$$E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}} \ge \min_{k=0,n+1}\left|r_n(s_k)\right| = \min_{k=0,n+1}\left|\frac{\tau}{1+s_k}\left(T_{n+1}\left(\frac{s_k}{h}\right)+\alpha_n\right)\right| \ge$$

$$\ge \frac{|\tau|}{1+h}\left(\left|T_{n+1}\left(\frac{s_k}{h}\right)\right|-\left|\alpha_n\right|\right) \ge \frac{|\tau|}{1+h}\left(1-\frac{2h(1+h)}{n}\right).$$

Отже, $E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}} \ge \frac{|\tau|}{1+h}\left(1-\frac{2h(1+h)}{n}\right)$, звідки

$$|\tau| \le \frac{1+h}{1-\frac{2h(1+h)}{n}} E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}}. \qquad (12)$$

Оскільки для будь-якого значення $x \in [-h; h]$ виконується нерівність $\left|r_n(x)\right| < \frac{|\tau|}{1-h}\left(1+\frac{2h(1+h)}{n}\right)$, то на основі нерівності (12) маємо:

$$\left\|\log_a(1+x) - y_n(x)\right\|_{C_{[-h;h]}} < \frac{1+h}{1-h}\cdot\frac{1+\frac{2h(1+h)}{n}}{1-\frac{2h(1+h)}{n}}\cdot E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}}.$$

Теорему 2 доведено.

Із теореми 2 випливає, що побудовані многочлени $y_n(x)$ здійснюють найкраще по порядку наближення функції $y = \log_a(1 + x)$, $x \in [-h; h]$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Дзядык В. К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений. // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1974. — 25, № 4. — С. 937–967.
2. Дзядык В. К. Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций ex, sinx и др. // Укр. мат. журн. — 1973. — 25, № 5. — С. 435–453.
3. Галан В. Д., Грод І. М., Кравчук В. Р. Наближення функцій многочленами на довільному проміжку з використанням інтегральних рівнянь Вольтерра. // Буковин. мат. журн. — 2018. — 6, № 3-4. — С. 36–39.
4. Кравчук В. Р. Про один простий спосіб раціональної апроксимації функцій. // Укр. мат. журн. — 1992. — 44, № 7. — С. 248–253.

Нижник Ганна

Науковий керівник – доц. Кравчук Василь

МНОГОЧЛЕННА АПРОКСИМАЦІЯ ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ НА СИМЕТРИЧНОМУ ПРОМІЖКУ

Під час обробки експериментальних даних, чисельному диференціюванні та інтегруванні важливу роль відіграють задачі апроксимації функцій «менш складними» функціями, зокрема многочленами.

Нехай функція $y(x)$, $x \in [-l; l]$, $l > 0$, є розв'язком задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з многочленними коефіцієнтами виду

$$a_0(x)y^{(k)} + a_1(x)y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)y = p(x),\ y^{(j)}(0) = y_j,\ j = \overline{0,k-1},$$

де $a_j(x)$, $j = \overline{0, k}$, і $p(x)$ — деякі многочлени, до того ж $a_0(x) > 0$ для будь-якого $x \in [-l; l]$.

Для наближення функції $y(x)$ многочленами можна використати *апроксимаційний* метод (A-метод), розроблений В. К. Дзядиком [1, с. 251–254]. Цей метод зручний тим, що для наближення функції $y(x)$ достатньо знати лише те, що вона є розв'язком зазначеного інтегрального рівняння, тобто його можна використовувати для пошуку наближених розв'язків таких рівнянь.

У роботі В. К. Дзядика [2] A-метод використаний для наближення деяких елементарних функцій — ним побудовані многочлени, які здійснюють їх асимптотично найкраще або найкраще по порядку наближення. Так, для функції $y = e^x$, де $x \in [-l; l]$, побудовані за A-методом многочлени задовольняють рівність

$$\left\| e^x - P_n(x) \right\|_{C_{[-l;l]}} = \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) E_n(e^x)_{C_{[-l;l]}},$$

де $E_n(e^x)_{C_{[-l;l]}}$ — величина найкращого рівномірного наближення функції $y = e^x$ многочленами степеня не вище n.

