повинні зберігатися в фізкабінеті Все це важливо в виховному відношенні. Висловлені вимоги до позакласної роботи є одночасно і принципами її організації: суспільно корисна спрямованість роботи, широка популяризація, обов'язковість і ретельність виконання будь-яких завдань.

6. Нарешті, слід сказати, що позакласна робота принесе найбільшу користь в тому випадку, якщо буде служити інтересам всіх учнів. Тому планувати її слід разом і в зв'язку з плануванням навчальної роботи. Органічний зв'язок позакласної роботи з навчальною також є одним з принципів її організації [5].

Висновки. Правильно організована позакласна робота може дуже вплинути на формування особистості учнів, на розвиток їх самостійності, ініціативи і творчих здібностей. Схильність учнів до моделювання, конструювання, винахідництва загальновідома. Спираючись на неї, учитель фізики може успішно вирішувати завдання політехнічного навчання та профорієнтації учнів. На позакласних заняттях учні вчаться роботі з літературою, вмінню самостійно отримувати необхідні дані і поповнювати свої знання До теперішнього часу склалося чимало різних форм організації позакласної роботи. Це і традиційні фізичні та фізико-технічні гуртки, вечори, доповіді та реферати учнів, олімпіади та конкурси, виставки з фізики і техніки, випуск стінних газет, організація позакласного читання, демонстрація навчальних і науково-популярних кінофільмів, позапрограмні екскурсії, а також порівняно нові форми - «декади фізики», конференції, фізичні «бої», фізичні «вогники» та ін.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. Атаманчук П. С. Інноваційні технології управління навчанням фізики : монографія / Атаманчук П. С. – Кам’янець-Подільський : Кам’янець Подільський державний педагогічний університет, інформаційно видавничий відділ, 1999. – 174 с
2. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / Н.М. Бібік та ін.; під заг.ред. О. В. Овчарук. К.: «К.І.С.», 2004. 112 с.
3. Засєкіна Т. М.,Засєкіна Д. О. Визначення структури предметної компетентності учнів з фізики у 7-9 класах. Компетентнісний підхід в освіті: теоретичні засади і практика реалізації: матеріали методол. семінару, 3 квіт. 2014 р. К. : Ін-т обдарованої дитини НАПН України. 2014. Ч.1. С. 364–370.
4. Ткаченко О. К., Федьович М. В., Моргун Г. В. Позакласна робота з фізики: Навчальний посібник для фізичних спеціальностей. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. – 198 с.
5. Браверман Э.М. Внеклассная работа по физике: содержание и методика проведения: Метод. пособие для проф.-тех. Училищ. – М.: Высш. Шк., 1990. – с.191

*Богач Ілона*
*Науковий керівник – доц. Кравчук Василь*

## МНОГОЧЛЕННА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ У = LOG$_A$(1 + X)

Для вивчення реальних явищ і процесів природи доволі часто використовують їх математичний опис (математичну модель). У ролі математичних моделей можуть, зокрема, виступати диференціальні та інтегральні рівняння. Оскільки знайти точні розв’язки таких рівнянь вдається не завжди, то виникає потреба в пошуку наближених розв’язків.

Для наближення многочленами функцій, які є розв’язками задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з многочленними коефіцієнтами, можна використати *апроксимаційний* метод (*A*-метод), розроблений В. К. Дзядиком [1]. Цей метод зручний тим, що для наближення функції достатньо знати лише те, що вона є розв’язком зазначеної задачі, тобто його можна використовувати для пошуку наближених розв’язків такої задачі.

*A*-метод можна використати й для наближення елементарних функцій, склавши для них відповідні задачі Коші [2]. У даній роботі це зроблено для логарифмічної функції.

Розглянемо функцію $y = \log_a(1 + x)$, де $x \in [-h; h]$, $0 < h < 1$. Побудуємо за *A*-методом многочлен *n*-го степеня для наближення цієї функції.

***Теорема 1.*** Коефіцієнти многочлена $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, побудованого за *A*-методом для наближення функції $y(x) = \log_a(1 + x)$, $x \in [-h; h]$, визначаються за формулами

$$c_k = \frac{(n+1)\tau}{k} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (-1)^{n-k+1-i} h^{-(n+1-2i)} \frac{(n-i!)}{i!(n-2i)!} \cdot 2^{n-2i}, \quad k = \overline{1, n} \qquad (1)$$

$$c_0 = -\tau t_0, \qquad (2)$$

де

$$\tau = \frac{h}{\ln a \cdot (n+1)} \left( \sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{n-i}(n-i)!}{i!(n-2i)!} \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2i} \right)^{-1}, \qquad (3)$$

$t_0$ — коефіцієнт многочлена Чебишова $T_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} t_i x^i$.

