_3 + \beta_2 = -2 + 1 = -1 \leq 5 +$$

$$A_3B_4: \alpha_3 + \beta_4 = -2 + 4 = 2 \leq 4 +$$

Виконаємо перерахунок за методом циклів.



$$\min(15; 10; 30) = 10.$$

$$F_3 = 30 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 120 + 20 + 20 + 6 + 60 = 226;$$

$$F_4 = 20 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 13 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 + 26 + 20 + 40 = 206; F_3 - F_4 = 226 - 206 = 20; F = 315 - 20 = 295.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— 4	45 1	— 3	5 4	10 4	60	$\alpha_1 = 0$
A_2	22 2	— 3	— 2	13 2	— 3	35	$\alpha_2 = -2$
A_3	* 3	— 5	20 2	— 4	20 4	40	$\alpha_3 = 0$
	22	45	20	18	30	135	
	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 4$	$\beta_5 = 4$		

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 4 = 4 \leq 4 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 2 = 2 \leq 3 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = -2 + 1 = -1 \leq 3 +$$

$$A_2B_3: \alpha_2 + \beta_3 = -2 + 1 = 0 \leq 2 +$$

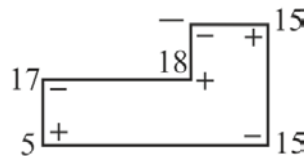
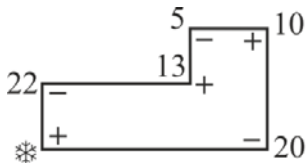
$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = -2 + 4 = 2 \leq 3 +$$

$$A_3B_1: \alpha_3 + \beta_1 = 0 + 4 = 4 \leq 3! *$$

$$A_3B_2: \alpha_3 + \beta_2 = 0 + 1 = 1 \leq 5 +$$

$$A_3B_4: \alpha_3 + \beta_4 = 0 + 4 = 4 \leq 4 +$$

Виконаємо перерахунок за методом циклів.



$$\min(22; 5; 20) = 5.$$

$$F_5 = 22 \cdot 2 + 13 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 4 = 44 + 26 + 20 + 40 + 80 = 210;$$

$$F_6 = 5 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 15 \cdot 4 = 15 + 34 + 36 + 60 + 60 = 205;$$

$$F_5 - F_6 = 210 - 205 = 5;$$

$$F = 295 - 5 = 290.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— 4	45 1	— 3	— 4	15 4	60	$\alpha_1 = 0$
A_2	17 2	— 3	— 2	18 2	— 3	35	$\alpha_2 = -1$
A_3	5 3	— 5	20 2	— 4	15 4	40	$\alpha_3 = 0$
	22	45	20	18	30	135	
	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 3$	$\beta_5 = 4$		

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 3 = 3 \leq 4 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 2 = 2 \leq 3 +$$

$$A_1B_4: \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 3 = 3 \leq 4 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = -1 + 1 = 0 \leq 3 +$$

$$A_2B_3: \alpha_2 + \beta_3 = -1 + 2 = 1 \leq 2 +$$

$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = -1 + 4 = 3 \leq 3 +$$

$$A_3B_2: \alpha_3 + \beta_2 = 0 + 1 = 1 \leq 5 +$$

$$A_3B_4: \alpha_3 + \beta_4 = 0 + 3 = 3 \leq 4 +$$

Отже, задача оптимізована.

$$F = 290; \text{ матриця перевезень } \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 0 & 15 \\ 17 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 5 & 0 & 20 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Задача 2 (відкрита транспортна задача). Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі:

$$A_1 = 100; A_2 = 120; A_3 = 240;$$

$$B_1 = 50; B_2 = 80; B_3 = 130; B_4 = 180;$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 100 + 120 + 240 = 460;$$

$$\sum_{j=1}^4 B_j = 50 + 80 + 130 + 180 = 440.$$

Отже, задача відкрита.

$460 - 440 = 20$; $460 > 440$. Оскільки сумарний запас постачальників більший за сумарну потребу, то додаємо ще один стовпчик (фіктивного споживача), вартості перевезень у якому дорівнюють 0, а кількість одиниць товару — 20.

Виконуємо початкове заповнення методом найменшої вартості.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	20 3	80 2	— 8	* 7	— 0	100	$\alpha_1 = 0$
A_2	— 6	— 4	— 5	120 2	— 0	120	$\alpha_2 = -7$
A_3	30 3	— 5	130 3	60 9	20 0	240	$\alpha_3 = 0$
	50	80	130	180	20	460	
	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 3$	$\beta_4 = 9$	$\beta_5 = 0$		

$r = n + m - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$; кількість базисних клітинок теж дорівнює 7. Так як $7 = 7$, то задача не вироджена.

$$F = 20 \cdot 3 + 80 \cdot 2 + 120 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 130 \cdot 3 + 60 \cdot 9 + 20 \cdot 0 = 60 + 160 + 240 + 90 + 390 + 540 + 0 = 1480.$$

Застосуємо метод потенціалів.

1) Знаходимо потенціали. Нехай $\alpha_3 = 0$, тоді $\beta_1 = 3$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 9$, $\beta_5 = 0$; далі $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -7$; тоді $\beta_1 = 2$.

2) Перевіримо вільні клітинки:

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 3 = 3 \leq 8 +$$

$$A_1B_4: \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 9 = 9 \leq 7! (9 - 7 = 2) *$$

$$A_1B_5: \alpha_1 + \beta_5 = 0 + 0 = 0 \leq 0 +$$

$$A_2B_1: \alpha_2 + \beta_1 = -7 + 3 = -4 \leq 6 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = -7 + 2 = -5 \leq 4 +$$

$$A_2B_3: \alpha_2 + \beta_3 = -7 + 3 = -4 \leq 5 +$$

$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = -7 + 0 = -7 \leq 0 +$$

$$A_3B_2: \alpha_3 + \beta_2 = 0 + 2 = 2 \leq 5 +$$

Виконаємо перерахунок за методом циклів.



$$\min(20; 60) = 20.$$

$$F_1 = 60 \cdot 9 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 3 = 540 + 90 + 60 = 690;$$

$$F_2 = 20 \cdot 7 + 40 \cdot 9 + 50 \cdot 3 = 140 + 360 + 150 = 650;$$

$$F_1 - F_2 = 690 - 650 = 40;$$

$$F = 1480 - 40 = 1440.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	— 3	80 2	— 8	20 7	— 0	100	$\alpha_1 = -2$
A_2	— 6	— 4	— 5	120 2	— 0	120	$\alpha_2 = -7$
A_3	50 3	— 5	130 3	40 9	20 0	240	$\alpha_3 = 0$
	50	80	130	180	20	460	
	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 3$	$\beta_4 = 9$	$\beta_5 = 0$		

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = -2 + 3 = 1 \leq 3 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = -2 + 3 = 1 \leq 8 +$$

$$A_1B_5: \alpha_1 + \beta_5 = -2 + 0 = -2 \leq 0 +$$

$$A_2B_1: \alpha_2 + \beta_1 = -7 + 3 = -4 \leq 6 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = -7 + 4 = -3 \leq 4 +$$

$$A_2B_3: \alpha_2 + \beta_3 = -7 + 3 = -4 \leq 5 +$$

$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = -7 + 0 = -7 \leq 0 +$$

$$A_3B_2: \alpha_3 + \beta_2 = 0 + 4 = 4 \leq 5 +$$

Отже, задача оптимізована.

$$F = 1440; \text{ матриця перевезень } \begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 120 \\ 50 & 0 & 130 & 40 \end{pmatrix}.$$

Задача 3 (відкрита транспортна задача). Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі:

$$A_1 = 120; A_2 = 110; A_3 = 250;$$

$$B_1 = 60; B_2 = 80; B_3 = 140; B_4 = 180;$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 120 + 110 + 250 = 480;$$

$$\sum_{j=1}^4 B_j = 60 + 80 + 140 + 180 = 460.$$

Отже, задача відкрита.

$480 - 460 = 20$; $480 > 460$. Оскільки сумарний запас постачальників більший за сумарну потребу, то додаємо ще один стовпчик (фіктивного споживача), вартості перевезень у якому дорівнюють 0, а кількість одиниць товару — 20.

Виконуємо початкове заповнення методом найменшої вартості.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	60 1	— 2	60 3	— 4	— 0	120	$\alpha_1 = 0$
A_2	— 5	— 4	— 3	110 2	— 0	110	$\alpha_2 = -2$
A_3	— 2	80 1	80 3	70 4	20 0	250	$\alpha_3 = 0$
	60	80	140	180	20	480	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 3$	$\beta_4 = 4$	$\beta_5 = 0$		

$r = n + m - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$; кількість базисних клітинок теж дорівнює 7. Так як $7 = 7$, то задача не вироджена.

$$F = 60 \cdot 1 + 60 \cdot 3 + 110 \cdot 2 + 80 \cdot 1 + 80 \cdot 3 + 70 \cdot 4 + 20 \cdot 0 = 60 + 180 + 220 + 80 + 240 + 280 + 0 = 1060.$$

Застосуємо метод потенціалів.

1) Знаходимо потенціали. Нехай $\alpha_3 = 0$, тоді $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 4$, $\beta_5 = 0$; далі $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2$; тоді $\beta_1 = 1$.

2) Перевіримо вільні клітинки:

$$A_1 B_2: \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 1 = 1 \leq 2 +$$

$$A_1 B_4: \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 4 = 4 \leq 4 +$$

$$A_1 B_5: \alpha_1 + \beta_5 = 0 + 0 = 0 \leq 0 +$$

$$A_2B_1: \alpha_2 + \beta_1 = -2 + 1 = -1 \leq 5 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = -2 + 1 = -1 \leq 5 +$$

$$A_2B_3: \alpha_2 + \beta_3 = -2 + 3 = 1 \leq 3 +$$

$$A_2B_5: \alpha_2 + \beta_5 = -2 + 0 = -2 \leq 0 +$$

$$A_3B_1: \alpha_3 + \beta_1 = 0 + 1 = 1 \leq 2 +$$

Отже, задача оптимізована.

$$F = 1060; \text{ матриця перевезень } \begin{pmatrix} 60 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 80 & 80 & 70 \end{pmatrix}.$$

Задача 4 (вироджена транспортна задача). Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі:

$$A_1 = 30; A_2 = 20; A_3 = 10;$$

$$B_1 = 5; B_2 = 35; B_3 = 20;$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 30 + 20 + 10 = 60;$$

$$\sum_{j=1}^5 B_j = 5 + 35 + 20 = 60.$$

Отже, задача закрыта.

Виконуємо початкове заповнення методом найменшої вартості.

	B_1	B_2	B_3		
A_1	5	25	—	30	$\alpha_1 = 0$
A_2	0	—	20	20	$\alpha_2 = 3$
A_3	*	10	—	10	$\alpha_3 = 2$
	5	35	20	60	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = -1$		

$r = n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$; кількість базисних клітинок дорівнює 4. Так як $5 \neq 4$, то задача вироджена.

$$F = 5 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 5 + 50 + 40 + 40 = 135.$$

Застосуємо метод потенціалів.

1) Знаходимо потенціали. Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$; далі $\alpha_3 = 0$. Більше немає базисних клітинок, за допомогою яких можна знайти решту потенціалів. Але оскільки ми маємо вироджену задачу в $5 - 4 = 1$, то ми можемо дозначити 1 базисну клітинку, кількість одиниць товару в якій дорівнює 0 (щоб не змінилася загальна вартість перевезень). Додавання як базисної клітинок A_2B_2 , A_3B_1 не дозволить визначити ще якийсь потенціал. Отже, вибираємо **ДОВІЛЬНО** будь-яку іншу клітинку. Нехай це буде A_2B_1 . Тоді матимемо, що кількість базисних клітинок дорівнює 5 і задача стає невиродженою. Знаходимо решту потенціалів: $\alpha_2 = 3$; звідки $\beta_1 = 2$.

2) Перевіримо вільні клітинки:

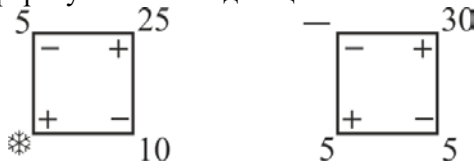
$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + (-1) = -1 \leq 3 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = 3 + 2 = 5 \leq 5 +$$

$$A_3B_1: \alpha_1 + \beta_3 = 2 + 1 = 3 \leq 1! (3 - 1 = 2) *$$

$$A_3B_3: \alpha_3 + \beta_3 = 2 + (-1) = 1 \leq 5 +$$

Виконаємо перерахунок за методом циклів.



$$\min(5; 10) = 5.$$

$$F = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 60 + 40 + 5 + 20 = 125.$$

	B_1	B_2	B_3		
A_1	— 1	30 2	— 3	30	$\alpha_1 = 0$
A_2	4	5	20 2	20	$\alpha_2 = 5$
A_3	1	4	— 5	10	$\alpha_3 = 2$
	5	35	20	60	
	$\beta_1 = -1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = -3$		

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = 0 + (-1) = -1 \leq 1 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = 0 + (-3) = -3 \leq 3 +$$

$$A_2B_2: \alpha_2 + \beta_2 = 5 + 3 = 8 \leq 2! \quad (8 - 2 = 6) \quad *$$

$$A_3B_3: \alpha_3 + \beta_3 = 2 + (-3) = -1 \leq 5 +$$

Виконаємо перерахунок за методом циклів.



$$\min(0; 5) = 0.$$

$$F = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 60 + 40 + 5 + 20 = 125.$$

	B_1	B_2	B_3		
A_1	— 1	30 2	— 3	30	$\alpha_1 = -2$
A_2	— 4	0 5	20 2	20	$\alpha_2 = 1$
A_3	5 1	5 4	— 5	10	$\alpha_3 = 0$
	5	35	20	60	
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 1$		

$$A_1B_1: \alpha_1 + \beta_1 = -2 + 1 = -1 \leq 1 +$$

$$A_1B_3: \alpha_1 + \beta_3 = -2 + 1 = -1 \leq 3 +$$

$$A_2B_1: \alpha_2 + \beta_1 = 1 + 1 = 2 \leq 4 +$$

$$A_3B_3: \alpha_3 + \beta_3 = 0 + 1 = 1 \leq 5 +$$

Отже, задача оптимізована.

$$F = 125; \text{ матриця перевезень } \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування транспортних задач засобами MS Excel

Оскільки транспортна задача є задачею лінійного програмування, то її розв'язок можна знайти, використовуючи вбудовану програму **Поиск решения**. Задача полягає в знаходженні мінімуму цільової функції

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n x_{il} &= a_i, & (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{l=1}^m x_{lj} &= b_j, & (j = \overline{1, m}) \end{aligned} \quad (1)$$

і залежних змінних $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Умову лінійних рівнянь (1) можна замінити умовою лінійних нерівностей

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n x_{il} &\leq a_i, & (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{l=1}^m x_{lj} &\geq b_j, & (j = \overline{1, m}) \end{aligned} \quad (2)$$

і залежних змінних $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Наведемо приклад розв'язування транспортної задачі для тестового прикладу закритої транспортної задачі з вектором запасів $a = (20; 15)$, вектором потреб $b = (10; 18; 7)$ і матрицею вартостей перевезення товару

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Слід відзначити, що при використанні обмежень (1) знаходиться допустимий, але не завжди оптимальний розв'язок транспортної задачі.

Для запису вхідних даних будуємо таблицю:

	A	B	C	D	E
1	Розв'язування транспортної задачі				
2	засобами MS Excel				
3	Пункти запасів	Усього	B1	B2	B3
4	A1	3	1	1	1
5	A2	3	1	1	1
6			10	18	7
7					
8	Потреби		10	18	7
9		Запаси	Транспортні видатки		
10		20	3	2	1
11		15	1	3	4
12	Мінімум =	14			

<i>Адреса</i>	<i>Пояснення даних</i>
B10:B11	Запаси постачальників
C8:E8	Потреби споживачів
C10:E11	Вартості перевезення від пунктів запасів до пунктів потреб
C4:E5	Шукана матриця кількості перевезень (перед початком роботи програми значення заповнюємо одиницями)

У коміру B4 вводимо формулу розрахунку суми поставок від першого пункту запасів $=\text{SUM}(C4:E4)$ і копіюємо її у решту комірок для інших постачальників. Аналогічно у коміру C6 вводимо формулу розрахунку суми поставок для першого споживача і копіюємо її у решту комірок рядка для інших споживачів.

У коміру B12 вводимо формулу для цільової функції (мінімальної вартості всіх перевезень). Для цього використовуємо вбудовану математичну функцію $=\text{SUMPRODUCT}(C4:E5; C10:E11)$.

Тепер можна запускати програму. Для цього:

— відкриваємо вікно *Дані/Розв'язувач*. У рядку *Оптимізувати цільову функцію* вказуємо адресу комірки B12, де міститься формула цільової функції;

— відзначаємо пункт *Мінімум*. У рядку *Змінюючи клітинки змінних* вказуємо блок (C4:E5), де будуть знаходитися значення обсягів перевезень від постачальників до споживачів. Потім додаємо обмеження, що відповідають системі нерівностей:

1) сума поставок від i -го постачальника не перевищує запасів цього постачальника: (B4:B5<=B10:B11);

2) попит j -го споживача не менший за суму поставок для цього споживача: (C6:E6>=C8:E8);

3) змінні величини невід’ємні: (C4:E5>=0).

Параметри розв'язувача

Оптимізувати цільову функцію:

До: Максимум Мінімум Значення:

Змінюючи клітинки змінних:

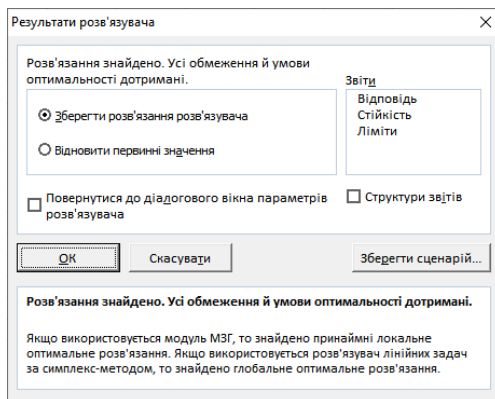
Підлягає обмеженням:

Зробити необмежені змінні не від'ємними

Виберіть метод розв'язання:

Метод розв'язання
Для розв'язання гладких нелінійних задач виберіть розв'язувач нелінійних задач за методом зведеного градієнта. Для розв'язання лінійних завдань виберіть розв'язувач за симплекс-методом, для негладких завдань виберіть розв'язувач розв'язувач.

У вікні *Параметри розв'язувача* натискаємо клавішу **Розв'язати**. У вікні *Результати розв'язувача* відзначаємо **Зберегти розв'язання розв'язувача** і натискаємо **ОК**.



Отриманий результат відображається у комірці **B12**.

Завдання для самостійної роботи

Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі.

