УДК 517.938

КОНСТРУКЦІЯ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА У ВИГЛЯДІ ПУЧКІВ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ

І. М. Грод

Терноп. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка
вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна
e-mail: grod@tnpu.edu.ua

В. Л. Кулик

Сілез. техн. ун-т
вул. Кашубська, 23, м. Глівіце, 44-100, Польща

By using the method of alternating Lyapunov functions, we investigate the problem of regularity of linear extensions of dynamical systems on manifolds. Structures of Lyapunov functions in the form of pencils of quadratic forms are constructed.

Используя метод знакопеременных функций Ляпунова, исследуется вопрос регулярности линейных расширений динамических систем на многообразиях. Строятся конструкции функций Ляпунова в виде пучков квадратичных форм.

Одним із важливих питань теорії багаточастотних коливань є питання збереження обмежених інваріантних многовидів автономних систем диференціальних рівнянь при малих збуреннях, а також поведінка розв'язків в околі цих многовидів [1 – 10].

Як відомо, введене в роботі [2] поняття функції Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори дало змогу з єдиної точки зору викласти теорію збурення як диференційовних, так і неперервних інваріантних многовидів. Питання існування функції Гріна – Самойленка тісно пов'язане з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яка розглядається у вигляді квадратичних форм [3 – 5]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватися в деяких точках, а їх похідна згідно з системою рівнянь є знаковизначеною. Досить часто виникає задача побудови функції Ляпунова [6, 8]. Знання конкретного вигляду функції Ляпунова дає можливість оцінити величину збурення динамічних систем, при яких зберігаються обмежені інваріантні многовиди. Задача конструкції функцій Ляпунова для деяких класів лінійних розширень динамічних систем на многовидах залишається актуальною.

Запропонована стаття є продовженням досліджень, проведених в роботах [5, 6], і її метою є з'ясування умов, за яких для системи (1) існує функція Гріна – Самойленка про обмежені інваріантні многовиди.

Нагадаємо деякі поняття.

Нехай задано систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \tag{1}$$

де $x \in R^m$, $y \in R^n$, $f(x)$ — вектор-функція, визначена, неперервна на R^m і локально задовольняє умову Ліпшіца. Матриця $A(x)$ є $(n \times n)$-вимірною, її елементами є дійсні функції, визначені, неперервні й обмежені на R^m. Додатково припускаємо, що кожний розв'язок $x(t;x_0)$ задачі Коші $\frac{dx}{dt}=f(x),\ x|_{t=0}=x_0$ визначений при всіх $t\in R$. Для цього досить припускати, що для вектор-функції $f(x)$ виконується оцінка $\|f(x)\|\leq\alpha_1\|x\|+\alpha_2$ з деякими невід'ємними сталими α_1, α_2.

Будемо надалі використовувати наступні позначення: $C^0\left(R^m\right)$ — простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на R^m, $\langle y,\bar y\rangle=\sum_{j=1}^n y_j\bar y_j$ — скалярний добуток в R^n, норма вектора $\|y\|=\sqrt{\langle y,y\rangle}$, $C'\left(R^m;f\right)$ — підпростір простору $C^0\left(R^m\right)$ таких функцій $F(x)$, що суперпозиція $F(x(t;x_0))$ як функція змінної t є неперервно диференційовною, причому за означенням $\frac{d}{dt}F(x(t;x))\Big|_{t=0}\overset{\text{df}}{=}\dot F(x)\in C^0\left(R^m\right)$. Норму $(n\times n)$-вимірної матриці G будемо розуміти як операторну норму: $\|G\|=\max\limits_{\|y\|=1}\|Gy\|$, $\|S\|_0=\sup\limits_{x\in R_m}\|S(x)\|$. $\Omega^t_\tau(x_0)$ — фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи $\frac{dy}{dt}=A(x(t;x_0))y$, нормована в точці $t=\tau\colon\ \Omega^t_\tau(x_0)\big|_{t=\tau}=I_n$, I_n — одинична матриця.

