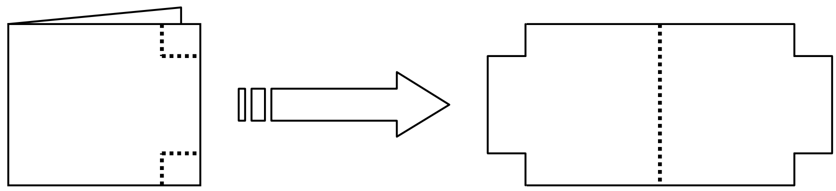
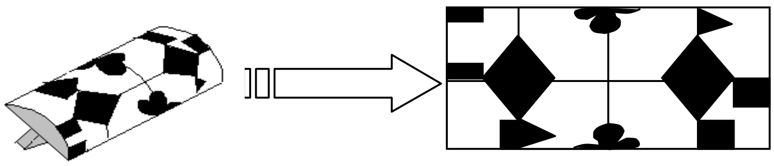


На гуртку дівчинка виготовила печатку. Який відбиток вона отримає, скориставшись виробом?



Навчання в школі потребує науково обґрунтованої системи розвитку просторового мислення учнів, починаючи з дошкільного віку. Введення розділу "Початкові відомості зі стереометрії" у дев'ятому класі є важливим кроком, зробленим у даному напрямку. До вивчення цього розділу вчителям потрібно ставитися з відповідальністю, ретельно готуватися до уроків. Кожне заняття має бути спрямоване на накопиченням знань про просторові властивості геометричних тіл та стати для учнів своєрідним тренуванням просторового мислення

Література

1. Якиманська І. С. Розвиток просторового мислення школярів. – М.: Педагогіка, 1980. – 240 с.
2. Борейко О. С. Стереометричні задачі та просторова уява. //Радянська школа – 1991 – №4. – С. 51-55.
3. Программа для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. – К.: Навчальна книга, 2003.
4. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник. для 10-11 кл. серед. шк. – 2-ге вид. – К.: Освіта, 1995. – 128 с.
5. Ненхо Т. Вивчення шкільної геометрії як засіб розвитку різних видів мислення учнів.//Математика в школі. – 2003. – №2. – С.34-35.
6. Маслова Г. Г. Розвиток просторових уявлень учнів восьмирічної школи під час розв'язання задач з геометрії. – Математика в школе. – 1964. – №3. – С. 47-48.

Ольга Турчак

наук. керівник – доц. В. Д. Галан

ПОБУДОВА АПРОКСИМАЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ДЛЯ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Задача про наближення функцій виникає при розв'язуванні багатьох задач, а іноді і як самостійна. У різних розділах математики функції складної природи наближують функціями, що являються в певному розумінні більш простими і в ролі таких функцій часто виступають многочлени. Багато видатних математиків, серед яких можна відмітити таких як Гаусс, Вейєрштрас, Борель займались питанням наближення функцій многочленами. І в наш час, особливо в зв'язку з стрімким розвитком обчислювальної техніки, ці питання залишаються не менш актуальними.

Як відомо будь-яку наперервну на сегменті [a, b] функцію $f(x)$ можна як завгодно добре наблизити алгебраїчним многочленом. Зрозуміло, що степінь многочлена $p(x)$ може бути досить високий. На практиці обмежуються многочленами не вище певного степеня n, де n – натуральне число. Позначимо через $C_{[a,b]}$ – клас неперервних на [a, b] функцій, а через ω_n підпростір многочленів степеня не вище n з дійсними коефіцієнтами.

Найкращим наближенням елемента $f \in [a,b]$ елементами простору ω_n називається число $E_{\varpi_n}(f) = \inf\limits_{p_n \in \varpi_n} \max\limits_{x \in [a,b]} \left| f(x) - p(x) \right|$. Елемент $p_n^*(x) \in \varpi_n$ називається многочленом найкращого рівномірного наближення, якщо для нього виконується рівність $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)-p_n^*(x)\right|=E_{\varpi_n}(f)$. Із теореми Е. Бореля випливає, що для будь-якої неперервної на сегменті [a, b] функції *f (x)* при кожному n = 0,1,2… в підпросторі ω_n многочленів p_n(x) степеня *n* існує многочлен (тобто елемент із ω_n) її найкращого наближення.

Наступна теорема, яка була доведена П. Л. Чебишевим в 1854 році, послужила відправним пунктом виникнення теорії наближення функцій. В цій теоремі сформульовані необхідні та достатні умови того, щоб для заданої неперервної на [a, b] функції *f*(x) деякий многочлен був многочленом її найкращого рівномірного наближення.