1.
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 6 \\ 11 & 9 & 3 & 12 \\ 7 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix};$$

$a_i = (400; 300; 200);$

$b_j = (350; 400; 250; 180).$

2.
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 16 & 15 \\ 5 & 7 & 13 & 10 \\ 4 & 17 & 12 & 14 \end{pmatrix};$$

$a_i = (240; 280; 300);$

$b_j = (190; 200; 250; 250).$

3.
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 13 \end{pmatrix};$$

$a_i = (200; 180; 310);$

$b_j = (180; 240; 170; 180).$

РОЗДІЛ 7. ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Нерівність Гоморрі

Ми розглядали задачі, оптимальні значення яких були дробовими величинами. Проте з точки зору економіки такі розв'язки не завжди є можливими. Наприклад, плани випуску телевізорів, побутових предметів тощо, які в дробовому виразі не мають ніякого сенсу. Накладання додаткових умов приводить до дослідження нового типу задач — *задач цілочисельного програмування*.

Задача лінійного програмування, зведена до системи рівнянь, має вигляд:

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \text{ (max)} \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

де x_j — цілі числа. (3)

Прикладом задачі цілочисельного програмування є транспортна задача та задача про комівояжера, а також ряд інших проблемних задач, що зустрічаються на практиці.

Очевидно, що цілочисельний розв'язок є одним і розв'язків множини допустимих планів. Тому оптимальне значення цілочисельної задачі не може бути більшим за відповідне значення задачі без умови цілочисельності. Якщо розв'язок задачі лінійного програмування виражається цілим значенням, то це є одночасно і розв'язком задачі цілочисельного програмування. Якщо ж ні, то розв'язок можна отримати заокругленням. Проте таке вирішення проблеми має ряд об'єктивних труднощів:

1) коефіцієнти системи обмежень можуть бути від'ємними числами, тоді не зовсім зрозуміло, як їх краще округлювати;

2) немає простих критеріїв, які дозволяють визначити, чи є знайдений план оптимальним.

На сьогоднішній час можна виділити два типи задач за методами пошуку цілочисельних розв'язків:

1. Усі розв'язки задач (1)–(2) є цілочисельними.

2. Одна частина невідомих в задачі цілочисельна, а друга — довільна.

Методи пошуку задач першої групи значно простіші й легко програмуються на ПК. Розглянемо детальніше метод відтинання площин або його ще називають метод Гоморрі для знаходження цілочисельного розв'язку задачі лінійного програмування.

Означення 1. Цілою частиною числа a називають найбільше ціле число, яке менше або дорівнює йому.

Таку функціональну залежність в математиці називають функцією Антьє і позначають $[a]$.

Наприклад, $[7,1] = 7$; $[9] = 9$; $[-3,4] = -4$; $[-11] = -11$.

Означення 2. Дробовою частиною числа a називають різницю між числом a та його цілою частиною (позначають $\{a\}$):

$$\{a\} = a - [a].$$

Для обмежень задачі цілочисельного програмування властивості 1) та 2) дають змогу записати нерівність

$$\sum_{j=1}^n x_j \{a_{ij}\} \geq \{b_j\}, \quad (4)$$

яку називають *нерівністю Гоморрі*.

Метод Гоморрі розв'язування задач цілочисельного програмування

Алгоритм методу Гоморрі опишемо кількома кроками:

Крок 1. Знайдемо розв'язок задачі (1)–(2) без умови цілочисельності.

Крок 2. Якщо оптимальний план цілочисельний, то задача розв'язана. У протилежному випадку вибираємо оптимальне значення змінної (базисну змінну) з найбільшою дробовою частиною, після чого за обмеженням цієї базисної невідомої складаємо нерівність Гоморрі.

Крок 3. До обмежень задачі додаємо нове обмеження з кроку 2. Розв'язуємо розширену задачу та повертаємось до кроку 1. Процес продовжуємо до отримання цілочисельного розв'язку або доки симплекс-таблиці не покажуть, що розв'язку немає.

Додаткове обмеження відтинає частину многокутника таким чином, що точка максимуму буде мати цілочисельні координати. Звідси друга назва методу — метод відтинаючих площин.

Обмеженість застосування методу Гоморрі полягає в тому, що всі змінні мають бути цілочисельними, крім того, кількість ітерацій (вона залежить тільки від самої задачі) може бути досить великою. Обмеження типу Гоморрі можна дістати й іншими способами, однак відтинання забезпечує кращу збіжність процесу до оптимального цілочисельного розв'язку.

Серед методів цілочисельного програмування, у яких накладаються умови цілочисельності тільки на частину змінних, найпоширенішим є метод віток і границь. Крім того, є ряд наближених методів пошуку цілочисельного розв'язку.

Задача 1. На придбання обладнання для нової виробничої ділянки підприємства «Підручники і посібники» виділено 20 умовних грошових одиниць. Обладнання можна розмістити на площі 38 м^2 . Тип обладнання A коштує 5 у. г. о., потребує 8 м^2 виробничих площ і дозволить випускати 7 тис. од. продукції за зміну. Тип обладнання B коштує 2 у. г. о., потребує 4 м^2 виробничих площ і дозволить випускати 3 тис. од. продукції за зміну. Розрахувати оптимальний план придбання обладнання.

Розв'язування

Позначимо через x_1 кількість одиниць першого обладнання, x_2 — кількість одиниць другого обладнання. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 38, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases}$$

$$F = 7x_1 + 3x_2 \text{ (max)}.$$

Запишемо канонічну форму задачі:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ 8x_1 + 4x_2 + x_4 = 38, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases}$$

$$F - 7x_1 - 3x_2 = 0 \text{ (max)}.$$

Складемо симплекс-таблицю:

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	F	0	$-7 \downarrow$	-3	0	0
	1	$x_3 \rightarrow$	20	5	2	1	0
	2	x_4	38	8	4	0	1
II	0	F	28	0	$-\frac{1}{5} \downarrow$	$\frac{7}{5}$	0
	1	x_1	4	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
	2	$x_4 \rightarrow$	6	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	1
III	0	F	$\frac{59}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$
	1	x_1	1	1	0	1	$-\frac{1}{2}$
	2	x_2	$\frac{15}{2}$	0	1	-2	$\frac{5}{4}$

Остання симплекс-таблиця дає оптимальний план, але він не є цілочисельним. Переходимо до кроку 2. Дробовому плану відповідає обмеження

$$x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}.$$

Нерівність Гоморрі для цього обмеження має вигляд:

$$\frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Додаємо обмеження (5) та виписуємо її канонічну форму:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{4}x_4 - x_5 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(\max) F = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4 \quad (\max) F = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4.$$

Остання система обмежень не записана в канонічному вигляді, бо останнє обмеження не містить базисної невідомої. Тому використаємо метод штучного базису, щоб звести її до канонічного вигляду.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}, \\ x_4 - x_5 + u_1 = 2. \end{cases}$$

Тоді $f = u_1$ (*min*).

Випишемо нову таблицю:

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	f	2	0	0	0	1 ↓	-1
	1	x_1	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0
	2	x_2	$\frac{15}{2}$	0	1	-2	$\frac{5}{4}$	0
	3	$u_1 \rightarrow$	2	0	0	0	1	-1
	4	F	$\frac{59}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0
II	0	f	0	0	0	0	0	0
	1	x_1	2	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
	2	x_2	5	0	1	-2	0	$\frac{5}{4}$
	3	x_4	2	0	0	0	1	-1
	4	F	29	0	0	1	0	$\frac{1}{4}$

Оскільки в рядку запису коефіцієнтів цільової функції F відсутні від'ємні числа, то досягнуто максимум F , при цьому значення змінних є цілочисельними.

За критерієм план оптимальний, крім того він цілочисельний.

$$X_{\text{опт.}} = (2; 5; 0; 2; 0), \quad F_{\text{max}} = 29.$$

Отже, обладнання типу A слід закупити 2 одиниці, а типу B — 5 одиниць.

При цьому залишиться 2 м^2 виробничої площі, яку можна використати для інших цілей. Максимальний випуск продукції складатиме 29 тис. одиниць.

Якщо знайти план за округленням, то воно дає значення

$$x_1 = 1, x_2 = 7, F = 7 + 3 \cdot 7 = 28.$$

Геометричне трактування методу Гоморрі

Розглянемо геометричну інтерпретацію методу Гоморрі. Якщо в додаткове обмеження підставити значення x_4 , то отримаємо:

$$\frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{4}(38 - 8x_1 - 4x_2) = \frac{19}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}x_2,$$

або

$$2x_1 + x_2 \leq 9.$$

Многокутник розв'язків описаний системою обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 38, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Додаткове обмеження відтинає частину многокутника таким чином, що точка максимуму буде мати цілочисельні координати. Звідси назва методу — метод відтинаючих площин.

Цілочисельне програмування (практикум)

Задача 1. Знайти оптимальний цілочисельний розв'язок процесу, заданого системою нерівностей та цільовою функцією:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5; \\ x_1 + 5x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$F = 4x_1 + 5x_2 + 2 \text{ (max)}.$$

Розв'язування

Записуємо канонічну форму задачі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 10; \\ x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$F - 4x_1 - 5x_2 = 2 \text{ (max)}.$$

Намагатимемося спочатку знайти оптимальний розв'язок без врахування вимоги цілочисельності, а потім скористаємось новими знаннями для перерахунку такого розв'язку.

Складаємо симплекс-таблицю:

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	F	2	-4	-5 ↓	0	0
	1	x_3	5	1	1	1	0
	2	$x_4 \rightarrow$	10	1	5	0	1
II	0	F	12	-3 ↓	0	0	1
	1	$x_3 \rightarrow$	3	$\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$
	2	x_2	2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$
III	0	F	$\frac{93}{4}$	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{1}{4}$
	1	x_1	$\frac{15}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$
	2	x_2	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Перетворимо значення базисних змінних у дроби з цілими частинами:

$$x_1 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}; \quad x_2 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Оскільки дробова частині змінної x_1 є більшою за дробову частину x_2 , то будемо нерівність Гоморрі по змінній x_1 .

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{3}{4}.$$

Додамо дану нерівність до початкової системи обмежень і запишемо її у таблицю, попередньо звівши нерівність до канонічного вигляду.

$$x_3 + 3x_4 - x_5 + u_1 = 3.$$

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	f	3	0	0	1	3 ↓	-1
	1	x_1	$\frac{15}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
	2	x_2	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
	3	$u_1 \rightarrow$	3	0	0	1	3	-1
	4	F	$\frac{93}{4}$	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
II	0	f	0	0	0	0	0	
	1	x_1	4	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{12}$
	2	x_2	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$
	3	x_4	1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
	4	F	23	0	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

Останній план цілочисельний і оптимальний:

$$X = (4; 1; 0; 1; 0); F_{\max} = 23.$$

У випадку, коли у задачі кількість невідомих дорівнює 2, зручно скористатися графічним методом і в області оптимального значення виділити всі цілочисельні допустимі плани і перевірити, у якому з них цільова функція буде набувати найбільшого цілочисельного значення.

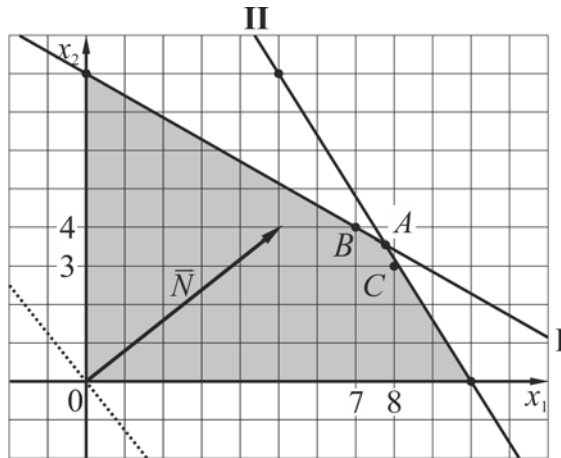
Задача 2. Знайти оптимальний цілочисельний розв'язок процесу, заданого системою нерівностей та цільовою функцією:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \leq 56; \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 80; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + 4x_2 \text{ (max)}.$$

Розв'язування

Розв'яжемо задачу графічно (див. тему 2).



Точка A є точкою максимуму. Проте координати точки A не цілочисельні. Точки B і C є точками з цілочисельними координатами, які найближче містяться до точки A . З рисунка видно, що $B(7; 4)$, $C(8; 3)$. Підставивши знайдені координати в цільову функцію, знайдемо, що $F_B = 51$, $F_C = 52$.

Отже, цілочисельним розв'язком даної задачі є $x_1 = 8$, $x_2 = 3$, $F = 52$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти цілочисельний оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування. Перевірити значення знайденого розв'язку графічним методом.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 \leq 5, & F = 3x_1 + 2x_2 \text{ (max)}. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 11, \\ 4x_1 + x_2 \leq 10, & F = 4x_1 + 3x_2 - 4 \text{ (max)}. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15, & F = 4x_1 + 2x_2 + 5 \text{ (max)}. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 6x_2 \leq 11, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 17, & F = -2x_1 + 3x_2 + 6 \text{ (max)}. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

РОЗДІЛ 8. ІНФОРМАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ГРАФІВ

Чимало задач прикладного характеру пов'язується з упорядкованою множиною точок, під якою розуміються об'єкти, агрегати та інші дискретні елементи, з побудовою конструкцій, які складаються із взаємозв'язаних елементів, з транспортними проблемами тощо.

Такі задачі зручно відображувати схемою, яка складається з точок і відрізків, які з'єднують будь-яку пару точок, якщо такий зв'язок має місце.

Схема, що має таку структуру, називається графом, а задачі з такими графами зараховують до задач теорії графів. За допомогою цієї теорії розв'язуються задачі, які пов'язані з будуванням схем, з плануванням послідовності виконання робіт, з функціонуванням підсистем, балансові процеси тощо.

Найбільше використання теорія графів має при розв'язуванні інформаційних задач, задач з проблемами мінімізації кількості перетинів (так звана задача про мінімальну кількість аварій), задача про найкоротшу відстань, задача про максимальний потік, та інші задачі, які пов'язані з побудовою сітки зв'язків (газопроводи, мережі електропередач тощо).

Теорія графів дозволяє за допомогою єдиного підходу формулювати задачі, які начебто далекі одна від одної у своїй постановці. Усі задачі в термінах теорії графів можна розділити на два умовні класи: задачі, які пов'язані з підрахунком кількості об'єктів заданої властивості; задачі, що розв'язуються за алгоритмами на графах.

Означення. Граф G задається множиною точок чи вершин x_1, x_2, \dots, x_n (яку позначають через X) і множиною ліній чи ребер a_1, a_2, \dots, a_m (яку позначають через A), які з'єднують між собою всі або частину цих точок. Таким чином граф G повністю задається парою (X, A) .

Ребра $a(x, y), b(z, y)$, які мають спільні кінцеві вершини називають *суміжними*. Дві вершини x, y називають суміжними, якщо в графі існує ребро, яке з'єднує ці вершини. Також говорять, що це ребро є інцидентним до вершин x, y .

Степенем вершини у неорієнтованому графі називають кількість інцидентних їй ребер. Для вершини орграфа розглядають вихідний та вхідний ступінь, які дорівнюють відповідно кількості ребер, що виходять з вершини та входять у цю вершину.

Граф називають *повним*, якщо будь-які дві його вершини є суміжними. Граф називають *порожнім*, якщо його множина ребер порожня.

Шляхом (або орієнтованим маршрутом) орієнтованого графа називають послідовність ребер, в якій кінцева вершина будь-якого ребра, крім останнього, є початковою вершиною наступного ребра.

Простим шляхом називають такий шлях, в якому кожне ребро використовують не більше одного разу.

Елементарним шляхом називають такий шлях, в якому кожну вершину використовують не більше одного разу.

Маршрут — це неорієнтований двійник шляху — як послідовність ребер a_1, a_2, \dots, a_q , у якій кожне ребро a_i , за винятком, можливо, першого та останнього ребер, зв'язане з ребрами a_{i-1}, a_{i+1} своїми кінцевими вершинами.

Аналогічно можна означити простий та елементарний маршрути.

Шлях a_1, a_2, \dots, a_q називають *замкненим* (або *циклом*), якщо в ньому початкова вершина ребра a_1 збігається з кінцевою вершиною.

Замкнений шлях, у якому не має однакових ребер, але можуть «повторюватися» внутрішні вершини шляху, називають *простим замкненим шляхом* (*орієнтованим циклом*).

Простий цикл, який проходить через всі вершини графа, називають *гамільтоновим циклом*.

Якщо замкнений шлях не має ні однакових ребер, ні однакових вершин (крім першої та останньої), то його називають *елементарним замкненим шляхом* (*простим орциклом чи контуром*).

Контур, який проходить через всі вершини графа, називають *гамільтоновим контуром*.

Замкнений маршрут — це неорієнтований двійник замкненого шляху.

Граф називають *ациклічним*, якщо у ньому немає циклів.

Орієнтований граф $G(X, A)$ є *симетричним*, якщо для кожного ребра $(x, y) \in A$ існує протилежно орієнтоване ребро (y, x) .

Антисиметричним графом є такий граф, для якого справедлива умова: якщо ребро $(x, y) \in A$, то ребро $(y, x) \notin A$.

Неорієнтований граф $G(X, A)$ називають *дводольним*, якщо множину його вершин можна розбити на дві підмножини X_a і X_b такі, що кожне ребро має один кінець у підмножині X_a , а інший — в X_b . Орієнтований граф є *дводольним*, якщо його неорієнтований двійник — *дводольний граф*.

Позначимо деяку множину точок як $I = \{i\}$, де точку з цієї множини $i \in I$ назвемо вершиною. Ці вершини мають деякі зв'язки між собою, які утворюють множину зв'язків $U = \{u\}$ та відображують наявність або відсутність зв'язків між парами елементів $(i, j) \in U$, тобто $u \in U$, де $u = (i, j)$.

Якщо немає значення, в якому порядку беруться пари вершин — (i, j) або, — (j, i) то зв'язок такої пари вершин називається *ребром* (тобто без орієнтації).

Якщо порядок зв'язку вершин істотно змінює зміст, тобто коли пари (i, j) та (j, i) вважаються різними, такий зв'язок називається *дугою* (випадок з орієнтацією).

Граф позначається множиною $G = (I, U)$ і називається *неорієнтованим*, якщо зв'язки відображаються ребрами, та *орієнтованим* (орграфом), якщо зв'язками є дуги.

Якщо $\bar{I} \in I$ та $\bar{U} \in U$, то граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ називається *підграфом* графа $G = (I, U)$. У випадку коли \bar{I} збігається з I , то граф $G' = (I, \bar{U})$ називається *остовним підграфом* графа $G = (I, U)$.

Якщо для будь-яких двох вершин є зв'язок, то такий граф називається *повним*.

Ребро (i, j) інцидентне з вершинами i та j , та, у свою, чергу ці вершини інцидентні ребру (i, j) ; в орграфі прийнято твердження, що дуга (i, j) виходить з вершини i та заходить у вершину j .

Приклади графів наведено на рис. 1.

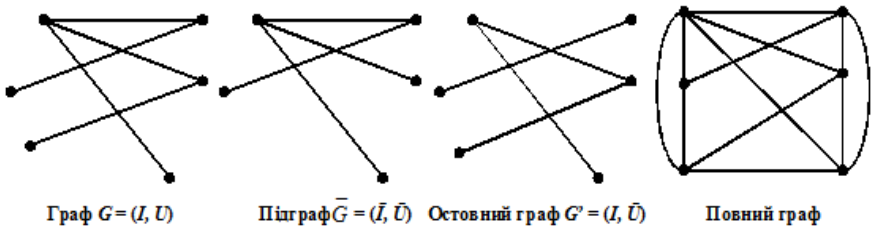


Рис. 1

Перехід від однієї вершини графа до другої виконується за допомогою *шляху*. У неорієнтованому графі шлях називається *ланцюгом*, який складається з послідовного набору суміжних ребер.