*Доведення*. Складемо для функції $y(x) = \log_a(1 + x)$ задачу Коші. Оскільки $y'(x) = \dfrac{1}{\ln a \cdot (1+x)}$, то маємо диференціальне рівняння $\ln a \cdot (1+x) y'(x) = 1.$ Початкова умова: $y(0) = \log_a 1 = 0$. Отже, дана функція є розв'язком задачі Коші

$$\ln a \cdot (1+x) y'(x) = 1; \; y(0) = 0. \qquad (4)$$

Замінимо задачу Коші еквівалентним їй інтегральним рівнянням Воль-терра. Для цього проінтегруємо рівняння $\ln a \cdot (1+t) y'(t) = 1$ по змінній $t$ у межах від 0 до $x$. Враховуючи початкову умову, матимемо:

$$\ln a \cdot \int_0^x (1+t) y'(t)\, dt = \int_0^x dt;$$

$$\ln a \left( (1+x) y(x) - \int_0^x y(t)\, dt \right) = x;$$

$$(1+x) y(x) = \int_0^x y(t)\, dt + \frac{x}{\ln a}.$$

Отже, функція $y(x) = \log_a(1 + x)$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра

$$(1+x) y(x) = \int_0^x y(t)\, dt + \frac{x}{\ln a}. \qquad (5)$$

Функцію $y(x)$ наближатимемо многочленом $y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, який є розв'яз-ком рівняння

$$(1+x) y_n(x) = \int_0^x y_n(t)\, dt + \frac{x}{\ln a} - \tau T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right), \qquad (6)$$

де $\tau$ — деяка стала. Із цього рівняння маємо:

$$(1+x)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n) = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x}{\ln a} -$$

$$-\tau \left( t_0 + t_1 \frac{x}{h} + \ldots + t_{n+1} \left(\frac{x}{h}\right)^{n+1} \right), \qquad (7)$$

де $t_i$ , $i=\overline{0, n+1}$ — коефіцієнти многочлена Чебишова $T_{n+1}(x)$.

Прирівнявши в рівності (7) коєфіцієнти при однакових степенях $x$, отримаємо систему $n+2$ рівнянь з $n+2$ невідомими $c_0$, $c_1$, $c_2$, …, $c_n$ і $\tau$:

$$\begin{cases} c_0 = -\tau t_0; \\ c_0 + c_1 = c_0 + \dfrac{1}{\ln a} - \tau \dfrac{t_1}{h}; \\ c_1 + c_2 = \dfrac{c_1}{2} - \tau \dfrac{t_2}{h^2}; \\ c_2 + c_3 = \dfrac{c_2}{3} - \tau \dfrac{t_3}{h^3}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n-1} + c_n = \dfrac{c_{n-1}}{n} - \tau \dfrac{t_n}{h^n}; \\ c_n = \dfrac{c_n}{n+1} - \tau \dfrac{t_{n+1}}{h^{n+1}}. \end{cases} \qquad (8)$$

Перше рівняння системи дає значення (2) коефіцієнта $c_0$. Значення $\tau$ можна знайти так. Оскільки $(1+x)y_n(x) = \int_0^x y_n(t)\,dt + \dfrac{x}{\ln a} - \tau T_{n+1}\left(\dfrac{x}{h}\right)$, то

$$y_n(x) + (1+x)y_n'(x) = y_n(x) + \frac{1}{\ln a} - \frac{\tau}{h}T_{n+1}'\left(\frac{x}{h}\right);$$

$$(1+x)y_n'(x) = \frac{1}{\ln a} - \frac{\tau}{h}T_{n+1}'\left(\frac{x}{h}\right).$$

Узявши в одержаній рівності $x=-1$, знайдемо, що $\tau = \dfrac{h}{\ln a \cdot T_{n+1}'\left(-\dfrac{1}{h}\right)}$.

Многочлен Чебишова $T_{n+1}(x)$ можна записати у вигляді

$$T_{n+1}(x) = (n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^i (n-i)!2^{n-2i}}{i!(n+1-2i)!} x^{n+1-2i},$$

тому

$$T_{n+1}'(x) = (n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^i (n-i)!2^{n-2i}}{i!(n-2i)!} x^{n-2i},$$

$$T_{n+1}'\left(-\frac{1}{h}\right) = (n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{n-i} (n-i)!}{i!(n-2i)!}\left(\frac{2}{h}\right)^{n-2i},$$

$$\tau = \frac{h}{\ln a \cdot (n+1)} \left( \sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{n-i}(n-i)!}{i!(n-2i)!} \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2i} \right)^{-1}.$$

Знаючи $\tau$, з останнього рівняння системи знаходимо $c_n$, потім підставляємо його значення в попереднє рівняння і послідовно в такий спосіб шукаємо всі коефіцієнти $c_i$. Одержимо формули (1) для коефіцієнтів многочлена $y_n(x)$.

Отже, коефіцієнти многочлена $y_n(x)$, побудованого за $A$-методом для наближення функції $y(x) = \log_a(1 + x)$, $x \in [-h; h]$, і $\tau$ визначаються відповідно за формулами (1), (2) і (3).

