Звичайно, усі ці функції все ще корисні під час ділової зустрічі, відеочату чи аудіоконференції – але вони дійсно корисні при навчанні користувачів в Інтернеті.

Список використаних джерел:

1. Габрусєв В.Ю., Терещук Г.В. Система управління навчальними ресурсами MOODLE. Друк. Тернопіль: ТНПУ ім. В.Гнатюка. 2011, 60 с.,
2. Посібник користувача BigBlueButton. URL: https://http://docs.bigbluebutton.org (дата звернення 08.04.2021).
3. Система групового дистанційного навчання BigBlueButton https://topof.livejournal.com/379232.html(дата звернення 08.04.2021).
4. Як створити масштабоване рішення для відеоконференцій BigBlueButton https://aws.amazon.com/ru/blogs/opensource/how-to-build-a-scalable-bigbluebutton-video-conference-solution-on-aws/(дата звернення 08.04.2021).

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ОПИСАННЯ ДИНАМІКИ ЧИСЕЛЬНОСТІ ДЕЯКОЇ ПОПУЛЯЦІЙ

Шевчук Владислав Анатолійович
магістрант спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика),
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
shevchuk_va@fizmat.tnpu.edu.ua
Грод Інна Миколаївна
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та методики її навчання,
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
grodin@izmat.tnpu.edu.ua

Матрична модель для описання динаміки чисельності популяцій, структурованих за віковими групами, була запропонована Леслі в работі «On the use of matrices in certain population mathematics» в 1945 році [2] і з тих пір отримала широке розповсюдження при описанні динаміки різноманітних популяцій.

Суть її полягає в наступному. Нехай популяція містить n вікових груп. Тоді в кожний фіксований момент часу популяцію можна охарактеризувати вектор-стовпцем:

$$X(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \cdots \\ x_n(t_0) \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

де $x_i(t_0)$ – чисельність (t_0) i-ї вікової групи ($1 \leq i \leq n$). Вектор-стовпець $X(t^1)$, який характеризує популяцію у наступний момент часу t_1, пов’язаний з вектором $X(t_0)$ через матрицю переходу L: $X(t_1)=L\,X(t_0)$ наступного вигляду

$$L = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_k & \alpha_{k+1} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

У першій стрічці цієї матриці стоять коефіцієнти народжуваності для i-го віку($k\leq i\leq k+p$), під діагоналлю – коефіцієнти виживання для j-го віку ($1\leq j\leq n-1$), а інші елементи рівні нулю.

Такий вигляд матриці базується на припущенні, що за одиничний проміжок часу особини j-ї вікової групи переходять в $j+1$-у, при цьому частина із них гине, а у особин i-ї групи за цей час народжується потомство. Тоді першу компоненту вектора $X(t^1)$ можна обчислити за формулою (1):

$$x_1(t_1) = \sum_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0) = \alpha_k x_k(t_{k0}) + \alpha_{k+1} x_{k+1}(t_0) + \cdots + \alpha_{k+p} x_{k+p}(t_0), \quad (3)$$

де $\alpha_i x_i(t_0)$ $(k\leq i\leq k+p)$ – число особин, які народилися від i-ї вікової групи, а друга і наступні – $x_l(t_1)=\beta_{l-1}x_{l-1}(t_0)$ $(2\leq l\leq n,\ 0\leq\beta_l-1\leq 1)$, де β_{l-1} – коефіцієнт виживання при переході від $l-1$-го віку до l-го.

Таким чином, знаючи структуру матриці L і початковий стан популяції – вектор-стовпець $X(t^0)$, – можна прогнозувати стан популяції в будь-який наперед заданий момент часу t_i :

$$X(t_1)=L\,X(t_0);\ X(t_2)=L\,X(t_1)=L^2\,X(t_0);\ X(t_i)=L\,X(t_{i-1})=L^i\,X(t_0) \quad (4)$$

Об'єктом для моделювання нами був вибраний дикий кабан, який в середньому живе 12 років, самки можуть народжувати на 2 році життя в середньому 6 поросят. Дані представило Копичинське лісництво (площа,що облікується – 330 га) для кафедри ботаніки та зоології Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Дані поданої статистики використали для створення демографічної таблиці 1.