Шлях в орграфі називається *орієнтованим*. Якщо перша та остання вершини шляху збігаються, то такий шлях називається *циклом*.

Якщо для будь-якої пари є принаймні один шлях, то граф називається *зв'язним*.

Особистим класом графів є *дерево* — це зв'язний граф, у якому відсутні цикли (рис. 2).

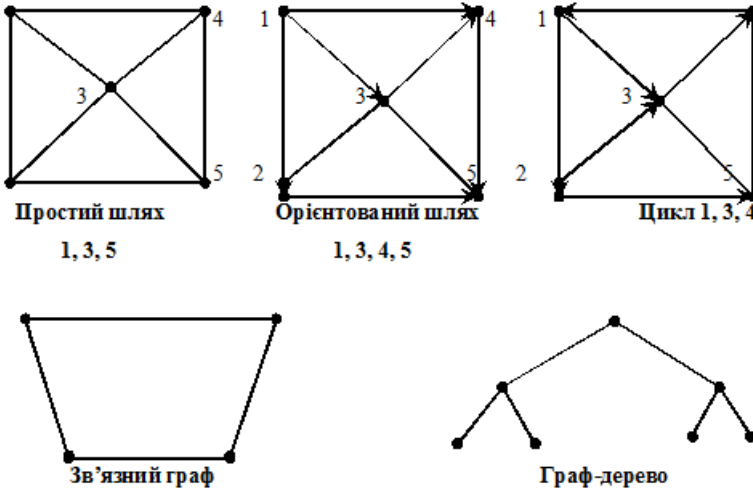


Рис. 2

Вершини та їх зв'язки можна зображувати на площині по-різному, виходячи із зручного зображення процесу. Внаслідок цього один і той самий граф можна зображувати по-різному, наприклад як на рис. 3.

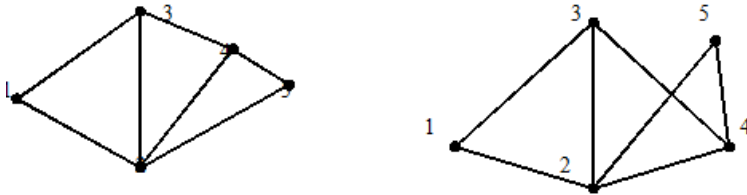


Рис. 3

Такі графи *ізоморфні*.

Засоби представлення графів. Зважені графи та мережі

Якщо граф зображується за допомогою схем у вигляді точок і зв'язків між ними, то така форма графів відображається діаграмою

графа. Але з великою кількістю елементів графа геометричне його зображення втрачає наочність. Тому в таких графах доцільно використовувати матричну форму.

Якщо наявність зв'язку між парою точок відображати через «1» а відсутність — через «0», то у такому випадку граф можна задавати матрицею суміжності рис. 4.

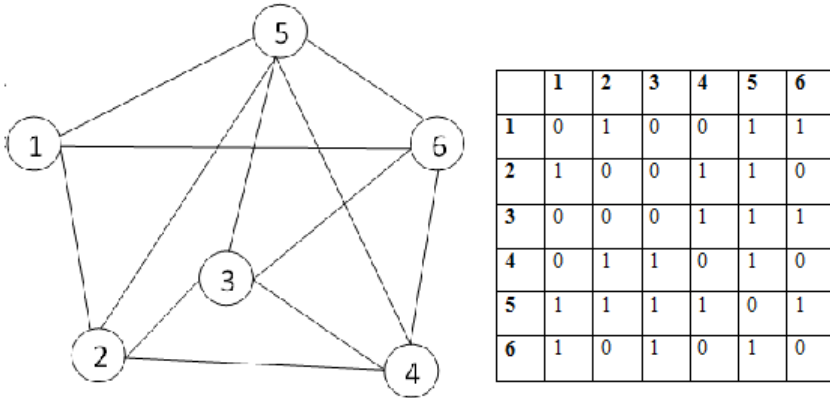


Рис. 4

Опис графа на Python:

```
def input_graph1 ():
    G = {}
    for i in range (N):
        v1 , v2 = input().split()
        for v, u in (v1, v2), (v2, v1)
            if v not in G:
                G[v] = {u}
            else:
                G[v].add(u)
```

Матриця суміжності неорієнтованого графа є симетричною. Усі петлі знаходяться на головній діагоналі. Степінь вершини — це сума одиниць в рядку.

Нехай N — порядок графа, M — розмір графа.

```
def input_graph2 ():
    V = []
    index = dict()
    A = [[0]*N for i in range (N)]
    for i in range (N):
        v1, v2 = input().split()
        for v in v1, v2:
```

```

if v not in index:
    V.append (v)
index[v] = len (V) - 1
v1_i = index [v1]
v2_i = index [v2]
A[v1_i][v2_i] = 1
A[v2_i][v1_i] = 1

```

У деяких випадках зручно зображувати зв'язки елементів у вигляді *зваженого графа*. Це граф, в якого кожному ребру (i, j) відповідає деяке число s_{ij} , яке називається *вагою* цього ребра. Іноді вага зображується деякою функцією. Така матриця суміжності у зважених графах називається *матрицею ваги*.

Якщо кожному елементу графа — вершинам чи дугам — задані деякі параметри чи характеристики, то такий граф є *мережею*. Найчастіше в задачах теорії графів у випадку сіткової моделі дуги відображують функції, які показують їх пропускні спроможності s_{ij} , особливо це стосується задач транспортного типу. Якщо деяка величина α_i є параметром i -ї вершини, то ця величина називається *інтенсивністю* вершини. Якщо $\alpha_i > 0$, то i -а вершина називається *джерелом*, якщо $\alpha_i < 0$ — *стоком*, якщо $\alpha = 0$, то така вершина є *нейтральною*.

Потоки на мережах. Поняття розрізу

Якщо у мережі задані пропускні спроможності усіх дуг (i, j) , то *поток* називається функція, що відображує (i, j) — дугу числом x_{ij} , що відповідає властивостям

$$0 \leq x_{ij} \leq s_{ij}, \quad (1)$$

$$\sum_i x_{ik} - \sum_j x_{kj} = 0, \forall k \neq s, t; k \in I, \quad (2)$$

$$\sum_j x_{ik} - \sum_i x_{it} = v, i, j \in I. \quad (3)$$

Умова (1) означає, що потік x_{ij} не повинен перебільшувати величину s_{ij} для (i, j) -дуги; умова (2) означає, що для будь-якої проміжної вершини мережі обсягу продукту (ресурсу), який входить до цієї вершини, має дорівнювати обсягу продукту, який виходить із цієї вершини; умова (3) означає, що загальна кількість продукту v , яка виходить з початкової вершини s мережі, дорівнює загальній кількості продукту, яка входить у кінцеву вершину t . Ця кількість є величиною потоку мережі і називається *потужністю* потоку.

Визначимо поняття розрізу мережі.

Розглянемо мережу з одним джерелом та одним стоком t . У такій мережі множину її вершин I можна розбити на дві підмножини так: $S \cup S' = I, S \cap S' = \emptyset, s \in S, t \in S'$.

Таке розбиття мережі відображується так званим *розрізом*, який розділяє джерело від стоку за допомогою множини (S, S') . У такий розріз входять усі дуги, що виходять з вершин $i \in S'$ і входять до вершин $j \in S'$.

Пропускна спроможність розрізу дорівнює сумі пропускних спроможностей дуг, які складають цей розріз, і називається *величиною розрізу*. Запис його такий:

$$s(S, S') = \sum_{i \in S, j \in S'} S_{ij} = \sum_{i, j \in (S, S')} S_{ij}.$$

Для будь-якого розрізу $x(S, S')$ загальна величина потоку дорівнює $v = \sum_{i, j \in (S, S')} x_{ij}$ і не повинна перебільшувати пропускної спроможності, тобто величини розрізу $v = x(S, S') \leq s(S, S')$, тому що $x_{ij} \leq S_{ij}$.

Приклад наведено на рис. 5.

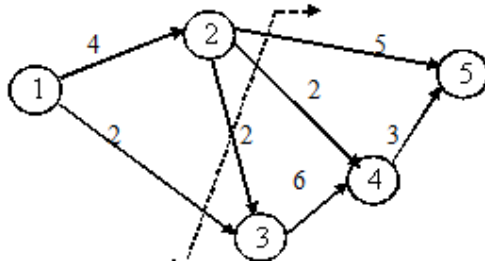


Рис. 5

До означеного розрізу з $S = \{1, 2\}$ та $S' = \{3, 4, 5\}$ входить множина дуг $(S, S') = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$, при цьому пропускна спроможність дорівнює $s(S, S') = S_{13} + S_{23} + S_{24} + S_{25} = 2 + 2 + 2 + 5 = 11$.

Дерево як вид графу

Граф називається **зв'язним**, якщо будь-яка пара вершин з'єднана маршрутом. Зв'язний граф без циклів називається **деревом**.

Нехай задано граф $G(X, A)$.

Остовним підграфом G_p називають граф, який має ту ж кількість вершин, що і граф G , а множина ребер графа G_p є підмножиною множини ребер графа G .

Породженням підграфом G_s називають граф, множина вершин якого X_s є підмножиною множини вершин графа G , а множина ребер графа G_s містить ті ребра графа G , початкова та кінцева вершини яких належать множині X_s .

Підграфом G_k називають граф, множина вершин якого X_k є підмножиною множини вершин графа G , а множина ребер графа G_k є підмножиною множини ребер графа G .

Ациклічний неорієнтований граф називають лісом. Зв'язний ациклічний неорієнтований граф називають деревом без визначеного кореня.

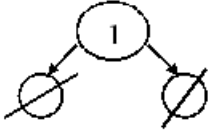
Для дерева без визначеного кореня справедливі такі властивості:

1. Для будь-яких двох вершин G існує єдиний простий шлях, що з'єднує їх.
2. Граф G перестав бути зв'язним, якщо видалити будь-яке його ребро.
3. Додавання до графу довільного ребра призводить до втрати ним властивості ациклічності;
4. Кількість ребер на одиницю менша за кількість вершин у графі:

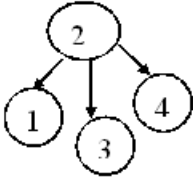
$$|A| = |X| - 1.$$

Якщо виділити якусь вершину у дереві без вибраного кореня, то отримаємо дерево з коренем, або кореневе дерево, або просто дерево. Виділену вершину називають коренем дерева. Нехай r — корінь дерева, x — довільна вершина. Тоді існує єдиний шлях від r до x . Усі вершини, які містяться на цьому шляху, називають предками вершини x . Якщо для будь-яких двох вершин x, y справедливо, що y є предком для x , то тоді x є нащадком y . Якщо ці вершини ще й суміжні, то їх називають відповідно батьком та сином. Усі діти одного батька називатимемо братами. Кількість дітей вибраної вершини називатимемо її ступенем. Якщо у вершини відсутні діти, то таку вершину називатимемо листком. Для вибраної вершини довжина шляху від неї до кореня визначає глибину цієї вершини. Максимальну **глибину** вершин дерева називають висотою цього дерева.

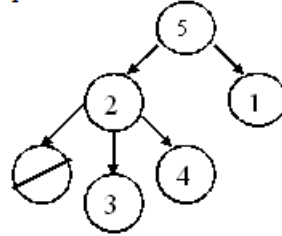
Приклад1:-дерево складається тільки з вершини



Приклад2:



Приклад3:



Кількість вершин, які підпорядковуються даній, називаються степенем даної вершини.

В дереві є коренева вершина, яка не підпорядковується іншій.

Довжиною шляху від кореневої вершини до вершин X називається кількість ребер, яку треба пройти, щоб потрапити у вершину X .

Коренева вершина знаходиться на нульовому рівні.

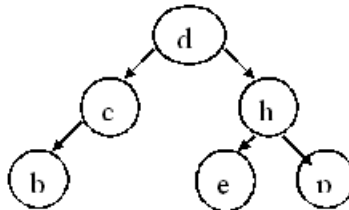
Вершини, довжина шляху до яких рівна 1, утворюють перший рівень.

Вершини, довжина шляху до яких рівна 2, утворюють другий рівень і т.д.

Дерева, степінь кожної вершини яких не перевищує 2, називають двійковими.

Розглянемо структуру:

0 рівень—d;
1 рівень—c, h;
2 рівень—b, e, p.



Обхід в глибину

1. Виділення компоненти зв'язності графа.

```
def dfs (vertex, G):  
    used = {}  
    used.add (vertex)
```

```

        for neighbour in G[vertex]:
            if neighbour not in used:
                dfs(neighbour, G)

    print(used)
    return used

G = {}
N = 5
for i in range (N):
    v1 , v2 = input ().split()
    for v, u in (v1, v2), (v2, v1) :
        if v not in G:
            G[v] = {u}
        else:
            G[v].add(u)

dfs(1,G)

```

2. Підрахунок кількості компонент зв'язності

```

n = int (input ())
A = []
Visited = [False] * n
for i in range (n):
    A.append ([int (x) for x in input (). split()])
def DFS (v):
    Visited [v] = 1
    for i in range (n):
        if A[v][i] == 1 and not Visited [i]:
            DFS (i)

Ans = 0
for i in range (n):
    if not Visited [i]:
        Ans +=1
        DFS (i)

print (Ans)
# ---- текст -----
## 5
00011
00010
00010
11100
10000
1

```

РОЗДІЛ 9. ІМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Метод статистичних випробувань

Метод статистичних випробувань — це числовий метод математичного моделювання випадкових величин, який передбачає безпосереднє включення випадкового фактора в процес моделювання і є його істотним елементом. Вплив випадкових факторів на систему моделюється за допомогою випадкових чисел. Результатом моделювання є випадкові процеси або величини, які характеризують систему, що моделюється. Щоб їх імовірнісні характеристики (імовірність деяких подій, математичне сподівання, дисперсія випадкових величин, імовірності попадання випадкової величини в задану область та ін.) співпадали з аналогічними параметрами реальної системи або процесу під час моделювання потрібно отримати велику кількість реалізацій випадкових величин або процесів. Таким чином, метод полягає в багатократному проведенні випробувань побудованої ймовірнісної моделі і подальшій статистичній обробці результатів моделювання з метою визначення шуканих характеристик розглядуваного процесу у вигляді оцінок його параметрів. Точність оцінок цих параметрів визначає ступінь наближення розв'язку задачі до ймовірносних характеристик.

На практиці метод статистичних випробувань доцільно використовувати в таких випадках, коли:

- розв'язувати задачу цим методом простіше, ніж будь-яким іншим;
- досліджується система, функціонування якої визначається багатьма ймовірнісними параметрами елементарних явищ;
- важко або неможливо побудувати аналітичну ймовірнісну модель системи.

Важливою властивістю цього методу є те, що для звичайних числових методів обсяг обчислень зростає в разі збільшення розмірності задачі приблизно як показникова функція розмірності задачі, а для методу статистичних випробувань — лише як лінійна функція розмірності.

Незалежно від типу досліджуваної моделі системи, застосовуючи метод статистичних випробувань, необхідно виконати такі кроки.

1. Визначити, що таке є кожне випробування і зазначити, яке випробування буде успішним, а яке — ні.

2. Обчислити кількість випробувань, які необхідно провести, щоб отримати результати із заданою точністю, і провести ці випробування.

3. Виконати статистичну обробку результатів випробувань та обчислити оцінки необхідних статистичних характеристик.

4. Проаналізувати точність отриманих статистичних характеристик.

Така послідовність кроків є обов'язковою під час розв'язування будь-якої задачі за допомогою методу статистичних випробувань. Однак конкретний зміст цих кроків залежить від поставленого завдання та типу досліджуваної системи. У цьому разі метод завжди потребує використання генераторів випадкових чисел із заданим законом розподілу.

У методі статистичних випробувань особливе значення відіграють випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0, 1]$. Найважливіша їх властивість полягає в тому, що за їх допомогою можна отримати вибіркові значення, які мають будь-який інший розподіл, або промодельовати випадковий процес з різними статистичними властивостями.

Отже, для використання методу статистичних випробувань необхідні певні можливості, а саме:

✓ генерувати випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0, 1]$;

✓ описувати модельовані випадкові явища функціями розподілу ймовірностей та ймовірнісними процесами;

✓ мати методи отримання випадкових величин функцій розподілу ймовірностей (дискретних і неперервних), які базуються на випадкових числах, рівномірно розподілених у інтервалі $[0, 1]$;

✓ оцінювати статистичні характеристики випадкових величин з отриманих за допомогою методу статистичних випробувань чисел вибіркової послідовності;

✓ визначати точність отриманих статистичних оцінок як функцій від числа випробувань.

Випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0, 1]$, мають дві основні властивості:

1. Якщо r_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) — випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0; 1]$, то їх кумулятивний розподіл F (за визначенням $F(r_i) = P, (r_i < r)$), задовольняє співвідношення:

$$F(r_i) = \begin{cases} r_i, & \text{якщо } 0 \leq r_i \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } r_i < 0, \forall i, \\ 1, & \text{якщо } r_i > 1, \forall i. \end{cases}$$

Слід зауважити, що теоретично ці випадкові числа повинні бути вибірковими значеннями неперервної величини з функцією щільності, визначеною таким чином: $f(r) = \begin{cases} 1, & \text{для всіх } 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & \text{для всіх інших значень.} \end{cases}$

Насправді ж під час комп'ютерного моделювання використовуються тільки дискретні значення, в яких після десяткової коми є фіксована кількість десяткових знаків.

2. Випадкові числа r_1, r_2, \dots, r_n є незалежними, якщо їх сумісний кумулятивний розподіл G можна подати як добуток окремих функцій розподілу: $G(r_1, r_2, \dots, r_n) = F_1(r_1) F_2(r_2) \dots F_n(r_n)$, або, враховуючи, що n випадкових чисел мають однакові розподіли, можна записати: $G(r_1, r_2, \dots, r_n) = F(r_1) F(r_2) \dots F(r_n)$.

Методи генерування випадкових чисел, рівномірно розподілених у інтервалі $[0; 1]$, буде описано нижче.

Розглянемо кілька задач, для розв'язування яких можна застосувати метод статистичних випробувань.

Приклад 1. Необхідно знайти площу фігури (рис. 1), обмежену функцією $y = f(x)$ та осями координат Ox і Oy .

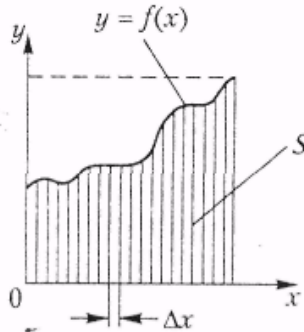


Рис. 1. Схема обчислення інтеграла

У числових методах для інтегрування використовується наближене зображення інтеграла у вигляді квадратурної формули. Одним із

найпростіших є метод прямокутників. У разі використання методу прямокутників інтеграл апроксимується формулою $S = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$.

Ця формула і є формулою числового інтегрування. Чим більша кількість інтервалів n і менший крок Δx , тим точніше можна обчислити площу S .