Теорема (Чебишева) Нехай на сегменті [a,b] задана неперервна функція *f*(x). Тоді для того, щоб деякий многочлен $p_n^*(x)$ степеня не вище *n* був многочленом, що найменше відхиляється від *f*(x), необхідно і достатньо, щоб на [a,b] знайшлася щонайменше одна система із n + 2 точок $x_j, a\le x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}\le b,$ в яких різниця $f(x)-p_n^*(x)\overset{df}{=}R_n(x)$

Почергово приймає значення різних знаків.

Досягає по модулю найбільшого на [a,b] значення, тобто в точках x_j повинні виконуватися умови:

$$R_n(x_1)=-R_n(x_2)=R_n(x_3)=\ldots=(-1)^{n+1}R_n(x_{n+2})=\max_{x\in[a,b]}\left|R_n(x)\right|.$$

Система точок $\left\{x_j\right\}_1^{n+2}$, в якій виконуються ці рівності, називається альтернансом, або чебишевським альтернансом, або е-точками.

Введемо тепер наступні позначення: x_0 та h – дійсні числа, причому h>0; m – натуральне число; $f:\left[x_0;x_0+h\right]\to R=(-\infty;+\infty)$ – неперервна на сегменті $\left[x_0;x_0+h\right]$ функція; x – змінна величина, $x\in[0,1]$; $M\left(\theta_j;0\le j\le m+1\right)$ - точка із R^{m+2}, координати якої задовольняють умови

$$0\le\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_m<\theta_{m+1}\le 1 \qquad (1)$$

$R_m\left(f;x_0,h,\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m,\theta_{m+1};x\right)=R_m(x)$ – функція, яка є розв’язком рівняння

$$\begin{vmatrix} f(x_0+xh)-R_m(x) & 1 & x & x^2 & \ldots & x^m & 0 \\ f(x_0+\theta_0 h) & 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \ldots & \theta_0^m & 1 \\ f(x_0+\theta_1 h) & 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^m & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_0+\theta_{m+1} h) & 1 & \theta_{m+1} & \theta_{m+1}^2 & \ldots & \theta_{m+1}^m & (-1)^{m+1} \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Позначимо

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \ldots & \theta_0^m & 1 \\ 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^m & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \theta_{m+1} & \theta_{m+1}^2 & \ldots & \theta_{m+1}^m & (-1)^{m+1} \end{vmatrix};$$

Із рівняння (2) функція $R_m(x)$ визначається однозначно, причому

$$R_m(x)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f(x_0+xh) & 1 & x & x^2 & \ldots & x^m & 0 \\ f(x_0+\theta_0 h) & 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \ldots & \theta_0^m & 1 \\ f(x_0+\theta_1 h) & 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^m & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_0+\theta_{m+1} h) & 1 & \theta_{m+1} & \theta_{m+1}^2 & \ldots & \theta_{m+1}^m & (-1)^{m+1} \end{vmatrix}=f(x_0+xh)-p_m(x), \qquad (3)$$

де

$$p_m(x) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \ldots & x^m & 0 \\ f(x_0+\theta_0 h) & 1 & \theta_0 & \theta_0^2 & \ldots & \theta_0^m & 1 \\ f(x_0+\theta_1 h) & 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^m & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_0+\theta_{m+1} h) & 1 & \theta_{m+1} & \theta_{m+1}^2 & \ldots & \theta_{m+1}^m & (-1)^{m+1} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Для $R_m(x)$ виконується $R_m(\theta_i) + R_m(\theta_{i+1}) = 0,\ i \in \{0,1,2,...,m\}$ при будь-якому наборі (1). Враховуючи теорему Чебишева отримаємо, що $p_m(x)$ буде многочленом найкращого рівномірного наближення, якщо

$$|R_m(f;\theta_0)| = \max_{x\in[0,1]} |R_m(x)| \qquad (5)$$

Умову (5) замінимо на $R'_m(f;\theta_0) = R'_m(f;\theta_1) = ... = R'_m(f;\theta_{m+1}) = 0$ (6)

Враховуючи (3) та (6) складемо відповідну систему рівнянь (відносно θ_i). Цю систему в загальному випадку можна розв'язати лише наближено. Такими наближеними розв'язками будуть $\theta_i = \frac{1}{2}(1-\cos\frac{i\pi}{m+1}),\ i \in \{0,1,...,m+1\}$. (7)

Використовуючи (4) та (7), будуємо многочлен $p_m(x)$.

Для величини $\max\limits_{x\in[0,1]} |R_m(x)|$ можна встановити оцінку зверху, а саме

$$\max_{x\in[0;1]} |R_m(x)| \le C \cdot \max_{x\in[0;1]} |R_m(\theta_0)| = \frac{Ch^{m+1}}{2^{2m+1}\cdot(m+1)!} \max_{x\in[0;1]} \left| f^{(m+1)}(x_0+\xi h) \right|,$$

де $\xi \in (0;1)$, а $C = \max\limits_{x\in[0;1]} \left| \frac{R_m(x)}{R_m(\theta_0)} \right| \approx 1$.