Поряд із системою (1) запишемо неоднорідну систему

$$\frac{dx}{dt}=f(x),\qquad \frac{dy}{dt}=A(x)y+h(x), \tag{2}$$

де $h(x)\in C^0\left(R^m\right)$.

Кажуть [4], що система (2) має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю

$$y=u(x),$$

якщо функція $u(x)$ належить $C'\left(R^m;f\right)$ і виконується тотожність

$$\dot u(x)\equiv A(x)u(x)+h(x) \tag{3}$$

при всіх $x\in R^m$.

У випадку, коли функція $y=u(x)$ є неперервно диференційовною, тотожність (3) записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^m\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}f_j(x)\equiv A(x)u(x)+h(x).$$

Означення [2]. *Нехай існує $(n\times n)$-вимірна матриця $C(x)\in C^0\left(R^m\right)$ така, що для функції вигляду*

$$G_0(\tau,x)=\begin{cases}\Omega^0_\tau(x)C(x(\tau;x)), & \tau\leq 0,\\ \Omega^0_\tau(x)[C(x(\tau;x))-I_n], & \tau>0,\end{cases} \tag{4}$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau,x)\|\leq K\exp\{-\gamma|\tau|\} \tag{5}$$

з деякими додатними сталими K, γ.

Тоді функцію (4) прийнято називати функцією Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди системи (1).

Існування функції Гріна (4) дозволяє стверджувати, що система (2) має обмежений інваріантний многовид (3) при кожній функції $h(x) \in C^0(R^m)$, і його можна записати в інтегральному вигляді

$$y = u(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, x) h(x(\tau; x))\, d\tau.$$

Нагадаємо [4], що існування невиродженої квадратичної форми $V = \langle S(x)y, y\rangle$ ($\det S(x) \neq 0 \ \forall x \in R^m$), похідна якої вздовж розв'язків системи (1) є знаковизначеною

$$\dot V = \left\langle \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S(x)}{\partial x_j} f_j(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2,$$

забезпечує регулярність цієї системи, а це означає, що вона має єдину функцію Гріна – Самойленка. Якщо ж $\det S(x_0) = 0$ при деякому значенні $x = x_0$, то система (1) не має функції Гріна – Самойленка для обмежених інваріантних многовидів.

Справджується наступне твердження.

Теорема. *Нехай існують $(n \times n)$-вимірні симетричні матриці $S_j(x)$, $j = \overline{1, k}$, неперервно диференційовні й обмежені на R^m, для яких виконуються нерівності*

$$\left\langle \left[\dot S_j(x) + S_j(x)A(x) + A^T(x)S_j(x) \right] T_j y, T_j y \right\rangle \geq \|[T_j - T_{j+1}]y\|^2, \quad j = \overline{1, (k-1)}, \tag{6}$$

$$\left\langle \left[\dot S_k(x) + S_k(x)A(x) + A^T(x)S_k(x) \right] T_k y, T_k y \right\rangle \geq \|T_k y\|^2 \tag{7}$$

з деякими $(n \times n)$-вимірними постійними матрицями T_j, причому матриця T_1 є невиродженою $\det T_1 \neq 0$.

Тоді ми можемо стверджувати, що похідна квадратичної форми

$$V_p = \sum_{j=1}^{k} p_j \langle S_j(x)y, y\rangle \tag{8}$$

згідно з системою (1) буде додатно визначеною при достатньо великих фіксованих значеннях параметрів $p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > p_k > 0$.

Доведення. Розглянемо спочатку суму двох матриць із одним скалярним параметром $p_{k-1} > 0$:

$$p_{k-1} S_{k-1}(x) + S_k(x) = \tilde S(x). \tag{9}$$

Покажемо, що існує таке значення параметра $p_{k-1} > 0$, при якому буде виконуватися нерівність

$$\left\langle \left[\dot{\tilde S}(x) + \tilde S(x) A(x) + A^T(x) \tilde S(x) \right] T_{k-1} y, T_{k-1} y \right\rangle \geq \omega(p_{k-1}) \|T_{k-1} y\|^2 \tag{10}$$

з деяким додатним коефіцієнтом $\omega(p_{k-1})$.