Використаємо A-метод для многочленної апроксимації функції $y = a^t$, де $a > 0$, $a \neq 1$, на симетричному проміжку $[-l; l]$. Задамо l у вигляді $l = h \cdot \log_a e$ та зробимо заміну $t = (\log_a e) \cdot hx$. Отримаємо функцію

$y = a^{(\log_a e)\cdot hx}$, тобто $y = e^{hx}$, де $x \in [-1; 1]$.

Для цієї функції обґрунтуємо таке твердження.

Теорема 1. Для будь-якого натурального n алгебраїчний многочлен

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \tag{1}$$

де

$$c_k = \frac{h^k}{k!}\left(1 - \tau \cdot \frac{n+1}{2} \sum_{i=\left[\frac{n+1-k}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^i \frac{(n-i)!}{i!}\left(\frac{2}{h}\right)^{n+1-2i}\right), \qquad k = \overline{0\ n} \tag{2}$$

$$\tau = \left(\frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!}\left(\frac{2}{h}\right)^{n+1-2k}\right)^{-1}, \tag{3}$$

має ту властивість, що для всіх значень $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$e^{hx} - y_n(x) = \tau\left(T_{n+1}(x) + h\int_0^x e^{h(x-z)} T_{n+1}(z)\,dz\right), \tag{4}$$

де $T_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} t_i x^i$ — многочлен Чебишова степеня $n + 1$.

Доведення. Функція $y = e^{hx}$ є розв'язком задачі Коші

$y'(x) - hy(x) = 0,\ y(0) = 1.$

Справді, $y'(x) = he^{hx}$, тому $y'(x) - hy(x) = he^{hx} - he^{hx} = 0;\ y(0) = e^0 = 1.$

Замінимо задачу Коші еквівалентним їй інтегральним рівнянням Воль-терра. Для цього, врахувавши початкову умову, проінтегруємо рівняння $y'(t) - hy(t) = 0$ по змінній t у межах від 0 до x. Одержимо рівняння

$$y(x)=h\int_0^x y(t)\,dt+1. \tag{5}$$

Функцію $y = e^{hx}$, де $x \in [-1; 1]$, наближатимемо многочленом $y_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i,$

який є розв'язком рівняння

$$y_n(x)=h\int_0^x y_n(t)\,dt+1-\tau T_{n+1}(x), \tag{6}$$

де τ — деяка стала. Із цього рівняння маємо:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i = h\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{x^{i+1}}{i+1}+1-\tau\sum_{i=0}^{n+1} t_i x^i. \tag{7}$$

Прирівнявши в рівності (7) коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему $n + 1$ рівнянь з $n + 1$ невідомими $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ і τ, з якої одержуємо рівності (2) і (3).

Розглянемо різницю $e^{hx}-y_n(x)$. Позначимо:

$$e^{hx}-y_n(x)=r_n(x). \tag{8}$$

Від рівності (5) віднімемо почленно рівність (6):

$$y(x)-y_n(x)=h\int_0^x y(t)\,dt-h\int_0^x y_n(t)\,dt+\tau T_{n+1}(x).$$

Врахувавши позначення (8), отримаємо:

$$r_n(x)=h\int_0^x r_n(t)\,dt+\tau T_{n+1}(x). \tag{9}$$

Знайшовши $r_n'(x)$ та $r_n(0)$, замінимо дане інтегральне рівняння еквівалентною йому задачею Коші:

$$r_n'(x)=hr_n(x)+\tau T_{n+1}'(x), \quad r_n(0)=\tau t_0. \tag{10}$$

Розв'язком цієї задачі Коші є функція

$$r_n(x)=\tau\left(T_{n+1}(x)+h\int_0^x e^{h(x-t)}T_{n+1}(t)\,dt\right). \tag{11}$$

Покажемо, що це справді так.