Наведемо приклади побудови многочленів з використанням математичної системи символьних обчислень Mathematica.

Побудова апроксимаційного многочлена четвертого степеня для функції $f(x_0+xh) = e^{x_0+xh}$ у випадку $x_0 = 0, h = 1, x \in [0;1]$.

1. За формулою (4) побудовано апроксимаційний многочлен четвертого степеня p4(x) для функції e^x.

```
P4 = -1/DD * Det[M] // N

1048.58 (0.0009537 + 0.000952421 x + 0.000486505 x^2 + 0.000133228 x^3 + 0.0000664752 x^4)
```

2. Обчислені значення різниці $R_4(x)$ в точках чебишевського альтернансу.

```
E^(θ0*h) - PP4[θ0] // N        E^(θ2*h) - PP4[θ2] // N        E^(θ4*h) - PP4[θ4] // N

-0.0000271154                  -0.0000271154                  -0.0000271154

E^(θ1*h) - PP4[θ1] // N        E^(θ3*h) - PP4[θ3] // N        E^(θ5*h) - PP4[θ5] // N

0.0000271154                   0.0000271154                   0.0000271154
```

Отримані результати свідчать, що знайдені точки θ_i і побудований многочлен $p_4(x)$ практично задовольняють умові теореми Чебишева. Аналогічно будуються многочлени близькі до многочленів найкращого рівномірного наближення довільного степеня для основних елементарних функцій. Можна вказати метод за допомогою якого покращуються апроксимаційні властивості многочленів $p_m(x)$.

Висновки

У роботі знайдено формулу (4) для алгебраїчного многочлена $p_m(f;x)$ степеня $\leq m$, $m \in N$, який являється многочленом найкращого рівномірного наближення гладкої на сегменті $[x_0;x_0+h], h>0,$ функції f.

Для знаходження чисел, що використовуються при побудові $p_m(f;x)$, вказано спосіб складання системи рівнянь і виділення того розв'язку, який потрібно при цьому використати.

Встановлено оцінку зверху величини $\max\limits_{x\in[0,1]}|R_m(x)|$. Приклад, наведений в роботі, свідчить про ефективність застосування побудованого многочлена.

Література

1. Чебишев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Полн. собрание сочинений. – Изд. АН СССР, М. – Л., 1948. – Т. 2. – С. 23-51.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
4. Коллатц Л., Альбрехт Ю. Задачи по прикладной математике: Пер. с нем. – М.: Мир, 1978. – 168 с.
5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: Пер. с польск. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

Ольга Прихідько
наук. керівник – асист. Л.В. Русіна,
асист. В.І. Галан

РЕАЛІЗАЦІЯ ДІАГНОСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ТЕСТІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Тестування відносять до сучасних методів навчання. Розглянемо, як реалізуються функції навчання саме за допомогою цього методу, тобто якими є дидактичні можливості тестів.

Більшість авторів до числа основних відносить контролюючу, навчальну, виховуючу, мотиваційну і розвиваючу функції контролю. Список досить традиційний, оскільки орієнтований виключно на традиційні засоби контролю.

Поява тестів спричинила за собою певне розширення переліку – введення ще однієї функції контролю – **діагностичної**, реалізація якої дозволяє передбачити потенційні можливості учня в освоєнні нового матеріалу.

Діагностична функція педагогічного контролю спрямована на визначення рівня знань, умінь та навичок з метою одержання науково-обгрунтованої інформації для вдосконалення процесу навчання учнів.

Відомо, що кожний засіб діагностики, який використовується сьогодні у вітчизняній педагогіці, має як переваги, так і недоліки, які значною мірою впливають на результати контролю. Застосування таких найбільш поширених форм контролю, як усні та письмові конгрольні роботи, реферати, колоквіуми тощо, які визначають не тільки знання, а й вербальні здібності призводить до значних витрат навчального часу. Екзамени створюють значне психологічне навантаження на учня. Окрім цього, на об'єктивність оцінок великий вплив мають особисті риси та суб'єктивність вчителів.

Діагностична функція витікає з самої суті поточного контролю, націленого на виявлення прогалин в підготовці учнів і ухвалення за наслідками діагностики деяких управлінських рішень, необхідних для вдосконалення навчального процесу. Крім виявлення прогалин до сфери діагностики відносяться встановлення причин прогалин, отримання науково підтвердженої інформацію про характер труднощів, що виникли в учнів в процесі засвоєння нових знань.

Активізація ролі діагностичної функції є, без сумніву, найважливішою умовою підвищення якості сучасного навчального процесу шляхом його індивідуалізації. Завдяки детальному аналізу характеру утруднень педагогічна діагностика відкриває нові можливості в