Тепер покажемо, як можна розв'язати цю задачу за допомогою методу статистичних випробувань. Спочатку пронормуємо функцію $y = f(x)$ так, щоб уписати її в одиничний квадрат. Припустимо, що ξ — деяка випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $[0; 1]$. Тоді ймовірність попадання значення ξ у будь-який відрізок $[a; b] \in [0; 1]$ буде залежати тільки від довжини відрізка $[a; b]$, а не від місця його розташування в інтервалі $[0; 1]$, тобто ймовірність того, що вибіркове значення випадкової величини ξ , потрапить у деякий відрізок $0 \leq a \leq b \leq 1$, дорівнюватиме довжині цього відрізка:

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b d\xi = b - a.$$

Будемо використовувати одне значення випадкової величини ξ , для визначення координати x_i а друге — для визначення координати y_i . Таким чином, пара значень випадкової величини ξ задаватиме на площині точку з координатами $(x_i; y_i)$. Імовірність попадання цієї точки в деяку область одиничного квадрата пропорційна площі цієї області та не залежить від місця розташування області в одиничному квадраті.

Проведемо N випробувань. Випробування будемо вважати успішним, якщо точка з координатами $(x_i; y_i)$ потрапить в область під кривою $y = f(x)$ або на неї. Підрахуємо кількість успішних випробувань, позначимо їх через m і визначимо частість успішних випробувань — m/N . У разі збільшення кількості випробувань ця величина наближається до ймовірності попадання точки в заштриховану область $P = S/S_{од.кв.} = S \approx m/N$, де $S_{од.кв.}$ — площа одиничного квадрата. Таким

чином, згідно з теоремою Бернуллі $\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{N} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$.

У разі прямування кількості випробувань N до нескінченності частість успішних випробувань буде відрізнятися від імовірності p на нескінченно малу величину ε . Отже, можна вважати, що m/N — наближене значення шуканої площі S .

Цей приклад демонструє те, як метод статистичних випробувань може бути використано під час розв'язування детермінованих задач. На практиці такий підхід використовується для знаходження площ або об'ємів деяких багатовимірних фігур, які утворюються у випадку перетину різних геометричних тіл. У цьому разі число випробувань N , які необхідно провести для обчислення площі або об'єму, не залежить від кратності визначеного інтеграла.

Приклад 2. Припустимо, що чотири стрільці одночасно стріляють у рухоми ціль. Імовірність влучення в ціль кожним стрільцем дорівнює 0,5. Ціль вважається враженою, якщо в неї влучило два або більше стрільців. Потрібно знайти ймовірність ураження цілі.

Використовуючи методи теорії ймовірностей, цю задачу досить легко розв'язати аналітично. Дійсно, імовірність ураження цілі одним пострілом $p_{\text{вр}} = 1 - p_{\text{невр}}$, де $p_{\text{невр}}$ — імовірність того, що ціль не буде вражена взагалі, визначається за формулою

$$p_{\text{невр}} = 0,5^4 + C_4^1 0,5^1 0,5^3 = 0,5^4 + 4 0,5^1 0,5^3 = 0,3125.$$

Звідси ймовірність ураження цілі

$$p_{\text{вр}} = 1 - p_{\text{невр}} = 1 - 0,3125 = 0,6875.$$

Тепер покажемо, як розв'язати цю задачу за допомогою методу статистичних випробувань. Процедура розіграшу можна реалізувати, одночасно підкидаючи чотири монети. Для моделювання підкидання однієї монети використовується одне значення r_i . Якщо $r_i < p$, вважаємо, що монета падає лицевим боком, і, таким чином, стрілець влучив у ціль. Інакше вважаємо, що стрілець промахнувся. Одне випробування — це підкидання чотирьох монет. Зробимо N випробувань і позначимо через m число успішних випробувань (дві або більше монет упали лицевим боком, що свідчить про те, що в ціль улучило два або більше стрільців). Тоді, згідно з теоремою Бернуллі, $p_{\text{вр}} = m/N$. У разі значного збільшення числа випробувань N і при будь-якому значенні ε частість враження цілі буде збігатися до ймовірності $p_{\text{вр}} = 0,6875$.

Приклад 3. Розглянемо більш складну задачу, яку розв'язати аналітично досить важко. Нехай є деяка ціль довільної форми загальною площею S , на яку бомбардувальники скидають n бомб. Площа враження кожної бомби — це круг з радіусом R (рис. 2). Ціль вважається враженою, якщо зруйновано K відсотків її площі S . Необхідно знайти ймовірність ураження цілі.

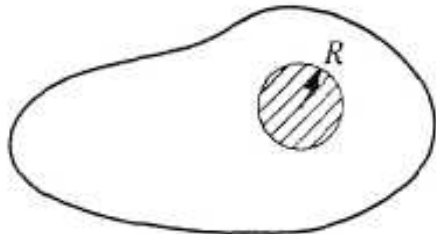


Рис. 2. Схематичне зображення враження цілі бомбою

Для цього розглянемо область улучення бомб. За допомогою генератора випадкових чисел отримаємо координати падіння n бомб. Біля кожної точки падіння опишемо коло радіусом R (див. рис. 3) і визначимо площу враження, яку заштриховано на рисунку. Площу враження можна легко обчислити, використовуючи методи геометрії. Якщо площа враження становить K відсотків (або більше) загальної площі цілі S , то ціль вважається враженою, а випробування — успішним. Інакше ціль вважається неураженою, а випробування — неуспішним.

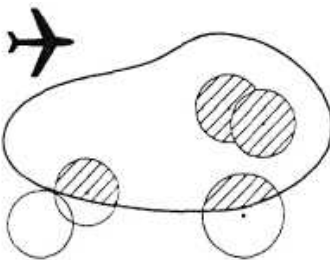


Рис. 3. Схематичне вирішення задачі

Проведемо N випробувань, моделюючи кожного разу координати n точок падіння бомб, і підрахуємо кількість випробувань, під час яких ціль була враженою. Тоді, згідно з теоремою Бернуллі, ймовірність враження цілі визначається за формулою $p_{вр} \approx m/N$, де m — кіль-

кість випробувань, за яких ціль була вражена. Оцінку математичного сподівання площі враження цілі можна визначити як $\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i$, де S_i — площа враження під час i -го випробування. Згідно із законом великих чисел, якщо $N \rightarrow \infty$, то оцінка буде наближатися до математичного сподівання.

За допомогою методу статистичних випробувань можна обчислити будь-які характеристики випадкових величин і процесів. Крім того, цей метод можна застосовувати для розв'язування не тільки ймовірнісних, а й детермінованих задач. Але під час його застосування слід пам'ятати, що для отримання результату з наперед заданою точністю необхідно провести велику кількість випробувань, для чого потрібні довгі послідовності випадкових чисел.

Генератори випадкових чисел

Найбільше прикладів генерування випадкових чисел можна знайти в ігровому бізнесі. Це номери в спортивних лотереях, числа, які випадають на рулетці, варіанти розкладу карт тощо. Більшість комп'ютерних ігор теж базується на випадкових числах.

1. Типи генераторів

Без комп'ютера використання випадкових чисел, передбачене методом статистичних випробувань, не має сенсу, тому генератори випадкових чисел повинні бути безпосередньо з'єднані з комп'ютером. Це можна зробити за допомогою апаратних приставок до комп'ютера (апаратні методи) або спеціальних програм (програмні методи). Крім того, під час моделювання можна використати готові таблиці випадкових чисел, які слід розміщати в пам'яті комп'ютера або на зовнішньому накопичувачі.

Апаратні методи генерування випадкових чисел базуються на використанні деяких фізичних явищ (наприклад, шумів електронних приладів, радіоактивного випромінювання та ін.). Під час застосування апаратних генераторів випадковий електричний сигнал перетворюють у двійковий код, який уводиться в комп'ютер за допомогою спеціальних аналого-цифрових перетворювачів. Один з найбільш поширених методів — це використання шумів електронних приладів. Якщо на підсилювач не подавати ніякого сигналу та увімкнути його на повну потужність, то буде чути шипіння (шум). Це і є шум електронних

елементів підсилювача, який є випадковим процесом. Цей неперервний сигнал можна перетворити в дискретний. Існують різні схеми перетворення випадкового сигналу в послідовність двійкових цифр. У більшості випадків його підсилюють і встановлюють граничне значення напруги шумового сигналу, перевищення якого можна вважати значенням двійкової одиниці на деякому малому проміжку часу t . У протилежному випадку отримуємо двійковий нуль. Для отримання m -розрядного випадкового двійкового числа провадиться m вимірювань неперервного сигналу у фіксовані моменти часу t_1, t_2, \dots, t_m .

Вбудовані в комп'ютери апаратні генератори випадкових чисел останнім часом часто використовуються в системах захисту інформації. Прикладом застосування таких генераторів для забезпечення конфіденційності, цілісності та достовірності електронної інформації, яка зберігається в комп'ютері або передається по мережі, є пристрій для шифрування даних PadLock, інтегрований у деякі моделі процесорів, розроблених компанією Intel. Пристрій має інтерфейс прикладного рівня, що дає змогу розробникам програмного забезпечення отримувати випадкові числа без використання програмних драйверів. Такий спосіб отримання високоякісних випадкових послідовностей простіший та ефективніший, ніж використання апаратно-програмної RNG (Random Number Generator) архітектури і суто програмних генераторів, що особливо важливо під час побудови захищених і криптографічних програм.

Табличний метод. У 1955 році корпорація «Ренд» опублікувала таблиці випадкових чисел, які мали мільйон значень. Для заповнення цих таблиць застосовувались апаратні методи. Дані цих таблиці, можна використовувати під час моделювання систем за допомогою методу статистичних випробувань. У сучасних комп'ютерах ці таблиці можна зберігати на зовнішніх носіях або навіть в основній пам'яті. Головним недоліком табличного методу є те, що під час його використання витрачаються значні об'єми основної пам'яті комп'ютера.

Найбільш розповсюдженими на практиці є *програмні генератори*, які дають змогу отримувати послідовності *випадкових чисел* за рекурентними формулами. Якщо бути абсолютно точним, то числа, які виробляють програмні генератори, насправді є *псевдовипадковими* («псевдо» у перекладі з грецької — *нібито*). Так їх називають тому, що алгоритми їх отримання завжди є детермінованими.

Загалом же програмні генератори повинні задовольняти таким вимогам:

- ✓ генерувати статистично незалежні випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0, 1]$;
- ✓ мати можливість відтворювати задані послідовності випадкових чисел;
- ✓ затрати ресурсів процесора на роботу генератора повинні бути ьмінімальними;
- ✓ легко створювати незалежні послідовності випадкових чисел (потоки).

Слід звернути увагу на те, що більшість програмних генераторів виробляють випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0; 1]$. Необхідність моделювання таких чисел обумовлена тим, що на їх основі можна отримати випадкові числа практично будь-яких розподілів. Потрібно також мати на увазі, що випадкові числа, які виробляють програмні генератори, є *квазірівномірно* розподіленими («квазі» у перекладі з латинської — *майже*). Причина в тому, що вони створюються комп'ютером, кількість двійкових розрядів якого обмежена, і за його допомогою можна зобразити тільки дискретні (а не неперервні) значення з діапазону від 0 до 1.

Якість роботи генераторів визначається статистичними властивостями послідовностей випадкових чисел, які він виробляє, — незалежністю і випадковістю. Властивості послідовностей перевіряються за статистичними критеріями, детально описаними нижче.

Здатність відтворення послідовності випадкових чисел полягає в тому, що за однакових початкових умов і параметрів генератор повинен відтворювати одні й ті ж послідовності псевдовипадкових чисел. Ідентичні послідовності випадкових чисел рекомендується використовувати у випадку, коли потрібно порівняти альтернативні варіанти систем, що моделюються, і налагодити програми. Однак можливість відтворення не завжди бажана під час моделювання систем і в комп'ютерних іграх (як це було в перших версіях відомої гри «Тетріс», коли кожна гра починалась з тієї ж послідовності фігур). Для усунення такого недоліку початкові значення величин, необхідних для запуску програмного генератора, рекомендується брати з таймера комп'ютера.

Під час дослідження складних систем виникає необхідність у моделюванні послідовностей випадкових чисел великої довжини. Для їх

створення потрібні швидкодіючі алгоритми генерування з мінімальними вимогами до ресурсів комп'ютера. Інколи дослідники з невеликим досвідом роботи використовують під час моделювання складних систем один і той же генератор, звертаючись до нього з різних місць програми. Однак це часто призводить до того, що процес моделювання швидко вироджується у зв'язку з виходом псевдовипадкової послідовності за межі аперіодичності. Тому для моделювання різних випадкових факторів бажано мати окремі послідовності (набори значень), які відтворювались би одним і тим же генератором, але за різних значень параметрів.

У більшості генераторів псевдовипадкових чисел x , використовується рекурентна процедура $x_{i+1} = f(x_i)$. Найпростішим та найдавнішим серед таких генераторів є генератор фон Неймана та Метрополіса, робота якого базувалась на методі середин квадратів. Пояснімо суть цього методу.

Зобразимо умовно довільне чотирирозрядне десяткове число як x x x x . Піднесемо це число до квадрату і в отриманому результаті відкинемо по дві цифри зліва і справа:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad x \ x \ x \ x \\
 \quad \quad \times \quad x \ x \ x \ x \\
 \hline
 x \ x \mid \quad \times \quad x \ x \ x \ x \quad \mid \quad x \ x \\
 \quad \quad \times \quad \quad \quad \times \quad x \ x \ x \ x \\
 \hline
 \end{array}$$

Чотири цифри, які залишились, і є новим випадковим числом. Якщо результатом множення є число з кількістю цифр менше восьми, зліва дописуються додаткові нулі. Реалізувати програмно цей генератор дуже просто, але він має ряд вад:

- ✓ якщо початкове число парне, то може відбутися виродження послідовності, тобто починаючи з деякого значення всі наступні дорівнюватимуть нулю (спробуйте взяти як початкове число 4500);
- ✓ числа, які виробляє генератор, є сильно корельованими.

2. Лінійні конгруентні генератори

Зважаючи на ці вади, на практиці використовують більш складні програмні генератори. У більшості сучасних програмних генераторів використовується властивість *конгруентності*, яка полягає в тому, що два цілих числа A і B є конгруентними за модулем m , якщо їх різниця

$(A - B)$ є числом, яке ділиться на m без остачі (тобто є кратним m). Записують це так: $A = B \pmod{m}$.

Наприклад, щоб знайти число, конгруентне з числом 134 за модулем 10, необхідно знайти цілочислову *остачу* від ділення 134 на 10, яка дорівнює 4.

Наведемо кілька прикладів обчислення конгруентних значень для різних m : $12 = 5 \pmod{7}$; $35 = 5 \pmod{10}$; $125 = 5 \pmod{10}$.

Серед методів генерування випадкових чисел найбільш поширеним є лінійний мультиплікативний конгруентний метод:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \pmod{m}, \quad (1)$$

де $i = 1, 2, \dots$; a , c і m — цілі константи. Щоб отримати нове число, необхідно взяти псевдовипадкове число x (або задати вихідне x_0), помножити його на коефіцієнт a , додати константу c і взяти модуль отриманого числа за m , тобто розділити на m , і отримати остачу. Ця остача і буде наступним псевдовипадковим числом x_{i+1} . У разі правильного підбору параметрів цей генератор повертає випадкові числа від 0 до $m - 1$.

Отримані за формулою (1) значення x_{i+1} належать до діапазону $0 < x_{i+1} < m - 1$ і мають рівномірний дискретний розподіл. Для того щоб отримати випадкове значення r_{i+1} з інтервалу $[0; 1]$, необхідно число x_{i+1} розділити на m . У цьому разі всі значення m , c , a , x_0 повинні бути додатними й задовольняти умови: $0 < m$; $a < m$; $c < m$; $x_0 < m$. Отриману за формулою (1) послідовність називають *лінійною конгруентною послідовністю*.

Однією із вад лінійних конгруентних генераторів є те, що отримані випадкові числа x_{i+1} суттєво залежать від значень m , c , a , x_0 і обчислюють за однією й тією ж формулою (1), тобто не є абсолютно випадковими. Але незважаючи на те, що алгоритм їх отримання є детермінованим, за умови відповідного вибору констант m , c , a послідовність чисел x_{i+1} , на основі яких отримують значення r_{i+1} , повністю задовольнятиме більшості статистичних критеріїв.

Ще одна вада цих генераторів стосується того, що випадкові числа r_{i+1} , отримані за допомогою генератора, можуть приймати тільки дробово-раціональні значення — 0 ; $1/m$; $2/m$; ...; $(m - 1)/m$. Більше того, числа r_{i+1} можуть приймати лише деякі з указаних значень залежно

від вибраних параметрів m , c , a і x_0 , а також від того, як реалізується операція ділення чисел з плаваючою комою на число m у комп'ютері, тобто залежно від типу комп'ютера і системи програмування. Наприклад, якщо $m = 10$, $x_0 = a = c = 7$, то отримаємо послідовність 7; 6; 9; 0; 7; 6; 9; 0, ..., яка не є випадковою. Це свідчить про важливість правильного вибору значень констант m , c , a і x_0 . Правильно дібрані значення іноді називають *магічними числами*.

Наведений приклад ілюструє й те, що конгруентна послідовність завжди є циклічною, тобто вона починає повторюватися через певну кількість випадкових чисел. Кількість значень, після яких випадкові числа починають повторюватися, називається *повним періодом* генератора і є основним його параметром. Значення повного періоду залежать від розрядності комп'ютера, а також від значень m , c , a і x_0 . Існує теорема, яка визначає умови існування повного періоду генератора, а саме:

- ✓ числа c і m повинні бути взаємно простими, тобто мати взаємний дільник 1;
- ✓ значення $b = a - 1$ має бути кратним q для кожного простого q , бути дільником m ;
- ✓ значення b має бути кратним 4, якщо m кратне 4.

Якщо $c > 0$, то генератор називається *мішаним*, а якщо $c = 0$ — *мультиплікативним*.

Розглянемо, як потрібно вибирати параметри лінійного конгруентного генератора, щоб отримати послідовність з повним періодом. Для отримання такої послідовності необхідно вибирати значення $m = 2^g - 1$, де g — довжина розрядної сітки комп'ютера. Для 32-розрядного комп'ютера m — найбільше ціле число, яке може бути відтворене в ньому, дане число дорівнює $2^{31} - 1 = 2147483647$ (один розряд відводиться під знак числа). У цьому разі ділення x_{i+1}/m виконувати не обов'язково. Якщо в результаті роботи генератора буде отримане число x_{i+1} , яке більше ніж те, що може бути відтворене в комп'ютері, виникне переповнення розрядної сітки. Це призведе до втрати крайніх лівих двійкових знаків цілого числа, які перевищили допустимий розмір. Однак розряди, що залишилися, саме і є значеннями $x_{i+1} \pmod{2^g}$. Таким чином, під час генерування замість операції ділення можна скористатися переповненням розрядної сітки.