$$r_n(0)=\tau\left(T_{n+1}(0)+he^0\int_0^0 e^{-ht}T_{n+1}(t)\,dt\right)=\tau t_0,$$

$$r_n'(x)=\tau\left(T_{n+1}'(x)+h^2e^{hx}\int_0^x e^{-ht}T_{n+1}(t)\,dt+he^{hx}e^{-hx}T_{n+1}(x)\right)=$$

$$=\tau T_{n+1}'(x)+h\tau\left(h\int_0^x e^{h(x-t)}T_{n+1}(t)\,dt+T_{n+1}(x)\right)=\tau T_{n+1}'(x)+hr_n(x).$$

Отже, розв'язком задачі Коші та інтегрального рівняння (9) є функція (11).

Теорему 1 доведено.

Для многочленної апроксимації функції $y=a^t$, де $a>0$, $a\neq 1$, на симетричному проміжку $[-l; l]$ ми зробили заміну $t=(\log_a e)\cdot hx$, звідки $x=h^{-1}\ln a\cdot t$. Тому, використовуючи побудовані в теоремі 1 многочлени $y_n\left(x\right)$, для наближення функції $y = a^t$ використовуватимемо многочлени $y_n\left(h^{-1}\ln a \cdot t\right) = P_n(t)$.

Теорема 2. Якщо $y_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ — многочлен побудований за А-методом для наближення функції $y = e^{hx}$, де $x \in [-1; 1]$, і $P_n(t) = y_n\left(h^{-1}\ln a \cdot t\right)$, то

$$\left\|a^t - P_n(t)\right\|_{C_{[-l;l]}} = \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) E_n\left(a^t\right)_{C_{[-l;l]}}.$$

Доведення. Оцінимо норму $\left\|a^t - P_n(t)\right\|_{C_{[-l;l]}} = \left\|r_n\left(t\right)\right\|_{C_{[-l;l]}}$. Повернувшись у формулі (4) до заміни, одержимо:

$$r_n\left(t\right) = \tau\left(T_{n+1}\left(h^{-1}\ln a \cdot t\right) + h\int_0^{h^{-1}\ln a \cdot t} e^{\ln a \cdot t - hz} T_{n+1}\left(z\right)dz\right). \qquad (12)$$

Запишемо рівність (12) у вигляді:

$$r_n\left(t\right) = \tau\left(T_{n+1}\left(h^{-1}\ln a \cdot t\right) + \alpha_n\left(t\right)\right), \qquad (13)$$

де $$\left|\alpha_n\left(t\right)\right| = \left|h\int_0^{h^{-1}\ln a \cdot t} e^{\ln a \cdot t - hz} T_{n+1}\left(z\right)dz\right| = \left|e^{\ln a \cdot t} h \int_0^{\theta} T_{n+1}\left(z\right)dz\right| < \frac{2ha^h}{n-1},$$

$\theta \in \left[0; h^{-1}\ln a \cdot t\right]$.

(використали другу теорему про середнє для інтегралів).

Із рівності (13) отримуємо:

$$\left|r_n\left(t\right)\right| \le \left|\tau\right|\left(\left|T_{n+1}\left(h^{-1}\ln a \cdot t\right)\right|\right) + \left|\alpha_n\left(t\right)\right| < \left|\tau\right|\left(1 + \left|\alpha_n\left(t\right)\right|\right).$$

Якщо $n > 2he^h + 1$, то $\left|\alpha_n\right| < 1$. У цьому випадку згідно з рівністю (12) різниця $r_n\left(t\right)$ в $n + 2$ точках $s_k = -\dfrac{h}{\ln a}\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{0, n+1}$ приймає значення з почерговими знаками. Тому на основі теореми Валле-Пуссена і рівності (12) при $n > 2he^h + 1$ виконується нерівність

$$E_n\left(a^t\right)_{C_{[-h;h]}} \ge \min_{k=0,n+1}\left|r_n\left(s_k\right)\right| = \min_{k=0,n+1}\left|\tau\left(T_{n+1}\left(h^{-1}\ln a \cdot s_k\right) + \alpha_n\left(s_k\right)\right)\right| \ge \left|\tau\right|\left(1 - \left|\alpha_n\right|\right),$$