Підставляючи суму матриць (9) у ліву частину нерівності (10), одержуємо

$$\left\langle \left[\dot{\tilde{S}}(x) + \tilde{S}(x)A(x) + A^T(x)\tilde{S}(x)\right] T_{k-1}y, T_{k-1}y \right\rangle =$$

$$= p_{k-1} \left\langle \left[\dot{S}_{k-1} + S_{k-1}A + A^T S_{k-1}\right] T_{k-1}y, T_{k-1}y \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \left[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k\right] \left[T_k + (T_{k-1} - T_k)\right] y, \left[T_k + (T_{k-1} - T_k)\right] y \right\rangle. \qquad (11)$$

Далі, враховуючи нерівності (7) при $j = k-1$, отримуємо оцінку

$$p_{k-1} \left\langle \left[\dot{S}_{k-1} + S_{k-1}A + A^T S_{k-1}\right] T_{k-1}y, T_{k-1}y \right\rangle \geq p_{k-1}\big\|(T_{k-1} - T_k)y\big\|^2, \qquad (12)$$

для додатних значень p_{k-1}. Другий доданок у (11) запишемо у вигляді суми

$$\left\langle \left[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k\right]\left[T_k + (T_{k-1} - T_k)\right] y,\ \left[T_k + (T_{k-1} - T_k)\right] y \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k\right] T_k y,\ T_k y \right\rangle + 2\left\langle \left[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k\right] T_k y,\ (T_{k-1} - T_k)y \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \left[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k\right](T_{k-1} - T_k)y,\ (T_{k-1} - T_k)y \right\rangle \qquad (13)$$

Для першого доданка в рівності (13) маємо оцінку знизу (7), а другий і третій доданки оцінюємо знизу таким чином:

$$2\left\langle \left[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k\right] T_k y,\ (T_{k-1} - T_k)y \right\rangle \geq -2l\,\|T_k y\|\ \|(T_{k-1} - T_k)y\|\,, \qquad (14)$$

$$\left\langle \left[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k\right] (T_{k-1} - T_k)\,y,\ (T_{k-1} - T_k)y \right\rangle \geq -l\,\|(T_{k-1} - T_k)y\|^2\,, \qquad (15)$$

де додатна постійна l визначається нерівністю

$$\left\|\dot{S}_i(x) + S_i(x)A(x) + A^T(x)S_i(x)\right\| \leq l, \quad i = \overline{1,k}. \qquad (16)$$

Враховуючи нерівності (12), (14), (15), із рівності (11) отримуємо оцінку

$$\left\langle \left[\dot{\tilde{S}}(x) + \tilde{S}(x)A(x) + A^T(x)\tilde{S}(x)\right] T_{k-1}y, T_{k-1}y \right\rangle \geq$$

$$\geq (p_{k-1} - l)\,\|(T_{k-1} - T_k)y\|^2 - 2l\|T_k y\|\,\|(T_{k-1} - T_k)y\| + \|T_k y\|^2\,. \qquad (17)$$

Позначимо $\|(T_{k-1} - T_k)y\| = t_1$, $\|T_k y\| = t_2$ і розглянемо квадратичну форму

$$\Phi(t_1, t_2) = (p_{k-1} - l)t_1^2 - 2lt_1t_2 + t_2^2,$$

яка відповідає правій частині нерівності (17).

Для даної функції маємо оцінку

$$\Phi(t_1,t_2) \geq \frac{p_{k-1}-l-l^2}{p_{k-1}-l+1}\left(t_1^2+t_2^2\right) = 2\omega(p_{k-1})\left(t_1^2+t_2^2\right). \tag{18}$$

Далі зазначаємо, що, вибираючи параметр $p_{k-1} > 0$ таким чином, щоб $p_{k-1} > l + l^2$, коефіцієнт

$$\omega(p_{k-1}) = \frac{p_{k-1}-l-l^2}{2(p_{k-1}-l+1)} \tag{19}$$

стає додатним.

