Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

XXV Міжнародна наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

APAMCS - 2019

24-27 вересня

Збірник наукових праць

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

XXV Міжнародна наукова конференція
"Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"

24–27 вересня, 2019

Львів – 2019

УДК 519.6(063)
ББК В1я43

U 31 Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" 24-27 вересня 2019, Львів. - Львів: Видавництво Тараса Сороки, 2019. - 232 с.

ISBN 978-617-7593-22-4

Метою конференції є сприяти співпраці між прикладними математиками, що працюють у споріднених областях у різних установах. Головні теми: методи граничних інтегральних рівнянь, методи граничних елементів, методи скінченних елементів та метод скінченних різниць для прямих та обернених задач, методи ньютонівського типу для нелінійних операторних рівнянь, стохастичні апроксимація та оптимізація з напівмарковськими переключеннями та інші напрямки прикладної та обчислювальної математики.

ISBN 978-617-7593-22-4

Зміст

$$a_{33} = \frac{1}{3}\beta_{43}(1-6\omega),\quad a_{34} = \frac{1}{6}+2\omega,\quad a_{41} = -2\omega,$$

$$a_{42} = 2\omega(2-\beta_{43}),\quad a_{43} = 2\beta_{43}\omega,\quad a_{44} = -2\omega, \qquad (7)$$

де β_{43} – відмінний від нуля параметр. При цьому

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{[4,0]} = \omega h^4(D^2 f + f_y \cdot Df) + O(h^5) \cong h\sum_{i=1}^{4} \widetilde{a}_{4i} k_i, \qquad (8)$$

Запропоновані формули, використовуючи лише чотири звертання до правої частини диференціального рівняння, дозволяють отримувати в кожній вузловій точці не тільки односторонній метод четвертого порядку точності і двосторонні формули третього порядку точності, а також оцінку головного члена похибки двосторонніх наближень.

Зауважимо, що відомі відповідні двосторонні методи Рунге-Кутта третього порядку точності містять щонайменше шість звертань до правої частини вихідного диференціального рівняння [2]-[4].

Дані розрахункові формули використовувались при розрахунку і аналізі розподілу магнітного поля у магнітотвердому шарі, що знаходиться за умов одночасної дії гармонійного за часом та постійного магнітного полів.

1. Pelekh Ya.M., Mentynskyi S.M., Pelekh R.Ya. Nonlinear numerical methods for the solution of initial value problem for ordinary differential equations // Scientific Bulletin of Mukachevo State University. Journal of Scientific Articles. – 2016. – Issue 20(15). – P. 65-75.
2. Горбунов А.Д., Шахов Ю.А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I // Ж. вычисл. матем. и математ. физ. – 1963. – 3, № 2. – С. 239-253.
3. Добронец Б.С. Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы. – Новосибирск: Наука. – 1990. – 206 с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том II. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

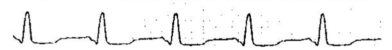
ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ЇХ РЯДИ ФУР'Є

М.В. Приймак, Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца

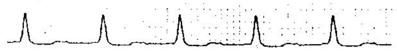
Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Україна

Причиною виникнення періодичних функцій із змінним періодом (ПФЗП) є наявність емпіричних періодичних функцій, період яких вже не є постійним, а певним чином змінюється. Один із прикладів таких функцій – це електрокардіограми (ЕКГ), отримані після дії на організм фізичного навантаження. На рис. 1а-1в показані три відрізки ЕКГ, кожний тривалістю 3 сек., взяті через 60 сек., 120 сек. і 180 сек. після дії навантаження. Із графіків видно, що форма ЕКГ на кожному із них повторюється, але при цьому період повторюваності змінюється, а саме збільшується, та із плином часу стабілізується.

а) 1 хвилина після навантаження



б) 2 хвилини після навантаження



в) 3 хвилини після навантаження

Рис. 1. Відрізки ЕКГ, отримані після дії фізичного навантаження

Яким же чином досліджувати сигнали із змінним періодом (ЗП)? Основоположні кроки в цьому напрямку вже зроблені, зокрема в [1] визначено клас функцій із ЗП, побудована система ортогональних тригонометричних функцій із ЗП [2, 3]. Ці та інші результати стали основою побудови рядів Фур'є ПФЗП. На деяких із цих результатів зупинимось більш детально.