з якої випливає, що

$$\left|\tau\right| \le \frac{1}{1 - \left|\alpha_n\right|} E_n\left(a^t\right)_{C_{[-l;l]}}.$$

Тоді

$$\left\|a^t - P_n(t)\right\|_{C_{[-l;l]}} \le \frac{1 + \left|\alpha_n\right|}{1 - \left|\alpha_n\right|} E_n\left(a^t\right)_{C_{[-l;l]}}.$$

Оскільки

$$\left\|a^t - P_n(t)\right\|_{C_{[-l;l]}} \ge E_n\left(a^t\right)_{C_{[-l;l]}},$$

то з останніх двох нерівностей маємо:

$$\left\|a^t - P_n(t)\right\|_{C_{[-l;l]}} = \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) E_n\left(a^t\right)_{C_{[-l;l]}}.$$

Теорему 2 доведено.

Примітка. Із теореми 2 випливає, що побудовані многочлени $P_n(x)$ здійснюють асимптотично найкраще наближення функції $y = a^t$, де $a > 0$, $a \neq 1$, на симетричному проміжку $[-l; l]$.

Якщо $l < \dfrac{2}{\ln a}$, то можна показати, що

$$E_n\left(a^t\right)_{C_{[-l;l]}} = \frac{2}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{l \cdot \ln a}{2}\right)^{n+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{14}$$

Із рівності (14) прослідковується залежність величини найкращого рівномірного наближення функції $y = a^t$, де $x \in [-l; l]$, від n, a та l.

Отже, використавши A-метод для многочленної апроксимації функції $y = a^t$, де $a > 0$, $a \neq 1$, на симетричному проміжку $[-l; l]$, ми побудували многочлени $P_n(x)$, які здійснюють асимптотично найкраще наближення даної функції, та оцінили величину її найкращого рівномірного наближення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1988. — 304 с.
2. Дзядык В. К. Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, sinx и др. //Укр. мат. журн. — 1973. — 25. №5 — с. 435–453.
3. Галан В. Д., Грод І. М., Кравчук В. Р. Наближення функцій многочленами на довільному проміжку з використанням інтегральних рівнянь Вольтерра. // Буковин. мат. журн. — 2018. — 6, № 3-4. — С. 36–39.
4. Кравчук В. Р. Про один простий спосіб раціональної апроксимації функцій. // Укр. мат. журн. — 1992. — 44, № 7. — С. 248–253.
5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. — М. Наука, 1983. — 384 с.

Бартошевський Тарас

Науковий керівник – канд. пед. наук Федчишин Ольга

ТЕХНІЧНІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ПРЕДМЕТНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ ФІЗИКИ

Фізика є фундаментальною наукою, яка вивчає загальні закономірності перебігу природних явищ, закладає основи світорозуміння на різних рівнях пізнання природи і дає загальне обґрунтування природничо-наукової картини світу. Сучасна фізика, крім наукового, має важливе соціокультурне значення. Вона стала невід'ємною складовою культури високотехнологічного інформаційного суспільства. Сучасна молодь повинна бути готовою до використання сучасних технічних надбань цивілізації, вміти безпечно їх використовувати, швидко адаптуватись в мінливому світі технологій. Освіта повинна забезпечувати адекватність потенціалу трудових ресурсів техніці, технологіям, методам управління виробництвом, які сьогодні оновлюються дуже швидко.

Впродовж тривалого часу сприйняття фізики як прикладної науки спотворювалось, що призвело до втрати нею конкурентоспроможності з соціальними науками, роль яких вочевидь переоцінюють. Це означає, що навчальний процес з фізики слід орієнтувати на формування у молодого покоління знань і умінь, що дозволять їм у майбутньому підтримувати і розвивати науковий і технічний потенціал своєї країни.