Стосовно константи c теорема стверджує, що для отримання послідовності з повним періодом генератора значення c повинне бути непарним, і, крім того, $a - 1$ має ділитися на 4. Для такого генератора початкове значення x_0 може бути довільним і лежати в діапазоні від 0 до $m - 1$. Якщо $c = 0$, то отримуємо мультиплікативний конгруентний метод, який передбачає використання таких рекурентних виразів:

$$x_i = ax_i \pmod{m}. \quad (2)$$

Цей метод більш швидкодіючий, ніж попередній, але він не дає послідовності з повним періодом. Дійсно, з виразу (2) видно, що значення $x_{i+1} = 0$ може з'явитись тільки в тому випадку, якщо послідовність вироджується в нуль. Взагалі, якщо d — будь-який дільник m і x_i кратне d , всі наступні елементи мультиплікативної послідовності x_{i+1}, x_{i+2}, \dots будуть кратними d . Таким чином, якщо $c = 0$, потрібно, щоб x_i і m були взаємно простими числами з m і знаходились між 0 і m .

Що стосується вибору a , то у випадку, коли $m = 2^g$, де $g > 4$, то $a \equiv 3 \pmod{8}$ або $a \equiv 5 \pmod{8}$.

У цьому випадку четверта частина всіх можливих значень множників дає довжину періоду, що дорівнює $m/4$, яка й буде максимальним періодом генератора.

Наведемо одну з найкращих програм генерування послідовностей рівномірно розподілених випадкових чисел.

```

/* Програма мовою C для TT800 */
/* M. Matsumoto, email: matumoto@math.keio.ac.jp */
/* genrand() генерує одне псевдовипадкове число */
/* з подвійною точністю */
/* рівномірно розподілене в інтервалі [0. 1] */
/* для кожного запиту. Можна вибирати будь-які */
/* 25 початкових значень */
/* окрім всіх нулів. */
/* Див.: ACM Transactions on Modelling and Computer Simulation.
*/ /* Vol. 4. No. 3. 1994. pages 254-266. */
#include #define N 25 #define M 7
double
genrand()
{
unsigned long y; static int k = 0:

```



```

static unsigned long x[Nj-1] /* Початкові 25 значень за бажанням */
0x95f24dab, 0x0b685215, 0xe76c8ae7, 0xaf3ec239, 0x715fad23,
0x24a590ad, 0x69e4b5ef, 0xbf456141, 0x96bclb7b, 0xa7bdf825,
0xcde75b7, 0x8653a9c9, 0x2da87693, 0xb657f9dd, 0xffdc8a9f,
0x8121da71, 0x8b823ecb, 0x885d05f5, 0x4e20cd47, 0x5a9ad5d9,
0x512c0c03, 0xea557ccd, 0x4ccld30f, 0x8891a8al, 0xa6b7aad

};
static unsigned long mag01[2]={
0x0 0x8ebfd028 /* Це чарівний вектор 'a', що не змінюється*/
};
if (k==N) { /* Генерування N слів одночасно */
int kk;
for (kk=0;kk> 1) * mag01[x[kk] % 2]:
}
for (: kk> 1) ^ -ag01[x[kk] % 2]:
}
k=0: }
У - x[k];
у ^= (у << 7) & 0x2b5b2b1t; /* s i b. чарівні вектори*/
у ^= (у << 15) & 0xdb8b0000; /* t i c. нарізні вектори */
у &= 0xffffffff; /* вилучить цей рядок, якщо довжина слова = 32 */
/* Наступний рядок був доданий в версії 1996 р. для зменшен-
ня кореляції. */
у ^= (у >> 16); /* Додати для версії 1994 р. */
к++;
returnt ((double) у / (unsigned long) 0xffffffff);
}
/*main() виводить перші 50 згенерованих чисел */
main()
{ int j;
for (j=0; j<50; j++) {
printf("%5f ", genrand());
if (j%8==7) printf("\n");
}
print("\n");
}

```

Існують й інші конгруентні методи генерування випадкових чисел, серед яких слід відзначити адитивний.

Найпростіший генератор, послідовність якого x_{i+1} залежить більше ніж від одного з попередніх значень, — це генератор, що використовує числа Фібоначчі: $x_{i+1} \equiv (x_i + x_{i-1}) \pmod{m}$.

Цей генератор широко використовувався в 50-ті роки ХХ століття, але, як показали подальші дослідження, статистичні властивості його досить низькі. Більш складні методи генерування випадкових чисел можна знайти в праці.

Розглянуті в цьому розділі методи генерування випадкових чисел не стосуються дослідників, які використовують мови або пакети моделювання. Ці засоби містять вбудовані генератори випадкових чисел, якість яких залежить від розробників цих програмних засобів. На жаль, є ще багато пакетів моделювання, в яких застосовуються генератори досить низької якості. Що стосується мов програмування загального призначення, то засоби генерування випадкових чисел, вбудовані в них, взагалі не задовольняють будь-яким статистичним критеріям. Тому їх не слід використовувати під час проведення відповідальних досліджень.

Перевірка послідовностей випадкових чисел

Статистичні властивості всіх послідовностей випадкових чисел, які будуть використовуватись під час проведення досліджень, потрібно ретельно перевіряти. Для цього застосовують емпіричні та теоретичні критерії.

Емпіричні критерії — це звичайні тести, в яких під час обчислення статистичних даних використовують вибіркові значення що виробляються генератором.

Теоретичні критерії не є тестами в тому розумінні, в якому вони передбачаються в математичній статистиці. У разі їх використання не потрібна послідовність випадкових значень. Глобальна оцінка властивостей генератора формується на основі числових значень його параметрів. Теоретичні критерії визначають характеристики послідовності за допомогою методів, які ґрунтуються на рекурентних правилах створення послідовності.

Відомо одинадцять емпіричних критеріїв, що застосовуються для перевірки статистичних властивостей послідовностей дійсних чисел r_i , $i = 1, 2, \dots$, які вважаються незалежними та рівномірно розподіленими в інтервалі $[0; 1]$.

Для оцінювання наближеності отриманого розподілу до рівномірного застосовують чотири типи тестів:

✓ *частотний* — з використанням або критерію Колмогорова — Смирнова, або критерію χ^2 ;

✓ *автокореляційний* — з вимірюванням кореляції між x_n і x_{n+k} , де k -зсув по послідовності ($k = 1, 2, 3, \dots$);

✓ *серіальний* — з фіксацією частоти появи всіх можливих комбінацій чисел і виконанням оцінювання за критерієм χ^2 ;

✓ *циклічний* — з перевіркою кількості циклів більше і менше деякої константи, за яку береться значення математичного сподівання із підрахунком істинного числа циклів різної довжини, що порівнюється за критерієм χ^2 з очікуваним числом циклів.

Серед інших критеріїв важливу роль відіграє *спектральний критерій*, який застосовується для перевірки конгруентних генераторів випадкових чисел. Вважається, що цей тест найбільш потужний. Спектральний тест використовують для перевірки гіпотези про рівність сумісних розподілів t послідовних елементів випадкової послідовності. Якщо задано послідовність $\{r_i\}$ з періодом m , то для перевірки за цим тестом необхідно проаналізувати множину всіх m точок $\{r_i, r_{i+2}, \dots, r_{i+t-1}\}$, $0 \leq i < m$ у t -вимірному просторі.

Моделювання випадкових подій та дискретних величин

У разі дослідження складних систем методом статистичних випробувань необхідно мати можливість отримувати за допомогою комп'ютера вибіркові значення випадкових величин, які мають різні закони розподілу. Випадкові величини зазвичай моделюють за допомогою перетворення одного або кількох незалежних значень випадкової величини R , рівномірно розподіленої в інтервалі $[0; 1]$, що позначаються як r_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ ($r_i \in [0; 1]$). Значення r_i генерують, як звичайно, за допомогою програмних генераторів випадкових чисел.

1. Незалежні випадкові події

Припустимо, що ймовірність настання деякої елементарної випадкової події A в одному випробуванні дорівнює $P(A) = p$. Вважається, що умови проведення кожного випробування однакові і його можна повторити нескінченну кількість разів. Якщо r_i — це значення рівно-

мірно розподіленої в інтервалі $[0; 1]$ величини, то можна стверджувати, що за умови $r_i \leq p$ (рис. 4) настане подія A , а якщо $r_i > p$, то відбудеться подія \bar{A} .

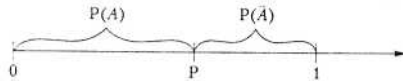


Рис. 4. Моделювання настання випадкових подій

Дійсно, якщо $f(r)$ — функція щільності рівномірно розподіленої випадкової величини r , то $P(r < p) = \int_0^p f(r)dr = p = P(A)$.

Ця модель добре описує такі події, як обслуговування вимоги в пристрої СМО, що може бути вільним або зайнятим, успішну або ні спробу виконання деякого завдання, влучення або ні в ціль, розгалуження потоків інформації у двох і більше напрямках. У деяких мовах для моделювання випадкової події використовується спеціальний блок.

2. Група несумісних подій

Нехай є група несумісних подій A_1, A_2, \dots, A_k , настання яких необхідно дослідити. Відомі ймовірності настання цих подій:

$p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), p_3 = P(A_3), \dots, p_k = P(A_k)$. Якщо події несумісні,

то $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Припустимо, що $p_0 = 0$. На відрізку $[0; 1]$ числової осі відкладемо значення цих імовірностей (рис. 5).

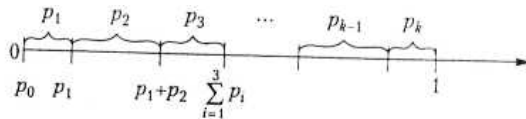


Рис. 5. Моделювання групи несумісних подій

Якщо отримане значення r_i потрапляє в інтервал від $\sum_{k=0}^{i-1} p_k$ до $\sum_{k=0}^i p_k$, вважаємо, що відбулася подія A_i . Цю процедуру називають визначенням результату випробування за жеребом, яка ґрунтується на формулі $P(\sum_{k=0}^{i-1} p_k < r_i < \sum_{k=0}^i p_k) = p_i = P(A_i)$, де $p_0 = 0$.

Ця модель часто використовується в теорії прийняття рішень і добре відтворює процеси вибору однієї з багатьох альтернатив у комп'ютерних іграх, розгалуження потоків інформації у вузлах мережі в кількох напрямках, вибір одного з багатьох пристроїв для обслуговування в СМО і т. ін.

3. Умовна подія

Умовна подія A — це подія, яка відбувається з імовірністю $P(A/B)$ тільки за умови, що настала подія B (рис. 6). У цьому разі має бути задана ймовірність $P(B)$ настання події B . Моделювання настання умовної події A провадиться таким чином. Спочатку випадкове число r_1 отримане від генератора випадкових чисел, використовується для моделювання настання події B . Подія B настає в тому випадку, якщо справджується нерівність $r_1 < P(B)$. Настання події A моделюється за допомогою числа r_2 . Для цього перевіряється умова $r_2 < P(A)$, за виконання якої приймається рішення, що подія A відбулася. Якщо ж подія B не відбулася (тобто настає подія \bar{B}), то настання події A моделювати не потрібно. Таким чином, можна скоротити загальну кількість випробувань.

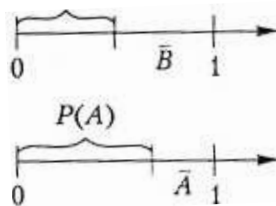


Рис. 6. Моделювання настання умовної події

4. Випадкова дискретна величина

Одне з основних понять теорії ймовірностей — дискретна випадкова величина X , яка набуває конкретних значень x_i з імовірністю p_i . Ці випадкові величини називають цілочисловими. Якщо можливі значення випадкової величини становлять скінчену послідовність, то розподіл ймовірностей випадкової величини визначають, задаючи значення x_1, x_2, \dots, x_n і відповідних їм ймовірностей p_1, p_2, \dots, p_n . Моделювання випадкової дискретної величини виконується аналогічно

моделюванню групи несумісних подій, тобто випадкову величину X подають як повну групу подій:

$$A_1 = (X = x_1), A_2 = (X = x_2), \dots, A_n = (X = x_n).$$

Для моделювання дискретної випадкової величини X зручно використовувати дискретну кумулятивну функцію. Для цього аналізують можливі значення випадкової величини X і будують гістограму розподілу можливих значень.

Побудову і використання кумулятивної функції розглянемо на прикладі моделювання процесу введення даних під час роботи текстового терміналу. У табл. 1 наведено результати, які відображають результати спостереження за об'ємом інформації, яка вводиться з терміналу під час обробки одного повідомлення.

Таблиця 1. *Результати спостереження за об'ємом введеної з терміналу інформації*

Кількість символів	Розподіл (частка повідомлень зазначеної довжини)	Кумулятивний розподіл (частка повідомлень зазначеної або меншої довжини)
Менше 6	Відсутній	Відсутній
6–10	0,390	0,390
11–15	0,214	0,604
16–20	0,186	0,790
21–25	0,140	0,930
26–30	0,070	1,000
Більше 30	Відсутній	1,000

На рис. 7 і 8 зображено відповідно гістограму та кумулятивну функцію розподілу наведених у табл. 1 даних.

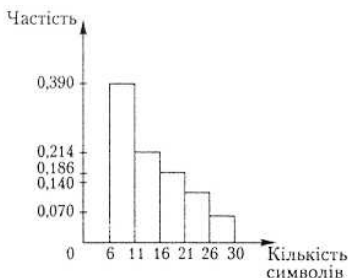


Рис. 7. Гістограма розподілу довжини повідомлень

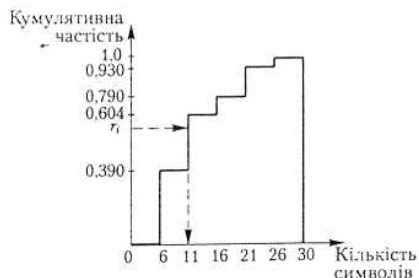


Рис. 8. Кумулятивна функція розподілу довжини повідомлень

Слід звернути увагу, що висота кумулятивної функції за заданих значень кількості символів дорівнює сумі значень, наведених на рис. 7. Для того щоб під час імітаційного моделювання роботи терміналу відтворити кількість символів, які вводяться з клавіатури, необхідно згенерувати випадкове число з діапазону від 0 до 1 (значення по вертикальній осі), а потім на горизонтальній осі визначити кількість уведених символів, які відповідають цьому числу. Наприклад, якщо випадкове число дорівнює 0,578 (див. рис. 8), то кількість символів, уведених з терміналу, можна прийняти таким, що дорівнює 11. Цей підхід ілюструє метод оберненої функції, згідно з яким спочатку генерується випадкове рівномірно розподілене число r_i , що задає значення кумулятивної функції розподілу, за яким потім визначається значення аргументу функції $x_i = F^{-1}(r_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, де F^{-1} — обернена до F функція. На практиці часто застосовують дискретні випадкові величини, що набувають лише невід’ємних значень $j = 0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$, тобто функція розподілу дискретної величини x має вигляд $F(x) = \sum_{j=0}^k p(j)$.

У цьому випадку обернену функцію можна записати як $x_k = j$ для

$$F(j-1) < r_k < F(j), \quad (3)$$

де згідно з умовою $F(-1) = 0$.

5. Геометричний розподіл

Для моделювання випадкової величини X з геометричним розподілом необхідно задати таблицю її значень та їх ймовірність (табл. 2).

Таблиця 2. Значення ймовірності геометричного розподілу випадкової величини

Значення X	0	1	n
Ймовірність	p	$(1-p)p$	$(1-p)^n p$

Прикладом випадкової величини з таким розподілом може бути загальна кількість випробувань, які потрібно провести до першого успішного випробування, наприклад кількість пострілів, які потрібно виконати до першого влучення в ціль.

Загалом, ймовірність того, що випадкова величина приймає значення k , визначається за формулою $p_k = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Для моделювання випадкової величини з геометричним розподілом можна скористатися табл. 2 або методом оберненої функції (3), але за великих n такі підходи потребують багато часу. З цієї причини для отримання значення випадкової величини з геометричним розподілом використовують таку формулу: $x_i = \left\lfloor \frac{\ln r_i}{\ln(1-p)} \right\rfloor$, $0 < p < 1$.

У вищенаведеному виразі дужки $\lfloor \]$ означають цілу частину виразу. Справді,

$$\begin{aligned} P(X = x) &= P[k \leq \ln r / \ln(1-p) < k+1] = \\ &= P[-k \ln(1-p) \leq -\ln r < -(k+1) \ln(1-p)] = \\ &= P[(1-p)^{k+1} \leq r < (1-p)^k] = (1-p)^k - (1-p)^{k+1} = p(1-p)^k, \end{aligned}$$

так як випадкова величина r розподілена рівномірно в інтервалі $[0; 1]$.

6. Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл, або розподіл Бернуллі, — це розподіл дискретної випадкової величини, яка приймає два і тільки два значення: 1 — «true», або «істина», та 0 — «false», або «хибність». Цей розподіл показує ймовірність настання деякої події за n незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія настає з ймовірністю p , тобто ймовірність s успішних наслідків у n випробуваннях

$$f(s) = \frac{n!}{s!(n-s)!} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Функція розподілу ймовірності має такий вигляд:

$$F(k) = \sum_{s=0}^k \frac{n!}{s!(n-s)!} p^s (1-p)^{n-s}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Залежно від значення n можна вибрати один із двох способів моделювання випадкової величини з біноміальним розподілом. За невеликих n значення випадкової біноміально розподіленої величини визначається як кількість чисел у послідовності $\{r_i\}$ з n чисел, які не перевищують значення p . Припустимо, що потрібно отримати випадкову величину, яка належить біноміальному розподілу з параметрами $n = 7$ і $p = 0,3$. Для цього спочатку генеруємо послідовність із семи значень r_i : 0,0234; 0,1234; 0,7459; 0,0341; 0,8451; 0,1905; 0,5302, а потім рахуємо ті з них, які менші за p . У даному випадку в послідовнос-

ті тільки чотири значення менші за 0,3. Таким чином, значення випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, дорівнює 4.

За великих значень n і малих p можна діяти таким чином. Генеруємо рівномірно розподілені випадкові числа r_i доти, доки не виконається умова

$$r_i \leq \sum_{j=0}^n u_j, \quad (4)$$

де u_0 та u_{j+1} задаються виразами $u_0 = (1-p)^n$ і $u_{j+1} = u_j \frac{n-1-p}{j+1-p}$.

Значення випадкової величини з біноміальним розподілом дорівнює кількості випробувань n , які необхідно провести, доки не буде справджуватись умова (4).

7. Розподіл Пуассона

Випадкову величину з розподілом Пуассона можна отримати, якщо припустити, що кількість незалежних випробувань n у біноміальному розподілі прямує до нескінченності, а ймовірність успішного випробування p — до нуля, причому добуток np є незмінним і дорівнює λ . Функція щільності розподілу Пуассона задається виразом

$$f(s) = \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}.$$

Таким чином, розподіл Пуассона є граничним випадком біноміального та описує випадкові події, які мають місце дуже рідко. На практиці згідно з біноміальним законом розподілені кількість дефектів у готовому виробі та кількість аварій на транспорті за деякий тривалий проміжок часу, кількість дзвінків у телефонній мережі за одиницю часу та ін.

Щоб отримати випадкову величину s з розподілом Пуассона, генеруємо послідовність рівномірно розподілених випадкових чисел r_i , і знаходимо їх добуток, перевіряючи нерівність

$$\prod_{i=1}^n r_i < e^{-\lambda}. \quad (5)$$

У разі виконання умови (5) число $n-1$ є випадковою величиною, що належить сукупності, розподіленої за законом Пуассона з математичним сподіванням λ . Якщо умові (5) відповідає перше із чисел r_i , то значення випадкової величини s дорівнює 0.