Поняття функції із ЗП як моделі відповідних сигналів вперше було визначено в [1]. Функція $f(x)$, $x \in I \subseteq R$, називається **періодичною із змінним періодом** $T(x) > 0$, якщо для всіх $x \in I$ таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)),\ x \in I = [a, b].$$

Приклад ЗП зображено на рис. 2.

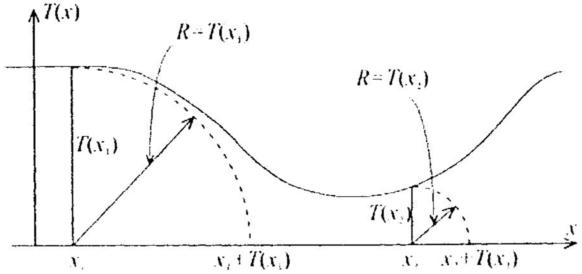


Рис. 2. Графік функції змінного періоду $T(x)$

Для ПФЗП із ЗП $T(x)$ необхідно ще розглядати ЗП $T^{-}(x)$, що забезпечує рівність $f(x) = f(x - T^{-}(x))$. Між періодами $T(x)$ і $T^{-}(x)$ існує взаємозв'язок [2, 3], що виражається формулами

$$T(x) = T^{-}(x + T(x)), T^{-}(x) = T(x - T^{-}(x)).$$

Найпростішими ПФЗП є тригонометричні функції $\sin x^{\alpha}$ та $\cos x^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \geq 0$. На рис. 3 зображена функція $f_1(x) = \sin x^{\frac{3}{4}}$ (товста лінія) та, для порівняння, функція $f_2(x) = \sin x$ (тонка лінія).

ЗП $T_{\alpha}(x)$ та $T_{\alpha}^{-}(x)$ функцій $\sin x^{\alpha}$, $\cos x^{\alpha}$ визначаються формулами [2, 3]:

$$T_{\alpha}(x) = -x+(x^{\alpha}+2\pi)^{\frac{1}{\alpha}},\ x \geq 0,\ T_{\alpha}^{-}(x) = x-(x^{\alpha}-2\pi)^{\frac{1}{\alpha}},\ x \geq T(0).$$

Для випадку $\alpha = \frac{3}{4}$ графіки цих періодів показані на рис. 4. Для порівняння подано також період $T(x) = T = 2\pi$ функцій $\sin x$ і $\cos x$.

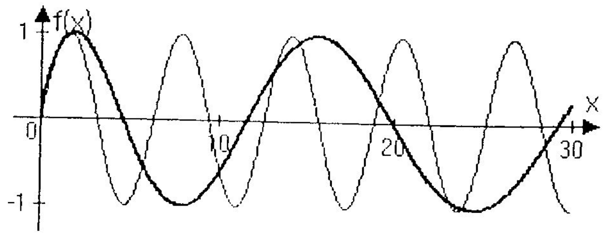


Рис. 3. Функції $f_1(x) = \sin x^{\frac{3}{4}}$ (товста лінія), $f_2(x) = \sin x$ (тонка лінія)

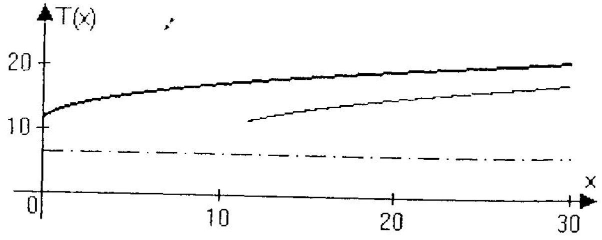


Рис. 4. ЗП $T_{\alpha}(x)$ (товста лінія), $T_{\alpha}^{-}(x)$, $x \geq 2\pi^{\frac{4}{3}} \approx 11.594$ (тонка лінія) та період $T(x) = T = 2\pi$

В [2, 3] доведена теорема, згідно якої тригонометрична система функцій

$$\sin kx^{\alpha},\ \cos kx^{\alpha},\ x \geq 0,\ \alpha > 0,\ k = 1, 2, ...$$

є ортогональною із ваговою функцією $\rho_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, причому інтервал ортогональності $[x, x + T_{\alpha}(x)]$ вже не є постійним, а змінюється і його довжина дорівнює значенню періоду $T_{\alpha}(x)$ в лівій точці інтервалу.