Отже, з нерівностей (17), (18) маємо

$$\left\langle \left[\dot{\tilde{S}}(x)+\tilde{S}(x)A(x)+A^T(x)\tilde{S}(x)\right]T_{k-1}y, T_{k-1}y\right\rangle \geq$$
$$\geq \frac{p_{k-1}-l-l^2}{p_{k-1}-l+1}\left(\|(T_{k-1}-T_k)y\|^2+\|T_ky\|^2\right) \geq$$
$$\geq \frac{p_{k-1}-l-l^2}{2(p_{k-1}-l+1)}\|T_{k-1}y\|^2 = \omega(p_{k-1})\|T_{k-1}y\|^2,$$

що й доводить нерівності (10) з додатним коефіцієнтом $\omega(p_{k-1})$, тобто (19).

Тепер розглянемо суму матриць

$$p_{k-2}S_{k-2}(x)+p_{k-1}S_{k-1}(x)+S_k(x) = p_{k-2}S_{k-2}(x)+\tilde{S}(x) = \bar{S}(x) \tag{20}$$

і переконаємося, що при достатньо великих значеннях параметра $p_{k-2} > 0$ виконується нерівність

$$\left\langle \left[\dot{\bar{S}}+\bar{S}A+A^T\bar{S}\right]T_{k-2}y, T_{k-2}y\right\rangle \geq \omega(p_{k-2},p_{k-1})\|T_{k-2}y\|^2, \tag{21}$$

де

$$\omega(p_{k-2},p_{k-1}) = \frac{[p_{k-2}-l(p_{k-1}+1)]\omega(p_{k-1})-l^2(p_{k-1}+1)^2}{2\left[p_{k-2}-l(p_{k-1}+1)+\omega(p_{k-1})\right]}. \tag{22}$$

Для цього в ліву частину нерівності (21) підставимо суму матриць (20). Отримуємо

$$p_{k-2}\left\langle \left[\dot{S}_{k-2}+S_{k-2}A+A^TS_{k-2}\right]T_{k-2}y, T_{k-2}y\right\rangle +$$
$$+\left\langle \left[\dot{\tilde{S}}+\tilde{S}A+A^T\tilde{S}\right]T_{k-2}y, T_{k-2}y\right\rangle \geq p_{k-2}\|(T_{k-2}-T_{k-1})y\|^2 +$$
$$+\left\langle \left[\dot{\tilde{S}}+\tilde{S}A+A^T\tilde{S}\right]\left[T_{k-1}+(T_{k-2}-T_{k-1})\right]y, \left[T_{k-1}+(T_{k-2}-T_{k-1})\right]y\right\rangle =$$
$$= p_{k-2}\|(T_{k-2}-T_{k-1})y\|^2 + \left\langle \left[\dot{\tilde{S}}+\tilde{S}A+A^T\tilde{S}\right]T_{k-1}y, T_{k-1}y\right\rangle +$$

$$+ 2\left\langle \left[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}\right] T_{k-1}y,\ \left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\right\rangle +$$

$$+ \left\langle \left[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}\right] \left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y, \left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\right\rangle .$$

Для оцінки другого доданка цього виразу скористаємося нерівністю (10), а третій і четвертий доданки відповідно оцінимо знизу:

$$2\left\langle \left[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}\right] T_{k-1}y,\ \left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\right\rangle \geq -2l(p_{k-1}+1)\|T_{k-1}y\|\ \|\left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\| ,$$

$$\left\langle \left[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}\right] \left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y,\ \left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\right\rangle \geq -l(p_{k-1}+1)\,\|\left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\|^2 .$$