Модельовання неперервних випадкових величин

Існує кілька методів модельовання значень неперервних випадкових величин з довільним законом розподілу на основі випадкових чисел, рівномірно розподілених у інтервалі $[0; 1]$: метод оберненої функції, метод відсіювання, наближені методи тощо.

1. Метод оберненої функції

Розглянемо метод модельовання випадкової величини, яка має функцію щільності ймовірностей $f(x)$ і монотонно зростаючу функцію розподілу $F(x)$ (рис. 9). Суть методу така. За допомогою генератора випадкових чисел генеруємо значення випадкової величини r_i , якому відповідає точка на осі ординат. Значення випадкової величини r_i з функцією розподілу $F(x)$ можемо одержати з рівняння $F(x_i) = r_i$.

Дійсно, якщо на осі ординат відкласти значення r_i випадкової величини, розподіленої рівномірно в інтервалі $[0; 1]$, і на осі абсцис знайти значення x_i випадкової величини (рис. 9), при якому $F(x_i) = r_i$, то випадкова величина $X = F^{-1}(r)$ буде мати функцію розподілу $F(x)$. За визначенням функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X дорівнює ймовірності $P(X < x)$:

$$P(X < x) = P(r < F(X)) = \int_0^{F(x)} f(r) dr = F(x).$$

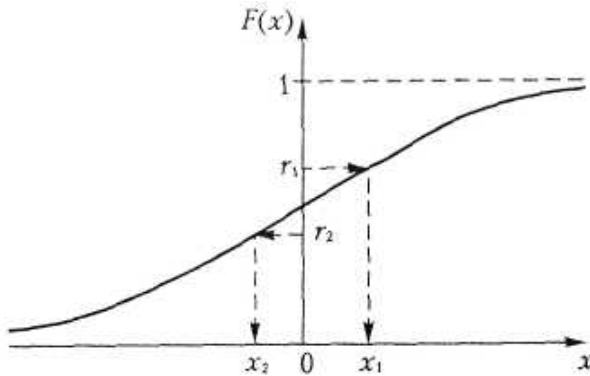


Рис. 9. Використання методу оберненої функції для генерування неперервної випадкової величини

Таким чином, послідовність випадкових чисел r_1, r_2, r_3, \dots перетворюється на послідовність x_1, x_2, x_3, \dots , яка має задану функцію щільності розподілу $f(x)$. Звідси випливає загальний алгоритм моделювання випадкових неперервних величин, що мають задану функцію розподілу ймовірностей:

- ✓ генерується випадкове число $r_i \in [0; 1]$;
- ✓ обчислюється випадкове число x_i , яке є розв'язком рівняння

$$r_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx.$$

Приклади застосування методу наведені нижче.

2. Рівномірний розподіл

У загальному випадку випадкова величина X є рівномірно розподіленою на відрізку $[a; b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей

$$\text{має вигляд } f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Функцію розподілу ймовірностей можна знайти як

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a},$$

$$\text{тобто } F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графіки функцій щільності $f(x)$ та ймовірності $F(x)$ зображено на рис. 10.

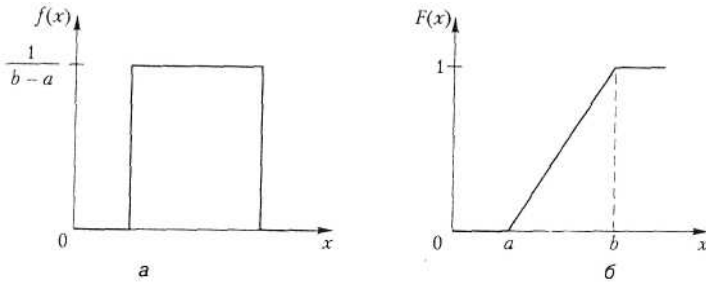


Рис. 10. Функції щільності (а) і розподілу (б) рівномірно розподіленої випадкової величини

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X визначаються так: $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{b-a}{12}$.

Для моделювання випадкової рівномірно розподіленої на відрізку $[a; b]$ величини можна скористатись методом оберненої функції. Обчислимо функцію розподілу випадкової величини та прирівняємо її до значення r_i :

$$r_i = \int_a^{x_i} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_i - a}{b-a}.$$

Звідси знаходимо значення випадкової величини з функцією розподілу $f(x)$: $x_i = (b-a)r_i + a$.

Цю формулу також можна отримати, якщо виконати лінійне перетворення інтервалу $[0; 1]$ у відрізок $[a; b]$. Для цього потрібно змінити масштаб функції рівномірного розподілу, помноживши її на $(b-a)$, а потім змістити її на величину a .

Функція рівномірного розподілу широко застосовується для моделювання випадкових величин, для яких функція розподілу невідома, а відоме лише її середнє значення. У такому випадку припускають, що відомими є середнє значення випадкової величини та деяке розсіювання $\pm\Delta$ її значень відносно середнього. Це дає змогу стверджувати, що дана випадкова величина має рівномірний розподіл. У мові GPSS такий розподіл часто використовується в блоках ADVANCE для моделювання затримки проходження інформації або під час генерування потоків транзактів у блоках GENERATE. Наприклад, щоб згенерувати потік транзактів, які надходять у модель кожні 5 ± 2 хв, використовується блок GENERATE 5,2.

Прикладами реальних задач, в яких виникає необхідність моделювання рівномірно розподілених випадкових величин, можуть бути аналіз помилок округлення під час проведення числових розрахунків (точність задається як кількість десяткових знаків), час переміщення головок у магнітних накопичувачів (мінімальний та максимальний час), відхилення від розкладу руху транспортних засобів (наприклад, метро).

3. Експоненціальний розподіл

Експоненціальний закон розподілу набув широкого використання в теорії надійності складних систем. Функція щільності експоненціального розподілу випадкової величини має вигляд $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Для її моделювання скористаємося методом оберненої функції. Маємо

$$r_i = \int_0^{x_i} f(x) dx = \int_0^{x_i} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x_i}. \quad (6)$$

З виразу (4.6) знаходимо значення x_i : $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$.

Можна показати, що випадкові величини $(1 - r_i)$ мають такий самий розподіл, що і величини r_i . Тоді, замінивши $1 - r_i$ на r_i , отримаємо: $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i$.

Випадкові величини з експоненціальним розподілом широко застосовуються в задачах моделювання та аналізу СМО, наприклад під час моделювання процесів виходу з ладу та ремонту обладнання, які виникають у складних системах, у разі визначення інтервалів часу між послідовними викликами абонентів у телефонній мережі або замовлень від незалежних клієнтів у будь-якій мережі обслуговування (швидка допомога, служби ремонту, виклик таксі і т. ін.)

Покажемо ще один підхід до моделювання випадкової величини, розподіленої за експоненціальним законом, з використанням методу оберненої функції, який прийнятий у мові GPSS. Цей підхід передбачає заміну функції розподілу ймовірностей кусково-лінійною апроксимуючою функцією.

Розглянемо найпростіший випадок, коли $\lambda = 0$. Апроксимуємо функцію експоненціального розподілу лінійними відрізками таким

чином, щоб кожний відрізок можна було використовувати для моделювання за допомогою методу оберненої функції. У мові GPSS функція розподілу апроксимована 23 відрізками. Точки апроксимації x_i та значення функції $F(x_i)$ у цих точках наведені в табл. 3.

Таблиця 3. Вузли та значення апроксимованої функції

x_i	$F(x_i)$	x_i	$F(x_i)$	x_i	$F(x_i)$	x_i	$F(x_i)$	x_i	$F(x_i)$	x_i	$F(x_i)$
0	0	0,4	0,51	0,75	1,38	2,3	0,9	3,2	0,9	5,3	0,99
0,1	0,1	0,5	0,69	0,8	1,6	2,52	0,92	3,5	0,9	6,2	0,99
0,2	0,22	0,6	0,92	0,84	1,83	2,81	0,94	3,9	0,9	7	0,99
0,3	0,35	0,7	1,2	0,88	2,12	2,99	0,95	4,6	0,9	8	0,99

На рис. 11 зображено лінійну апроксимацію експоненціальної функції розподілу $F(x)$ з параметром $\lambda = 1$, а на рис. 12 — функцію, обернену до неї. Перша функція відображає задані в табл. 2 значення, а друга використовується під час моделювання випадкових величин з експоненціальним розподілом.

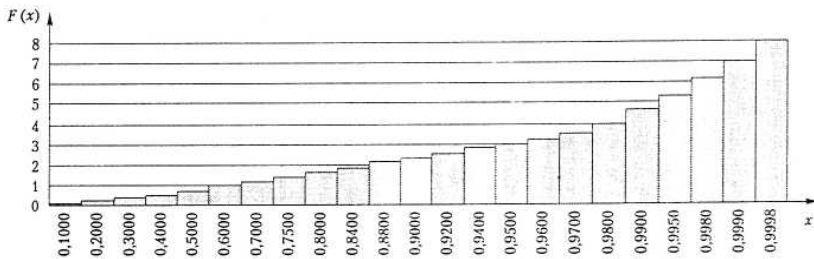


Рис. 11. Апроксимація експоненціальної функції розподілу

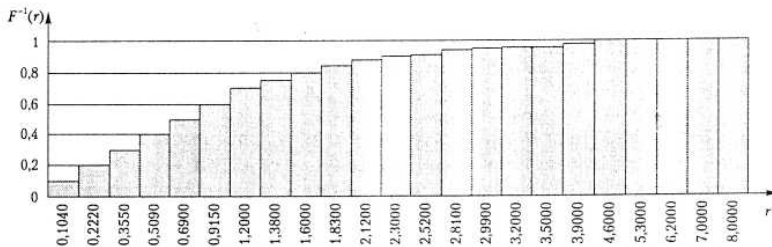


Рис. 12. Обернена функція до апроксимованої

За необхідності моделювання випадкової величини X , розподіленої за експоненціальним законом з математичним сподіванням $\lambda_x \neq 1$,

діють таким чином: генерують значення випадкової величини r_i , яке використовують як аргумент оберненої функції (рис. 12) експоненціального розподілу з параметром $\lambda = 1$, і знаходять значення функції $F(r)$ (для підвищення точності оцінювання параметрів моделювання функцію розподілу $F(r)$ інтерполюють лінійними відрізками); знаходять добуток отриманого значення $F(r)$ на $1/\lambda_x$.

Наприклад, для моделювання часу затримки транзактів, що має експоненціальний закон розподілу з параметром $\lambda_x = 0,01$, у мові GPSS використовують блок

ADVANCE 100.FN\$XPDIS

У цьому операторі функція XPDIS (див. табл. 3) задає експоненціальний розподіл з інтенсивністю $\lambda = 1$:

XPDIS FUNCTION RN1.C24; exponential distribution function
 0.0/.1..104/.2. 222/.3..355/.4. .509/.5..69/
 .6..915/.7.1.2/.75.1.38./8.1.6/84.1.83/
 .88.2.12/9.2.3/92.2.52/94.2.81/95.2.99/
 .96.3.2.97.3.5/98.3.9/99.4.6/995.5.3/
 .998.6.2/999.7/9998.8

4. Пуассонівський потік

Розглянемо моделювання пуассонівського потоку з інтенсивністю λ , основна властивість якого полягає в тому, що ймовірність надходження k вимог протягом інтервалу довжиною t становить

$$p_k(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для пуассонівського потоку інтервали часу між надходженням двох сусідніх вимог мають експоненціальний закон розподілу. Тому для його моделювання достатньо отримати ряд чисел з таким розподілом. Це можна реалізувати за допомогою методу оберненої функції, якщо ряд випадкових чисел r_i рівномірно розподілених у інтервалі $[0; 1]$, перетворити згідно з функцією, оберненою до експоненціальної функції розподілу $t_j = F^{-1}(x) = -\bar{T} \ln(r_j)$, де t_j — j -й проміжок часу між надходженнями двох сусідніх вимог; $\bar{T} = 1/\lambda$ — середнє значення проміжку часу між надходженнями двох сусідніх вимог; r_j — j -е чис-

ло в послідовності випадкових чисел з рівномірним розподілом у інтервалі $[0; 1]$.

У мові GPSS для моделювання пуассонівського потоку вимог з $\bar{T} = 2 \text{ год}$ (одиниця часу в моделі дорівнює 1 хв) використовується блок GENERATE 120.FN\$XPDIS.

5. Нормальний розподіл

Випадкова величина X має нормальний розподіл (розподіл Гауса), якщо її щільність розподілу ймовірностей описується виразом

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \text{ де } m \text{ — математичне сподівання, } \sigma \text{ — середньо-}$$

квадратичне відхилення.

Функція розподілу нормально розподіленої величини X має вигляд $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Графіки функцій щільності ймовірностей $f(x)$ і розподілу $F(x)$ зображено на рис. 13.

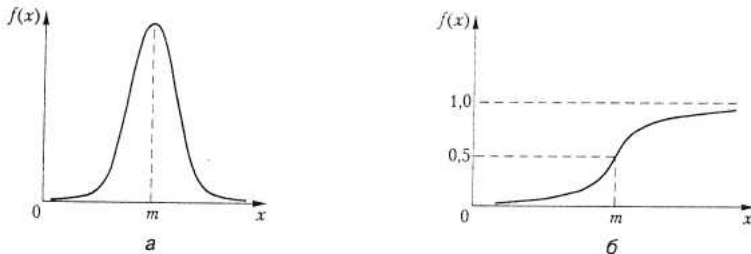


Рис. 13. Графіки функції щільності ймовірностей (а) та розподілу (б) випадкової величини

Для моделювання випадкової величини з нормальним законом розподілу безпосередньо скористатися методом оберненої функції не можна, оскільки неможливо аналітично виконати перетворення виду $X = F^{-1}(r)$. Тому для моделювання слід скористатися методом згорток.

Метод згорток базується на центральній граничній теоремі — одному із найбільш видатних результатів теорії ймовірностей: за широких припущень відносно розподілів суми великої кількості взаємно

незалежних малих випадкових величин має місце розподіл, який близький до нормального. Метод згорток передбачає зображення випадкової величини як суми незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченними математичним сподіванням і дисперсією.

Центральна гранична теорема формулюється таким чином.

Якщо X_1, \dots, X_n — послідовність незалежних випадкових величин із скінченним математичним сподіванням $M[X_i] = a$, $i = 1, n$ дисперсією $D[X_i] = \sigma^2$, $i = 1, n$, то у разі необмеженого збільшення значення n функція розподілу випадкової величини

$$\bar{X}(n) = \frac{1/n(X_1 + \dots + X_n) - a}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(X(n) - a)\sqrt{n}}{\sigma}$$

наближається до функції розподілу стандартного нормального закону $\Phi(z)$ при всіх значеннях аргументу, тобто $F_{\bar{X}(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(z)$,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2} du, \quad u = \frac{x - m}{\sigma}.$$

Функцію $\Phi(z)$ називають функцією Лапласа, для якої є детальні таблиці.

Найпростіший метод отримання значення випадкової величини, що має заданий нормальний розподіл, передбачає виконання таких кроків. Спочатку формують послідовність r_i ($i = 1, n$) незалежних, рівномірно розподілених у інтервалі $[0; 1]$ величин і обчислюють суму

$Z = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6$. Величина $n = 12$ є хорошим наближенням до нормально

розподіленої випадкової величини з нульовим математичним сподіванням $m_z = 0$ і одиничним середньоквадратичним відхиленням $\sigma_z = 1$. Нормальний розподіл з параметрами $m_z = 0$ та $\sigma_z = 1$ називають стандартним.

Перейти від випадкової величини Z з нульовим математичним сподіванням і одиничним середньоквадратичним відхиленням до випадкової величини X , яка має математичне сподівання m_x і середньоквадратичне відхилення σ_x , дає змогу виконати лінійне перетворення

$$X = \sigma_x Z + m_x. \quad (7)$$

У системі моделювання GPSS для моделювання випадкової величини з нормальним розподілом прийнято підхід, який базується на методі оберненої функції. За такого підходу функція нормального розподілу випадкової величини Z з параметрами $m_z = 0$ і $\sigma_z = 1$ наближається кусково-лінійною функцією. Як відзначили розробники інтерпретатора GPSS/PC, для цього достатньо 24 відрізки. У табл. 4 занесено відповідні значення аргументу z_i , і функції $\Phi(z)$.

Таблиця 4. Вузли апроксимації і значення функції нормального розподілу

z_i	$F(z)$	z_i	$F(z)$	z_i	$F(z)$	z_i	$F(z)$	z_i	$F(z)$
-5	0	-1,5	0,07	-0,4	0,34	0,6	0,73	2	0,98
-4	0,00003	-1,2	0,12	-0,2	0,42	0,8	0,79	2,5	0,99
-3	0,00135	-1	0,16	0	0,5	1	0,84	3	0,99
-2,5	0,00621	-0,8	0,21	0,2	0,58	1,2	0,88	4	0,99
-2	0,02275	-0,6	0,27	0,4	0,66	1,5	0,93	5	1

Для того щоб одержати нормально розподілену випадкову величину з математичним сподіванням $m_x \neq 0$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma_x \neq 1$, необхідно виконати обчислення за формулою (7). На рис. 14 зображено графік функції, отриманої в результаті апроксимації функції нормального розподілу $\Phi(z)$, а на рис. 15 — графік функції $\Phi^{-1}(r)$, якою зручніше користуватися під час моделювання (як аргумент використовують значення r_i від генератора випадкових чисел і отримують значення функції).

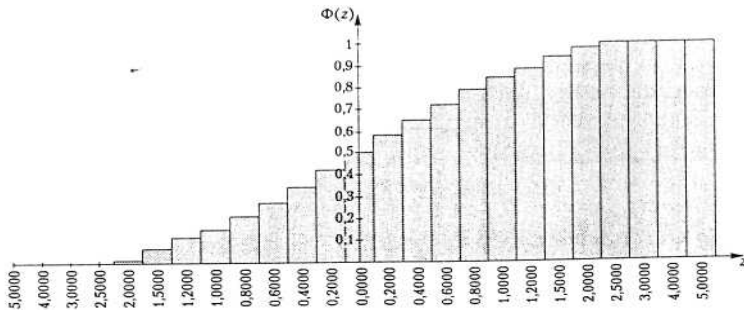


Рис. 14. Кусково-лінійна апроксимація функції нормального розподілу

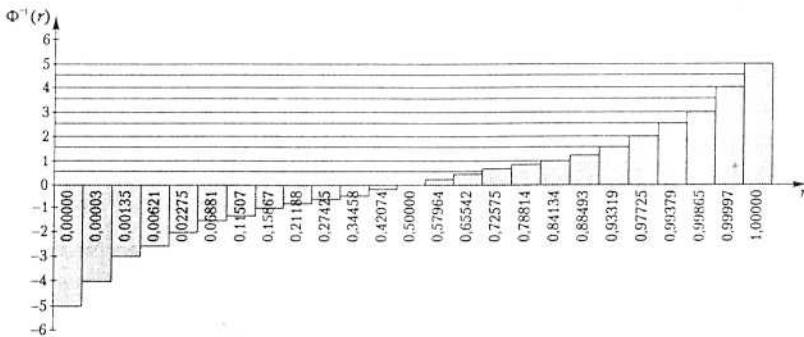


Рис. 15. Обернена функція до апроксимованої

У системі GPSS для моделювання нормально розподілених випадкових величин використовується функція NOR, яка апроксимує функцію стандартного нормального розподілу:

NOR FUNCTION RN1.C25

0,-5/.00003.-4/.00135,-3/.00621.-2.5/.02275.-2

.06681.-1.5/.11507.-1.2/.15866.-1.1/21188,-8/.27425.-6

.34458.-4/.42074,-.2/.5,0/.57926,.2/.65542,.4

.72575.6/.78814,8/.84134.1/.88493.1.2/.93319.1.5

.97725,2/.99379.2.5/.99865.3/.99997.4/1.5

Наприклад, щоб отримати значення випадкової величини з параметрами $m_x = 60$ і $\sigma_x = 10$, потрібно задати змінну NORM1, яка викликає функцію NOR: NORM1 FVARIABLE 60+10#FN\$NOR

Якщо в моделі потрібно здійснити затримку транзактів на проміжок часу, що має нормальний розподіл (необхідно забезпечити невід'ємність значень, тобто потрібно, щоб виконувалась умова $m_x > 5 \sigma_x$), використовують блок ADVANCE VSNORM1.