Таблиця 1

Демографічна таблиця

Віковий клас	2017	2018	2019
1	20	57	101
2	29	11	73
3	36	12	82
4	47	57	29
5	71	71	35
6	15	44	39
7	21	49	40
Всього	239	301	399

Алгоритм розробки моделі та її реалізації включає п'ять кроків, комп'ютерне моделювання здійснювали за матеріалами [1]:

обчислюємо коефіцієнти виживання, використовуючи дані таблиці, за формолами:

$$x_{i+1}(t+1) = S_i x_i(t);\ S_i = x_{i+1}(t+1)/x_i(t) \quad (5)$$

коефіцієнт плодовитості першого вікового класу $b_1=0,$ для всіх інших класів коефіцієнти плодовитості рівні і обчислюються за формулами:

$$x_1(t+1) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i\,(t); \qquad b_i = x_1(t+1)\,/\,\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,(t) - x_1(t)\right); \quad (6)$$

матриця Леслі для однорідної моделі має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

робимо прогноз вікової структури популяції для однорідної моделі Леслі за формулами

$$X(t_1)=L\,X(t_0);\ X(t_2)=L\,X(t_1)=L^2\,X(t_0);\ \ldots X(t_i)=L\,X(t_{i-1})=L^i\,X(t_0) \qquad (8)$$

За початковий розподіл беремо $X=(20, 29, 36, 47, 71, 15, 21)^T$.

$$X(t_1)=LX(t_0)=\begin{matrix} 0 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,1 & 0 \end{matrix} * \begin{matrix} 20 \\ 29 \\ 36 \\ 47 \\ 71 \\ 15 \\ 21 \end{matrix} = \begin{matrix} 77 \\ 18 \\ 113 \\ 72 \\ 47 \\ 42 \\ 32 \end{matrix} \qquad (9)$$

Далі знаходимо $X(t_2)=L\,X(t_1)=L^2\,X(t_0)$, $X(t_3)=L\,X(t_2)=L^3\,X(t_0)$ і т.д.

на 11 кроці відбудеться стабілізація для однорідної моделі, після цього для прогнозування ми можемо використовувати формулу

$$X(t)=\lambda^t X(0), \text{де } \lambda - \text{власне значення матриці.} \qquad (10)$$

Згідно теореми Перрона – Фробениуса, матриця Леслі має єдине додатнє власне значеня λ таке, що для будь-якого іншого власного значення r цієї ж матриці виконується умова $|r| \le \lambda$. Це власне значення називається домінуючим, старшим або головним і характеризує швидкість розмноження популяції.

Якщо всі елементи матриці є константами, то, в залежності від значення λ, можливий один із трьох сценаріїв розвитку популяції.

Якщо $\lambda<1$, *то* чисельність популяції спадає. Якщо $\lambda=1$, то чисельність популяції, починаючи з деякого моменту часу, станет постоянной *Якщо* $\lambda>1$, *то чисельність буде зростати. У нас* $\lambda=1,683$ *– зростає.*

За результатами прогнозування побудовано графік динаміки чисельності на наступні роки (рис. 1).

В даній роботі використовувалася виключно інформація про кількість статевозрілих самок даного сезону з врахуванням того, що на наступний сезон в процес включаються ті самки, які були нестатевозрілі. Не було враховано втручання людини в життя тварин.

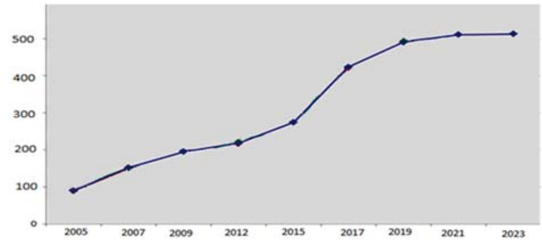

Рис. 1. Графік прогнозу динаміки чисельності популяції

Для опису динаміки популяції цих тварин в пізніші періоди, в зв’язку зі зміною зовнішніх умов, необхідно будувати матрицю Леслі з іншими коефіцієнтами народжуваності і виживання. Відсутність достатньої кількості вихідної інформації не дозволяє побудувати таку модель для теперішнього часу.

Список використаних джерел

1. Балакирева А. Г., Мелащенко О. П. О широком применении модели лесли к изучению динамических систем. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки № 1, 2013.

2. Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrica. 1945. V. 33, N 3. P. 183–212.