*Теорему 1 доведено.*

***Теорема 2.*** Для многочлена $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, побудованого за $A$-методом для наближення функції $y(x) = \log_a(1 + x)$, $x \in [-h; h]$, виконується нерівність

$$\left\| \log_a(1+x) - y_n(x) \right\|_{C[-h;h]} < \frac{1+h}{1-h} \cdot \frac{1 + \frac{2h(1+h)}{n}}{1 - \frac{2h(1+h)}{n}} \cdot E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C[-h;h]}. \quad (9)$$

*Доведення.* Нехай $y(x) - y_n(x) = \log_a(1 + x) - y_n(x) = r_n(x)$. Віднявши від рівності (5) рівність (6), матимемо:

$$(1+x)\left(y(x) - y_n(x)\right) = \int_0^x \left(y(t) - y_n(t)\right) dt + \tau T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right);$$

$$(1+x) r_n(x) = \int_0^x r_n(t)\, dt + \tau T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right).$$

Розв’язком даного інтегрального рівняння є функція

$$r_n(x) = \frac{\tau}{1+x}\left( T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right) + (1+x)\int_0^x (1+t)^{-2} T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right) dt \right). \quad (10)$$

Запишемо рівність (10) у вигляді:

$$r_n(x) = \frac{\tau}{1+x}\left( T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right) + \alpha_n \right), \quad (11)$$

де $\alpha_n = \alpha_n(x) = (1+x)\int_0^x (1+t)^{-2} T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right) dt.$

Оскільки $|\alpha_n| = \left| (1+x)\int_0^\delta T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right) dt \right| < \frac{2h(1+h)}{n}$, то з рівності (11) отримуємо:

$$|r_n(x)| \le \left|\frac{\tau}{1+x}\right| \left( \left| T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right) \right| + |\alpha_n| \right) < \frac{|\tau|}{1-h}\left(1 + \frac{2h(1+h)}{n}\right).$$

Якщо $n > 2h(1 + h)$, то $|\alpha_n| < 1$. У такому випадку, зважаючи на рівність (11), різниця $r_n(x)$ в $n + 2$ точках $s_k = -h\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{0, n+1}$, набуває значень, знаки яких почергово змінюються. Тому на основі теореми Валле-Пуссена і рівності (11) для $n > 2h(1 + h)$ матимемо:

$$E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}} \geq \min_{k=0,n+1}\left|r_n(s_k)\right| = \min_{k=0,n+1}\left|\frac{\tau}{1+s_k}\left(T_{n+1}\left(\frac{s_k}{h}\right)+\alpha_n\right)\right| \geq$$

$$\geq \frac{|\tau|}{1+h}\left(\left|T_{n+1}\left(\frac{s_k}{h}\right)\right|-|\alpha_n|\right) \geq \frac{|\tau|}{1+h}\left(1-\frac{2h(1+h)}{n}\right).$$

Отже, $E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}} \geq \frac{|\tau|}{1+h}\left(1-\frac{2h(1+h)}{n}\right)$, звідки

$$|\tau| \leq \frac{1+h}{1-\frac{2h(1+h)}{n}} E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}}. \qquad (12)$$

Оскільки для будь-якого значення $x \in [-h; h]$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \frac{|\tau|}{1-h}\left(1+\frac{2h(1+h)}{n}\right)$, то на основі нерівності (12) маємо:

$$\left\|\log_a(1+x) - y_n(x)\right\|_{C_{[-h;h]}} < \frac{1+h}{1-h} \cdot \frac{1+\frac{2h(1+h)}{n}}{1-\frac{2h(1+h)}{n}} \cdot E_n\left(\log_a(1+x)\right)_{C_{[-h;h]}}.$$

*Теорему 2 доведено.*

Із теореми 2 випливає, що побудовані многочлени $y_n(x)$ здійснюють найкраще по порядку наближення функції $y = \log_a(1+x)$, $x \in [-h; h]$.

**ЛІТЕРАТУРА:**


1. Дзядык В. К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений. // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1974. — 25, № 4. — С. 937–967.
2. Дзядык В. К. Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций ex, sinx и др. // Укр. мат. журн. — 1973. — 25, № 5. — С. 435–453.
3. Галан В. Д., Грод І. М., Кравчук В. Р. Наближення функцій многочленами на довільному проміжку з використанням інтегральних рівнянь Вольтерра. // Буковин. мат. журн. — 2018. — 6, № 3-4. — С. 36–39.
4. Кравчук В. Р. Про один простий спосіб раціональної апроксимації функцій. // Укр. мат. журн. — 1992. — 44, № 7. — С. 248–253.



*Нижник Ганна*

*Науковий керівник – доц. Кравчук Василь*


## МНОГОЧЛЕННА АПРОКСИМАЦІЯ ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ НА СИМЕТРИЧНОМУ ПРОМІЖКУ

Під час обробки експериментальних даних, чисельному диференціюванні та інтегруванні важливу роль відіграють задачі апроксимації функцій «менш складними» функціями, зокрема многочленами.

Нехай функція $y(x)$, $x \in [-l; l]$, $l > 0$, є розв'язком задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з многочленними коефіцієнтами виду

$$a_0(x)y^{(k)} + a_1(x)y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)y = p(x),\ y^{(j)}(0) = y_j,\ j = \overline{0,k-1},$$

де $a_j(x)$, $j = \overline{0,\, k}$, і $p(x)$ — деякі многочлени, до того ж $a_0(x) > 0$ для будь-якого $x \in [-l; l]$.