Недоліком розглянутих вище методів моделювання є те, що значення функції нормального розподілу, які лежать за межами $m_x \pm \sigma_x$, суттєво відрізняються від точних значень. Щоб зменшити загальну похибку моделювання, треба використовувати більш точні методи отримання значень функції нормального розподілу. Ці методи базуються на такій властивості. Якщо X_1 і X_2 є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з нульовим математичним сподіванням і одиничним середньоквадратичним відхиленням, то величина кута між віссю абсцис і вершиною випадкового вектора з ко-

ординатами (x_1, x_2) має рівномірний розподіл і не залежить від довжини вектора $(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ (рис. 16).

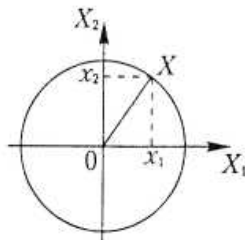


Рис. 16. Зображення вектора для моделювання нормального розподілу

Квадрат довжини вектора в цьому випадку має розподіл χ^2 з двома ступенями свободи і моделюється як окремий випадок показового розподілу з параметром $\lambda = 1/2$.

Існує два методи моделювання нормального розподілу, які використовують цю властивість:

Метод Бокса-Мюллера (Box-Muller). Генеруємо пару нормально розподілених чисел з $m_x = 0$ і $\sigma_x = 1$ за допомогою двох випадкових чисел r_1 і r_2 :

$$x_1 = -2 \ln r_1 \cos(2\pi r_1); \quad x_2 = -2 \ln r_2 \cos(2\pi r_2).$$

Таким чином, отримуємо два числа x_1 і x_2 з нормальним розподілом.

Метод Марсальї-Брея (Marsaglia-Bray). Існує більш швидка модифікація цього методу. Генерують два випадкових числа r_1 і r_2 , вважаючи, що $v_1 = -1 + 2r_1$, $v_2 = -1 + 2r_2$, обчислюють суму $s = v_1 + v_2$. Якщо $s \geq 1$, то повторюють процедуру, якщо $s < 1$, то одержують два

нормально розподілених числа: $x_1 = v_1 \sqrt{\frac{-2 \ln s}{s}}$, $x_2 = v_2 \sqrt{\frac{-2 \ln s}{s}}$.

Щоб одержати за цим методом 100 пар нормально розподілених чисел, потрібно генерувати 127 пар випадкових чисел. Це простий та швидкий метод, у разі його застосування більша частина часу роботи алгоритму витрачається на обчислення логарифму.

6. Логарифмічно-нормальний розподіл

Логарифмічно-нормальний розподіл — це такий розподіл випадкової величини, у якої нормальний розподіл має натуральний логарифм.

рифм її значень. Цей розподіл придатний для моделювання мультиплікативних процесів так само, як нормальний розподіл — для адитивних. Дійсно, використовуючи центральну граничну теорему, можна показати, що добуток незалежних додатних випадкових величин прямує до логарифмічно-нормального розподілу.

Логарифмічно-нормальна величина є результатом взаємодії великої кількості незалежних малих випадкових факторів. Внесок кожного фактора пропорційний уже досягнутому рівню досліджуваної величини, тобто характер впливу є мультиплікативним. Функція щільності логарифмічно-нормального розподілу має вигляд

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Щоб перевірити, чи мають емпіричні вибіркові дані логарифмічно-нормальний розподіл, потрібно обчислити логарифм від кожного елементу вибірки і перевірити її на нормальність, наприклад за допомогою критерію χ^2 . Якщо трансформований набір даних має нормальний розподіл, то вхідні дані є логарифмічно-нормально розподіленими.

На відміну від нормального розподілу, значення випадкової величини x з логарифмічно-нормальним розподілом завжди додатне і використовується під час моделювання економічних, фізичних, біологічних систем багатьох типів. Вони добре описують процеси, в яких значення змінної, що спостерігається, є випадковою часткою значення попереднього спостереження.

Випадковими величинами з цим розподілом можуть бути тривалість безвідмовної роботи виробу в режимі спрацювання та старіння, розмір банківського вкладу, довжини слів певної мови та переданих повідомлень у мережі, розміри файлів, що зберігаються в комп'ютері.

Як і нормальний розподіл, логарифмічно-нормальний також визначається двома параметрами a і σ . Графіки функції щільності логарифмічно-нормального розподілу для різноманітних значень параметрів a і σ зображено на рис. 17.

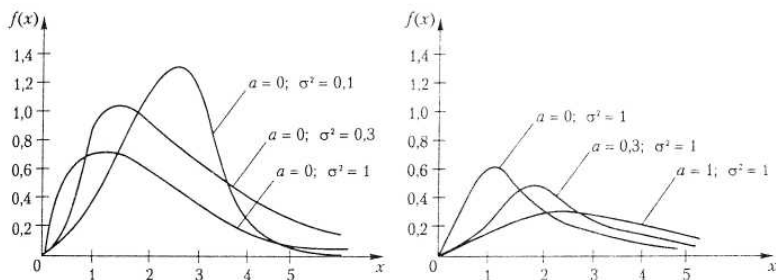


Рис. 17. Графіки функції щільності
логарифмічно-нормального розподілу

Метод моделювання логарифмічно-нормального розподілу передбачає підставлення в рівняння $L = e^N$ значень з вибірки $N(m, \sigma^2)$, які мають нормальний розподіл з математичним сподіванням m і дисперсією σ^2 , де L — логарифмічно-нормальний розподіл. Математичне сподівання для цього розподілу $M[x] = e^{2m+\sigma^2}$ і дисперсія $D[x] = e^{2m+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$.

7. Розподіл і потоки Ерланга

Випадкові величини з експоненціальним розподілом не завжди адекватно описують деякі реальні процеси та події, наприклад час обслуговування і моменти надходження вимог до СМО. Для більш точного моделювання таких процесів доцільніше використовувати гамма-розподілені випадкові величини або ті, що мають розподіл Ерланга. Розподіл Ерланга є результатом підсумовування взаємно незалежних і однаково розподілених експоненціальних випадкових величин і є окремим випадком гамма-розподілу.

Функція щільності розподілу Ерланга k -го порядку з інтенсивністю λ має такий вигляд: $f_{\eta}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Математичне сподівання і дисперсія розподілу Ерланга визначаються як $M[x] = 1/k\lambda$, $D[x] = 1/k\lambda^2$. Графік функції щільності розподілу Ерланга зображено на рис. 18.

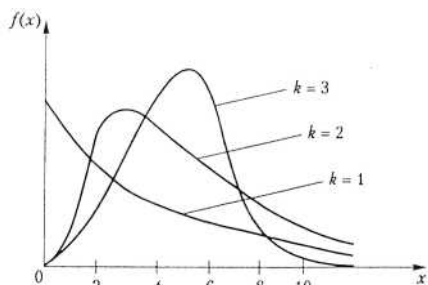


Рис. 18. Графік функції щільності розподілу Ерланга

Для моделювання розподілу Ерланга використовують метод згорток випадкових величин з експоненціальними функціями розподілу. Для цього треба лише обчислити суму k експоненціально розподілених випадкових величин. Зі збільшенням k розподіл Ерланга наближається до нормального.

Мовою GPSS потік Ерланга другого порядку із середнім значенням часу надходження 180 можна задати таким чином:

```
GENERATE...1
SDFG ADVANCE 90, FN$EXPDIS
ADVANCE 90, FN$EXPDIS
SPLIT 1.SDFG
TERMINATE 1
```

Дамо пояснення до цієї програми. У початковий момент часу в моделі генерується один транзакт. Кожний блок ADVANCE імітує затримку транзакту на певний проміжок часу, який має експоненціальний закон розподілу. Блок SPLIT створює копію транзакту і направляє його до блока з міткою SDFG, транзакт-оригінал надходить до моделі і так далі.

Для дослідження властивостей розподілу Ерланга в системі GPSS можна скористатись таким кодом:

```
EXPDIS FUNCTION RNIC24
0.0/.100,.104/. 200..222/.300..355/. 400,. 509
.500..690/.500.. 915/.700.1.200/.750,1.380
.800.1.600/. 840.1.830/.880.2.120/.900.2.300
.920,2.520/.940.2.810/. 950.2.990/. 960.3.200
.970.3.500/. 980.3.900/. 990.4.600/. 995.5.300
.998,6.200/.999.7/1.8
TRTABLE X2.1,20.50 :визначає таблицю
```

```

GENERATE ,..1
SDFG ADVANCE 100.FN$EXPDIS
ADVANCE 100.FN$EXPDIS
ADVANCE 100.FN$EXPDIS
SPLIT 1.SDFG :створює одну копію транзакту
SAVEVALUE 2,C1 ;запам'ятовує час появи транзакту
SAVEVALUE 2-X1 ;визначає інтервал часу між транзактаии
SAVEVALUE 1.C1 ;запам'ятовує час появи попереднього
;транзакту
TABULATE TP :будує гістограму
TERMINATE 1

```

Оператор TABLE, блоки SPLIT, SAVEVALUE і TABULATE необхідні для збирання статистичних даних про інтервали надходження транзактів до моделі.

Результати моделювання в разі використання оператора START 100000000 наведено на рис. 19. Пропонується дослідити властивості розподілу Ерланга при різних значеннях k шляхом зміни кількості блоків ADVANCE у наведеній програмі.

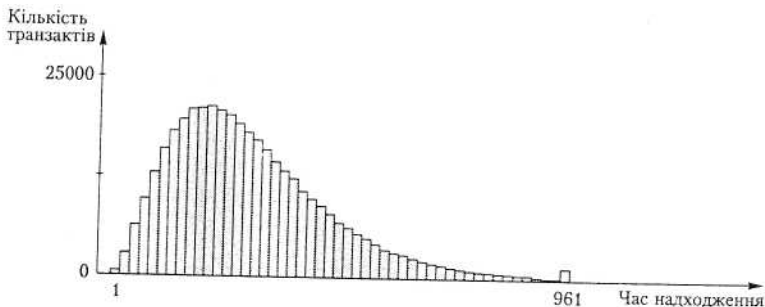


Рис. 19. Гістограма, отримана за результатами моделювання

8. Гамма-розподіл

Випадкова величина має гамма-розподіл з параметрами α та β ,

якщо її функція щільності має вигляд $f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq x \leq \infty, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$,

де α — параметр форми розподілу, β — масштабний коефіцієнт, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція або функція Ейлера, яка визначається як

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad z > 0.$$

Нагадаємо деякі властивості гамма-функції: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ для $z > 0$; $\Gamma(k+1) = k!$ для від'ємних цілих k ; $\Gamma(k + 1/2) = \sqrt{\pi} * 1*3*5 \dots (2k-1)/2^k$ для додатних цілих k ; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Математичне сподівання гамма-розподілу і дисперсія визначаються як $M_{\gamma}[x] = \alpha\beta$ та $D_{\gamma}[x] = \alpha\beta^2$. Вигляд функції гамма-розподілу значною мірою залежить від значень параметрів. Ця властивість дає змогу використовувати випадкові величини з цим розподілом для моделювання різноманітних фізичних та економічних явищ і процесів. Графіки функції розподілу при різних значеннях параметрів α і β зображено на рис. 20.

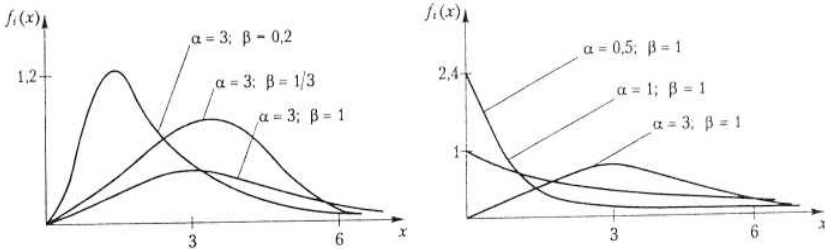


Рис. 20. Графіки функції щільності для гамма-розподілу

Гамма-розподіл є узагальненням розподілу Ерланга, коли кількість підсумованих експоненціальних величин не є цілим числом. Якщо $\alpha = 0,5$ і $\beta = 2$, то випадкові величини з гамма-розподілом можна інтерпретувати також як суму квадратів нормально розподілених випадкових величин, тобто таких, які мають розподіл χ^2 . Таким чином, розподіл χ^2 , розподіл Ерланга та експоненціальний розподіл є окремими випадками гамма-розподілу.

Гамма-розподіл має важливу властивість. Сума будь-якої кількості незалежних гамма-розподілених випадкових величин m з однаковим значенням параметра β теж підпорядковується гамма-розподілу, але з параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$ і β .

Метод моделювання випадкової величини з гамма-розподілом залежить від значень параметрів α та β . Якщо $\alpha = 1$ і $\beta = 1$, гамма-

розподіл перетворюється в експоненціальний розподіл, і тому для отримання випадкової величини з гамма-розподілом можна використати відповідні методи моделювання. Якщо α має ціле значення можна перейти до моделювання розподілу Ерланга. Якщо $\alpha = 0,5$, гамма-розподіл перетворюється на розподіл χ^2 , тому для його моделювання досить підносити до квадрату вибіркові значення нормально розподілених випадкових величин.

Від випадкової величини X , яка має гамма-розподіл з будь-яким значенням параметра α і значення $\beta = 1$, досить легко можна перейти до випадкової величини X' з параметрами α і $\beta > 1$. Для цього використовується перетворення виду $X' = \beta X$. Причому ефективність і швидкодія методу зростає зі збільшенням значення α .

Існує багато методів моделювання значень гамма-розподіленої випадкової величини. Основна проблема, яка виникає під час її моделювання, — це обчислення гамма-функції. Справа в тому, що цей інтеграл обчислити аналітично неможливо. Тому для його обчислення зазвичай використовують числові методи.

Щоб отримати значення гамма-функції $\Gamma(z)$ або $1/\Gamma(z)$, можна скористатися такою формулою:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \approx z(1+z)(1+a_1z+a_2z^2+\dots+a_{13}z^{13}), \quad z \in [-1,1],$$

де $a_1 = -0,422784335092$; $a_2 = -0,233093736365$; $a_3 = 0,191091101162$; $a_4 = -0,024552490887$; $a_5 = -0,017645242118$; $a_6 = -0,008023278113$; $a_7 = -0,000804341335$; $a_8 = -0,000360851496$; $a_9 = 0,000145624324$; $a_{10} = -0,000017527917$; $a_{11} = -0,000002625721$; $a_{12} = 0,000001328554$; $a_{13} = -0,00000018122$.

Обчислення гамма-функції для різних значень x ускладнюється тим, що вона залежить від трьох аргументів — x , α та β . Тому на практиці під час моделювання у формулі функції щільності (8) використовується неповна гамма-функція $\Gamma(\alpha) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, для обчислення якої за умови, що $\alpha < 1$ можна скористатися таким виразом:

$$\Gamma(\alpha) = x^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{i!(\alpha+i)}.$$

Для $\alpha > 1$ інтеграл (9) можна легко обчислити за допомогою будь-яких формул числового інтегрування, наприклад квадратурних формул Ньютона-Котеса або Гауса.

Отримана функція щільності гамма-розподілу використовується для перетворення випадкових незалежних рівномірно розподілених величин. Для цього область можливих значень випадкової величини X розбивається на n однакових інтервалів, кількість яких залежить від заданої точності апроксимації функції $f(x)$. Потім за допомогою значення r_i ; (методом розіграшу за жеребом) обирається один із n інтервалів, у якому отримують випадкові числа з функцією щільності розподілу $f(x)$.

Для оцінювання близькості функції щільності розподілу ймовірностей отриманих значень випадкової величини до функції щільності розподілу $f(x)$ використовують метод найменших квадратів. Цей метод передбачає задання максимально допустимої похибки (наприклад, $\epsilon = 10^{-4}$).

Наведені вище формули та метод кускової апроксимації функції щільності можна використати, щоб задати таблицю значень функції гамма-розподілу при фіксованих значеннях параметрів α і β , як це зроблено для мови GPSS у генераторі програм ISS 2000.

Наведемо ще кілька алгоритмів моделювання випадкової величини, яка має гамма-розподіл, при різних значеннях параметра α .

1. $0 < \alpha < 1$.

Генеруємо три числа: r_1, r_2 , та r_3 , які є незалежними реалізаціями випадкової величини, рівномірно розподіленої в інтервалі $[0, 1]$. Обчислимо значення: $X = r_1^{1/\alpha}$, $Y = r_2^{1/(1-\alpha)}$.

Якщо $X + Y \leq 1$, обчислюємо $W = X(X + Y)$ і розраховуємо значення γ_i , випадкової величини за формулою $\gamma_i = W(-\ln(r_3))^\beta$.

Або знаходимо нові значення X і Y і повторно перевіряємо умову $X + Y \leq 1$.

2. $1 \leq \alpha < 5$.

Позначимо через $a = \lfloor \alpha \rfloor$ цілу частину від α і через $\beta = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$

Обчислимо значення $X = \frac{\alpha}{a} \left[-\ln \left(\prod_{i=1}^a r_i \right) \right]$.

Якщо $r_{a+1} > \left(\frac{X}{\alpha}\right)^b e^{-\frac{X}{\alpha}}$, то обчислюємо нове значення X .

Або розраховуємо значення γ_i , випадкової величини за формулою $\gamma_i = \pm X\beta$.

3. $a \geq 5$.

У цьому випадку провадиться зважений відбір значень послідовності, що має розподіл Ерланга.

Якщо $r_i \geq \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$, то γ_i визначається як значення випадкової величини з розподілом Ерланга з параметрами $\lfloor \alpha \rfloor, \beta$.

Якщо $r_i < \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$, то γ_i обчислюється як значення випадкової величини, що має розподіл Ерланга з параметрами $\lfloor \alpha \rfloor + 1, \beta$.

9. Бета-розподіл

Бета-розподіл визначений у скінченному інтервалі й при різних значеннях параметрів описується різноманітними кривими. Ці криві можуть бути симетричними, асиметричними, мати форму дзвону, U-подібну форму і т. ін. Одна із найпростіших різновидностей бета-розподілу — розподіл Парето, який часто використовується в економічних моделях для моделювання розподілу доходів або витрат.