Отже, оцінка знизу для лівої частини нерівності (21) набирає вигляду

$$\left\langle \left[\dot{\bar{S}} + \bar{S}A + A^T\bar{S}\right] T_{k-2}y, T_{k-2}y\right\rangle \geq (p_{k-2} - p_{k-1}l - l)\,\|\left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\|^2 -$$

$$- 2l(p_{k-1}+1)\|T_{k-1}y\|\ \|\left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\| + \omega(p_{k-1})\,\|T_{k-1}y\|^2 \geq$$

$$\geq \frac{p_{k-2}\omega(p_{k-1}) - l(p_{k-1}+1)\omega(p_{k-1}) - l^2(p_{k-1}+1)^2}{p_{k-2} - l(p_{k-1}+1) + \omega(p_{k-1})}\times$$

$$\times\left(\|\left[(T_{k-2} - T_{k-1})\right] y\|^2 + \|T_{k-1}y\|^2\right) \geq$$

$$\geq \frac{p_{k-2}\omega(p_{k-1}) - l(p_{k-1}+1)\omega(p_{k-1}) - l^2(p_{k-1}+1)^2}{2\left[p_{k-2} - l(p_{k-1}+1) + \omega(p_{k-1})\right]}\|T_{k-2}y\|^2.$$

А це й є підтвердженням того, що справедлива нерівність (17).

Аналогічно, для лінійної комбінації симетричних матриць

$$S_p(x) = p_1S_1(x) + p_2S_2(x) + \ldots + p_{k-1}S_{k-1}(x) + S_k(x)$$

отримуємо оцінку

$$\left\langle \left[\dot{S_p}(x) + S_p(x)A(x) + A^T(x)S_p(x)\right]T_1y, T_1y\right\rangle \geq \omega(p_1, p_2, \ldots, p_{k-2}, p_{k-1})\|T_1y\|^2, \qquad (23)$$

де коефіцієнт $\omega(p_1, p_2, \ldots, p_{k-2}, p_{k-1})$ задається рівністю

$$\omega(p_1, p_2, \ldots, p_{k-2}, p_{k-1}) =$$

$$= \frac{\left[p_1 - l(1 + p_2 + \ldots + p_{k-1})\right]\omega(p_2, \ldots, p_{k-1}) - l^2(1 + p_2 + \ldots + p_{k-1})^2}{2[p_1 - l(1 + p_2 + \ldots + p_{k-1}) + \omega(p_2, \ldots, p_{k-1})]}.$$

Причому для додатних коефіцієнтів $\omega(p_j, p_{j+1}, \ldots, p_{k-1})$, $j = 1, 2, \ldots, (k-3)$, має місце формула

$$\omega(p_j, p_{j+1}, \ldots, p_{k-1}) =$$

$$= \frac{\left[p_j - l(1 + p_{j+1} + \ldots + p_{k-1})\right]\omega(p_{j+1}, \ldots, p_{k-1}) - l^2(1 + p_{j+1} + \ldots + p_{k-1})^2}{2\left[p_j - l(1 + p_{j+1} + \ldots + p_{k-1}) + \omega(p_{j+1}, \ldots, p_{k-1})\right]},$$

$$j = 1, 2, \ldots, (k-3).$$

Зауважимо, що при $j = k - 2$ маємо рівність (19), а постійна l визначається нерівністю (16).

Таким чином, оскільки в нерівності (23) матриця T_1 є невиродженою, то ця нерівність й означає, що похідна згідно з системою (1) квадратичної форми (8) буде додатно визначеною при достатньо великих дійсних значеннях параметрів $p_1 > p_2 > \ldots > p_k > 0$. Цим і закінчується доведення теореми.

Як приклад застосування теореми розглянемо систему

$$\frac{dx_1}{dt} = \sin x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 1,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = (\lambda_1 \cos x_1 - \lambda_2 thx_2 - \lambda_3)y_1 + (\lambda_1 \cos x_1 - \lambda_2 thx_2)y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (\lambda_2 thx_2 + \lambda_3)y_1 + (\lambda_2 thx_2)y_2, \tag{24}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = (-\lambda_2 thx_2 + \lambda_3)y_1 + (\lambda_2 thx_2 - \lambda_1 \cos x_1)y_2 - (\lambda_1 \cos x_1)y_3,$$