Визначено також скалярний добуток ПФЗП із ЗП $T(x)$ і на цій основі визначено простір $L_2[\rho, (x + T(x))]$, де $\rho = \rho(x)$ – вагова функція.

Ряд Фур'є ПФЗП. Нехай $f(x)$ – періодична функція із

ЗП $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$, $x \geq 0$. Для цієї функції її ряд Фур'є

$$\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha).$$

Коефіцієнти Фур'є визначаються формулами

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi}\int_\tau^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{\alpha}{\pi}\int_\tau^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} f(x)\cos kx^\alpha dx,$$

$$b_k = \frac{\alpha}{\pi}\int_\tau^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} f(x)\sin kx^\alpha dx.$$

Приклад. Розглянемо ПФЗП $f(x) = sign(\sin x^{\frac{5}{7}})$ із ЗП $T(x) = -x + (x^{\frac{5}{7}} + 2\pi)^{\frac{7}{5}}$. Нехай $\tau = 20$. Оскільки в цій точці період $T(20) = -20 + (20^{\frac{5}{7}} + 2\pi)^{\frac{7}{5}} \approx 23,4095$, то для знаходження коефіцієнтів Фур'є інтервал інтегрування рівний $[20;\ 20 + T(20)] \approx [20;\ 43,4095]$.

На рисунку 5 показано графік скінченої суми ряду Фур'є функції $f(x) = sign(\sin x^{\frac{5}{7}})$ (суцільна лінія) та графік самої функції (пунктирна лінія). Аналіз графіків показує, що скінчена сума ряду вже при $n = 9$ достатньо добре відтворює форму самої функції.

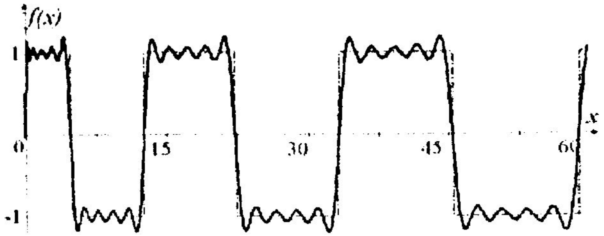


Рис. 5. Функція $f(x) = sign(\sin x^{\frac{5}{7}})$ (пунктирна лінія) та її скінчений ряд Фур'є

Визначено віддаль між функцією $f(x) = sign(\sin x^{\frac{5}{7}})$ та її скінченим рядом при числі коефіцієнтів $n = 10$ і $n = 40$. При $n = 10$ віддаль $\rho(f(x),\ \overline{f}(x)) = 0,50379$, для $n = 40$ $\rho(f(x),\ \overline{f}(x)) = 0,084788$. Отримані результати свідчить про збіжність ряду до самої функції.

1. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т. 10, № 2. – С. 132-141.
2. Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П. Сигнали зі змінним періодом та їх модель // Вісник НТУУ "КПІ". Серія Інформатика, управління та обчислювальна техніка. – К.: Век+, 2013. – №59. – С. 116-121.
3. Приймак М.В. Функції із змінним періодом // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Математика, механіка. – 2016. – Вип. 2 (36). – С. 14-16.

ПРО ОДНУ НЕПЕРЕРВНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ІЗ НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕРАМИ В ОБМЕЖЕННЯХ

О.М. Притоманова

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Теорія оптимального розбиття множин (ОРМ) ефективно застосовується для розв'язання широкого спектру теоретичних та практичних задач класів оптимізаційних задач, які зводяться в математичній постановці до неперервних моделей оптимального розбиття множин [1].

Розглянемо одну практичну виробничо-транспортну задачу оптимального розміщення підприємств з обмеженими обсягами виробництва в умовах невизначеності, для розв'язання якої застосуємо теорію ОРМ [2].

Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області $\Omega \subset E_2$. Скінченне число N виробників