Те, що бета-розподіл визначений лише в скінченному інтервалі, вносить обмеження на об'єкт моделювання (значення випадкової величини X лежить в інтервалі від 0 до 1). Прикладами можуть бути функції щільності оцінок імовірності, або частки чогось, експертні суб'єктивні ймовірності події, що нас цікавлять.

Функція щільності бета-розподілу має вигляд

$$f_{\beta}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} & * x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}, \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

де $0 < \alpha_1, \alpha_2 < \infty$.

Математичне сподівання $M_{\beta}[x] = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, а дисперсія

$$D_{\beta}[x] = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)}.$$

Види функцій розподілу залежно від параметрів α_1 та α_2 зображено на рис. 21.

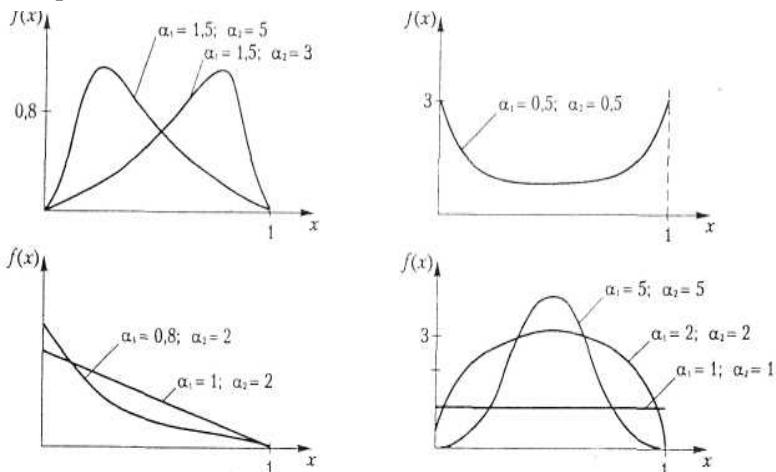


Рис. 21. Функції щільності бета-розподілу

Метод моделювання випадкової величини базується на такій властивості бета-розподілу: якщо γ_1 і γ_2 — дві незалежні гамма-розподілені випадкові величини з параметрами α_1, β та α_2, β відповідно, то значення $\gamma_1 / (\gamma_1 + \gamma_2)$ підпорядковується бета-розподілу з параметрами α_1 і α_2 . Тому метод моделювання передбачає перетворення випадкової величини за формулою $x_i = \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_2)}$, де γ_1 і γ_2 — дві незалежні гамма-розподілені випадкові величини з параметрами $\alpha_1, 1$ та $\alpha_2, 1$.

10. Розподіл Вейбулла

Розглянемо, якому розподілу підпорядковуються значення випадкової величини, які визначають тривалість безвідмовної роботи складної системи з кількох об'єктів, за умови, що з ладу можуть виходити окремі об'єкти. Через ξ позначимо тривалість безвідмовної роботи системи, через $F_\xi(t) = P(\xi < t)$ — неперервну і диференційовану функцію розподілу випадкової величини, а через $\lambda(t)$ — інтенсивність відмови елементів, що працювали до часу t :

$$\lambda(t) = \frac{f_{\xi}(t)}{1 - F_{\xi}(t)} \approx \frac{n(t)n(t + \Delta t)}{\Delta t n(t)}, \text{ де } n(t) \text{ — число об'єктів системи, які}$$

працювали безвідмовно до моменту часу t , а Δt — нескінченно малий відрізок часу. Інтенсивність відмов визначається як відношення кількості об'єктів системи, що вибули з ладу до моменту часу t , до загальної кількості об'єктів системи, що працювали безвідмовно, $n(t)$. Розв'яжемо рівняння (10) відносно функції розподілу $F_{\xi}(t)$:

$$F_{\xi}(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (11)$$

Із формули випливає, що конкретний вигляд функції $F_{\xi}(t)$ залежить від функції $\lambda(t)$. На рис. 22 зображено графік життєвого циклу складного виробу. У ньому можна виділити три періоди, кожному з яких відповідають три окремих відрізки графіка. Для кожного відрізка існує своя функція $\lambda(t)$ і, отже, свій закон розподілу часу безвідмовного функціонування системи $F_{\xi}(t)$. Для першого відрізка (період припрацювання) системи параметр $\alpha < 1$, для другого (період нормальної експлуатації) $\alpha = 1$, для третього (період старіння) $\alpha > 1$. На графіку видно, чому в період припрацювання не бажано продавати вироби або експлуатувати в критичних режимах складні системи.

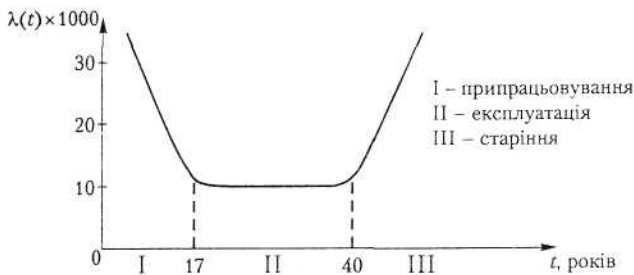


Рис. 22. Графік функції зміни інтенсивності відмов у часі для складної системи

Розглянемо випадок, коли функція $\lambda(t)$ має вигляд $\lambda(t) = \lambda_0 \alpha t^{\alpha-1}$, де λ_0 : $\alpha > 0$ — деякі числові параметри, які характеризують систему. Якщо підставити різні значення α у формули (10) та (11), отримаємо:

$$F_{\xi}(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t^{\alpha}}, \quad t \geq 0.$$

Відповідно, функція щільності ймовірності такої випадкової величини має такий вигляд:

$$f_{\xi}(t) = \lambda_0 \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda_0 t^{\alpha}}.$$

Це є розподіл Вейбулла. Математичне сподівання і дисперсія задаються виразами

$$M_{\xi}[t] = \lambda_0^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{та} \quad D_{\xi}[t] = \lambda_0^{-\frac{2}{\alpha}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right].$$

Для моделювання випадкових величин w_i , розподілених по закону Вейбулла, використовуються незалежні рівномірно розподілені в інтервалі $[0; 1]$ випадкові величини, що перетворюються за методом оберненої функції. Значення w_i отримують за формулою $w_i = \left(\frac{-\ln(r_i)}{\lambda_0} \right)^{1/\alpha}$,

де $1/\lambda_0$ — масштабний параметр; α — параметр крутизни.

11. Гіпер- і гіпоекспоненціальні розподіли

Експоненціально розподілені випадкові величини використовуються і для моделювання випадкових величин з гіпер- і гіпоекспоненціальним розподілом. Ці розподіли дають змогу замінити неекспоненціальний розподіл випадкової величини сумою незалежних зважених експоненціальних розподілів (такий спосіб називається *методом суперпозиції*). Вони широко використовуються в теорії масового обслуговування. Це дає можливість застосовувати методи теорії марківських процесів з неперервним часом для розрахунків характеристик систем, в яких випадкові процеси підпорядковуються неекспоненціальним законам розподілу.

Якщо потрібно отримати випадкову величину з неекспоненціальним розподілом з коефіцієнтом варіації $C > 1$, можна скористатись гіперекспоненціальним розподілом, з функцією розподілу ймовірностей

$$F_i(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^k w_i (1 - e^{-\mu_i x}); \mu_i > 0, w_i > 0; \sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Математичне сподівання і дисперсія цієї випадкової величини задаються виразами

$$M[x] = \sum_{i=1}^k \frac{w_i}{\mu_i}, \quad D[x] = \sum_{i=1}^k \frac{w_i}{\mu_i^2} - \left(\sum_{i=1}^k \frac{w_i}{\mu_i} \right)^2.$$

Легко показати, що коефіцієнт варіації визначається як $C = \frac{\sqrt{D(t)}}{x} \geq 1$. Експоненціальний розподіл з коефіцієнтом варіації $C = 1$ отримуємо за умови, $\mu_i = \mu$ для всіх i .

Розглянемо деякий обслуговуючий центр, обведений контуром на рис. 23, який має k паралельно з'єднаних пристроїв для обслуговування з імовірністю використання w_i . Припустимо також, що в довільний момент часу може бути зайнято не більше одного пристрою з k , тобто нова вимога надходить до обслуговуючого центру тільки після того, як закінчиться обслуговування попередньої вимоги і вона залишить центр. Тоді, якщо час обслуговування вимог на кожному пристрої підпорядковується експоненціальному закону розподілу з інтенсивністю μ_i , то час обслуговування вимог у центрі в цілому матиме гіперекспоненціальний розподіл. Схема з паралельними етапами обслуговування, наведена на рис. 23, використовується для моделювання гіперекспоненціального розподілу. Наприклад, під час моделювання обчислювальних систем такий розподіл добре описує функціонування центрального процесора комп'ютера.

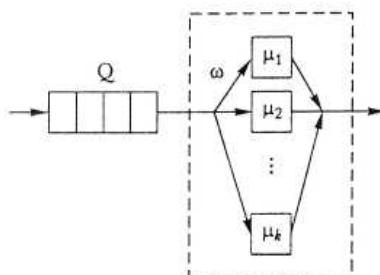


Рис. 23. Схема моделі для отримання гіперекспоненціального розподілу

Якщо необхідно отримати розподіл з коефіцієнтом варіації $C < 1$, можна скористатись гіпоекспоненціальним розподілом з функцією розподілу ймовірностей

$$F_t(x) = P(X \leq x) = 1 - \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_1 x} - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2 x}, (\mu_1 \neq \mu_2).$$

Математичне сподівання, дисперсія і коефіцієнт варіації випадкової величини x задаються виразами

$$M[x] = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}; D[x] = \frac{1}{\mu_1^2 + \mu_2^2}; C = \sqrt{1 - \frac{2\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}} < 1$$

За умови, що всі коефіцієнти однакові ($\mu_k = \mu$), час перебування вимоги в обслуговуючому центрі (обведений на рис. 24) буде мати k -розподіл Ерланга.

Для моделювання пристрою СМО, час обслуговування якого є випадковою величиною з гіпоекспоненціальним розподілом, необхідно послідовно з'єднати k пристроїв для обслуговування, у кожному з яких час обслуговування має експоненціальний розподіл. Під час моделювання слід урахувувати, що в будьякий момент часу повинен бути зайнятим лише один пристрій (рис. 24), тобто нова вимога може надійти до першого пристрою для обслуговування тільки після того, як попередня вимога залишить останній пристрій.

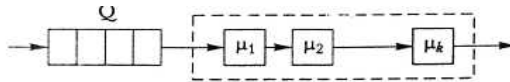


Рис. 24. Схема моделі для отримання гіпоекспоненціального розподілу

У разі моделювання обчислювальних систем випадкові величини з таким розподілом застосовують для визначення часу роботи пристроїв введення-виведення комп'ютера.

Моделювання випадкових векторів

Під час моделювання систем керування багатьох типів виникає необхідність генерувати багатовимірні випадкові вектори, які мають заданий сумісний розподіл або багатомірний розподіл. У цьому разі окремі компоненти вектора можуть бути незалежними.

Розглянемо моделювання неперервного випадкового вектора зі складовими X, Y . Нехай випадкові величини X, Y описуються спільною

функцією щільності $f(x, y)$, яку може бути використано для визначення функції щільності $f(x)$ випадкової величини X :

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Маючи функцію щільності $f(x)$, можна знайти випадкове число x_i , а потім, якщо $x = x_i$, знайти умовний розподіл випадкової величини Y :

$$f_{\eta}(y_i | \xi = x_i) = f(x, y) \Big|_{f_{\xi}(x_i)}.$$

З цього виразу для функції щільності можна визначити випадкову величину y . Тоді пара чисел (x_i, y_i) буде реалізацією неперервного випадкового вектора (X, Y) . Такий спосіб реалізації двомірних векторів можна узагальнити і для моделювання багатомірних випадкових векторів. Однак слід мати на увазі: зі збільшенням числа компонентів вектора складність обчислень різко зростає, що перешкоджає широкому використанню цього методу на практиці.

Моделювання випадкових процесів

Випадковий процес — це процес (тобто зміна в часі стану деякої системи чи об'єкта), який розвивається під впливом якихось випадкових чинників і для якого задано ймовірнісні характеристики його протікання. До числа таких процесів можна віднести багато виробничих процесів, які супроводжуються випадковими флуктуаціями, а також процесів, з якими можна зустрітись у природничих науках, економіці, соціології тощо.

Моделювання будь-якого процесу, в тому числі і випадкового, полягає у відтворенні значень (величин) реалізації цього процесу. Випадковий стаціонарний процес задається значеннями математичного сподівання та автоковаріаційною або автокореляційною функцією. Для його моделювання скористаємось параметричними моделями авторегресії, які широко застосовуються для аналізу часових рядів.

Авторегресійний процес k -го порядку з постійними коефіцієнтами визначається рівнянням регресії

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_k y_{t-k} + e_t. \quad (12)$$

Значення процесу (12) у будь-який момент часу i визначається через попередні значення та випадкове збурення e_t . На практиці звичайно використовують авторегресійні моделі процесів першого і другого порядку (процес Маркова і Юла-Уокера), автокореляційна функція яких є згасаючою (рис. 25).



Рис. 25. Автокореляційна функція стаціонарного процесу

Параметри процесу a_1, \dots, a_k визначаються через коефіцієнти автокореляції. Так, для процесу Юла-Уокера можемо одержати:

$$a_0 = M[y_t], \quad a_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2},$$

де ρ_1, ρ_2 — значення автокореляційної функції при зсувах 1 та 2.

Під час побудови рівняння авторегресії висуваються дві гіпотези. Перша — про стаціонарність процесу, друга — про те, що збурення e_t є випадковим процесом у широкому розумінні слова з нормальною функцією розподілу, нульовим математичним сподіванням і дисперсією σ^2 . На рис. 26, а зображено графік випадкового процесу і нормальний розподіл збурення e_t (рис. 26, б).

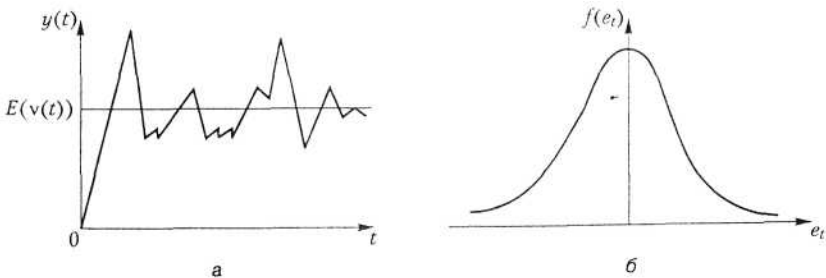


Рис. 26. Графіки випадкового процесу (а) і нормального розподілу збурення (б)

Процес y_t називається марківським, якщо для будь-яких моментів часу $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ умовна ймовірність значення y_t залежатиме від y_{t-1} і не залежатиме від того, в якому стані процес знаходився в попередні моменти часу. Під час моделювання марківського стаціонарного процесу з параметрами $M[y_t], \rho_1, \sigma^2$ діють таким чином. За початковий член ряду можна взяти будь-яке значення випадкового процесу (тому

що будь-яка частина стаціонарного процесу є повноцінним представником усього процесу і має ті ж імовірнісні характеристики), наприклад $y_{t-1} = 0$ або $y_{t-1} = M[y_t]$. За формулою (12) розраховуємо значення y_{t+1} при заданих $a_0 = M[y_t]$ і $a_1 = \rho_1$ без урахування збурення e_t , і моделюємо значення нормально розподіленої випадкової величини з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, і дисперсією σ^2 . Отримане значення додаємо до y_{t-1} і таким чином отримуємо нове значення реалізації випадкового процесу. Повторюємо процедуру для обчислення інших значень за формулою (12), задаючи як початкове значення y_t , тобто моделюємо y_{t+1}, \dots, y_{t+k} . Така методика дає змогу моделювати випадкові стаціонарні процеси з будь-якими автокореляційними та багатомірними функціями розподілів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Атаманчук П. Моделювання природних явищ як ефективний засіб вивчення загальної фізики / П. Атаманчук, А. Губанова, Р. Ткачук. // Фізика та астрономія в школі: Наук.-мет. журн. К.: Педагогічна преса, 2008. №2. С. 17–20.
2. Бабкіна Р. М. Математичне моделювання — метод пізнання навколишнього світу / Р. М. Бабкіна // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). № 1. Бердянськ: БДПУ, 2005. 200 с.
3. Богобожний В. В., Курбанов К. Р., Палій П. Б., Шмандій В. М. Принципи моделювання та прогнозування в екології: Підручник для вузів. К.: ЦНЛ, 2004. 216 с.
4. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. К.: КНЕУ, 2003. 408 с.
5. Вітлінський В. В., Верченко П. І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. К. : КНЕУ, 2000. 292 с.
6. Загородній Ю. В., Войтенко В. В. Математичні моделі екологічних систем. Житомир: Вид-во ЖІТІ, 2000. 119 с.
7. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.
8. Калапуша Л. Р. Моделі в науці та навчальному процесі з фізики Ч. I, II / Л. Р. Калапуша // Фізика та астрономія в школі : Наук.-мет. журн. К.: Педагогічна преса, 2007. № 1. С. 10–13, 2007. № 3. С. 13–17.
9. Ковальчук П. І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища. К.: Либідь, 2003. 208 с.
10. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології. К.: Вид. дім «КМ Академія», 2002. 203 с.

11. Майер Р. В. Комп'ютерне моделювання фізичних моделей. – Глазов: ГГПИ. 2009. 112 с.
12. Малиш Н. А. Моделювання економічних процесів ринкової економіки: Навч. посіб. К.: МАУП, 2004. 120 с.: іл..
13. Моторин Р.М. Міжнародна економічна статистика: Підручник. К. : КНЕУ, 2004. 324 с.
14. Томашевський В. М. Моделювання систем. К.: Вид. груп. ВНУ, 2005. 352 с.

АВТОРИ МОНОГРАФІЇ

- Надія Балик** — кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль
- Ольга Барна** — кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль
- Ярослав Василкенко** — викладач кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль
- Інна Грод** — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль
- Сергій Мартинюк** — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль
- Олеся Мартинюк** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри прикладної математики Західноукраїнського національного університету, м. Тернопіль
- Василь Олексюк** — кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

Наукове видання

Авторський колектив

*Балик Надія Романівна,
Барна Ольга Василівна,
Василенко Ярослав Пилипович,
Грод Інна Миколаївна,
Мартинюк Олеся Миронівна,
Мартинюк Сергій Володимирович,
Олексюк Василь Петрович*

ВИБРАНІ ПИТАННЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І ЯВИЩ

Колективна монографія

За редакцією Н. Р. Балик

Дизайнер обкладинки *Віталій Нехай*

Формат 60×84/16. 15,81 ум. др. арк., 13,39 обл.-вид. арк. Тираж 300. Замовлення № 22-95.

Редакція газети «Підручники і посібники».

46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.

Збут: pip.ternopil@ukr.net Редакція: editoria@i.ua

www.pp-books.com.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5143 від 05.07.2016 р.

Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.

Тел.: 096-948-09-27; 097-50-35-376

pip.bookpost@gmail.com