де $\lambda_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2, 3$. У даному випадку матриці S_i, T_i вибираємо таким чином:

$$S_1 = \frac{1}{2\lambda_3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \frac{1}{\alpha_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & thx_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \frac{1}{\alpha_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos x_1 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де відповідно

$$\alpha_2 = \min\left(\frac{1}{ch^2 x_2} + 2\lambda_2 th^2 x_2\right) = \begin{cases} 1, & \lambda_2 \geq \dfrac{1}{2}, \\ 2\lambda_2, & 0 < \lambda_2 < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \min\left(\sin^2 x_1 + 2\lambda_1 \cos^2 x_1\right) = \begin{cases} 1, & \lambda_1 \geq \dfrac{1}{2}, \\ 2\lambda_1, & 0 < \lambda_1 < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Обчисливши значення виразів у лівій частині нерівностей (6), (7), отримуємо

$$S_1 A(x) + A^T(x) S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{S}_2 + S_2 A(x) + A^T(x) S_2 = \frac{1}{\alpha_2} \begin{pmatrix} 0 & \left(\lambda_2 th^2 x_2 + \lambda_3 th x_2\right) & 0 \\ \left(\lambda_2 th^2 x_2 + \lambda_3 th x_2\right) & \left(\dfrac{1}{ch^2 x_2} + 2\lambda_2 th^2 x_2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{S}_3 + S_3 A(x) + A^T(x) S_3 =$$

$$= \frac{1}{\alpha_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda_2 th x_2 - \lambda_3) \cos x_1 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 \cos x_1 - \lambda_2 th x_2) \cos x_1 \\ (\lambda_2 th x_2 - \lambda_3) \cos x_1 & (\lambda_1 \cos x_1 - \lambda_2 th x_2) \cos x_1 & \left(\sin^2 x_1 + 2\lambda_1 \cos^2 x_1\right) \end{pmatrix}.$$

Далі, легко перевірити, що нерівності (6), (7) $(k = 3)$ виконуються для системи (20) із записаними вище матрицями. Таким чином, завдяки системі (20) похідна від квадратичної форми

$$V_p = p_1 \left(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3\right) + p_2 y_2^2 th x_2 - p_3 y_3^2 \cos x_1 \tag{25}$$

буде додатно визначеною при достатньо великих значеннях параметрів $p_1 > p_2 > p_3$. Оскільки домінуюча квадратична форма $y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3$ є невиродженою, то й квадратична форма (24) буде невиродженою. Звідси випливає, що система (24) має єдину функцію Гріна – Самойленка при будь-яких додатних значеннях λ_1, λ_2, λ_3.

Зауваження. Система (24) буде регулярною і в тому випадку, коли на місці додатної постійної λ_3 підставити функцію $\lambda_3 = \lambda_3(x_1, x_2)$, яка є неперервною й обмеженою на R^2 і задовольняє умову $\inf\limits_{(x_1,x_2)\in R^2} |\lambda_3(x_1, x_2)| > 0$, а постійні λ_1, λ_2 є додатними.

Література

1. *Kenneth J. Palmer.* On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems // J. Different. Equat. – 1980. – **36**, № 3. – C. 374 – 390.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219 – 1240.
3. *Самойленко А. М., Грод І. М.* Про регулярні лінійні розширення динамічних систем на торі // Нелінійні коливання. – 1998. – № 1. – С. 95 – 103.
4. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. – London, New York: Taylor & Francis, 2004.
5. *Грод І. М., Кулик В. Л.* Про зв'язок функції Гріна і Ляпунова в лінійних розширеннях динамічних систем // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 551 – 557.
6. *Кулик В. Л.* Конструкції функцій Ляпунова в теорії регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 10. – С. 1348 – 1355.
7. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 556 – 559.
8. *Самойленко А. М., Станжицький О. М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями. – Київ: Наук. думка, 2009. – 335 с.
9. *Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю.* Оператор Гріна – Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 948 – 957.
10. *Лагода В. А., Парасюк І. О.* Теорема існування інваріантного перерізу над R^m індефінітно монотонної системи в $R^m \times R^n$ // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 103 – 118.

Одержано 09.02.18