

---

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка

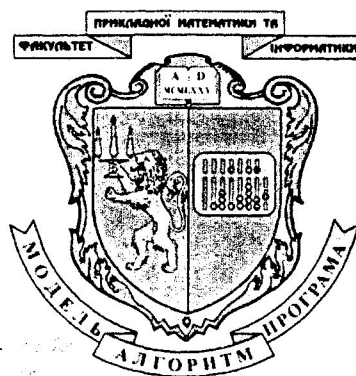
XXV Міжнародна наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ  
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
ТА ІНФОРМАТИКИ

ARAMCS - 2019

24-27 вересня

Збірник наукових праць



Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

XXV Міжнародна наукова конференція  
"Сучасні проблеми прикладної математики  
та інформатики"

24–27 вересня, 2019



Львів – 2019

УДК 519.6(063)  
ББК В1я43

U 31 Матеріали XXV Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” 24-27 вересня 2019, Львів. - Львів: Видавництво Тараса Сороки, 2019. - 232 с.

ISBN 978-617-7593-22-4

Метою конференції є сприяти співпраці між прикладними математиками, що працюють у споріднених областях у різних установах. Головні теми: методи граничних інтегральних рівнянь, методи граничних елементів, методи скінченних елементів та метод скінченних різниць для прямих та обернених задач, методи ньютонівського типу для нелінійних операторних рівнянь, стохастичні апроксимації та оптимізація з напівмарковськими переключеннями та інші напрямки прикладної та обчислювальної математики.

#### Програмний комітет

Бартіш М.	Любінець Я.	Стецюк П.
Венгерський П.	Марчук М.	Халко Р.
Власюк В.	Михаськів В.	Цегелик Г.
Гаращенко Ф.	Міхалек Я.	Чабанюк Я.
Дідманідзе І.	Недашківський М.	Чачанідзе Г.
Єлейко Я.	Притула М.	Чипурко А.
Кицмей Т.	Савула Я.	Шахно С.
Кнопов П.	Семенова Н.	Шинкаренко Г.
Лебедев Є.	Сеньо П.	Ярошко С.

#### Організаційний комітет

Добуляк Л.	Гарасим Я.	Фундак Л.
Хімка У.	Коркуна А.	Шевчук С.
Зінько П.	Костенко С.	Лосева М.

#### Спонсори конференції

softserve



© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2019

ISBN 978-617-7593-22-4

## ЗМІСТ

<i>Баранов М.</i> Нейронні мережі для розпізнавання рукописного тексту . . . . .	8
<i>Bartish M., Kovalchuk O., Ogorodnyk N.</i> Three-step method based on Steffensen's method with an order of convergence $1 + \sqrt{2}$ for solving system of nonlinear equations . . . . .	12
<i>Beridze Z.</i> Current state of wireless network security systems . . . . .	16
<i>Бігун Я., Схутар І.</i> Усереднення в багаточастотних системах диференціально-функціональних рівнянь із звичайними і частинними похідними . . . . .	19
<i>Chabanyuk Ya., Nikitin A., Khimka U.</i> Asymptotic properties of the random evolutions with impulse perturbation process under Levy approximation conditions with the point of equilibrium of the quality criterion . . . . .	23
<i>Чернуха О.Ю., Білуцзяк Ю.І.</i> Оцінка впливу стрибків шуканої функції на міжфазних границях на усереднене поле концентрації у випадкових шаруватих структурах . . . . .	27
<i>Chernyakhivskyy V.V.</i> Some methods for testing undirected graphs . . . . .	32
<i>Чіх В.І., Олійник Р.М.</i> Метод схожості елементів в колаборативній фільтрації . . . . .	36
<i>Didmanidze I., Motskobili I.</i> The issue of forecasting demand for specialists . . . . .	38
<i>Didmanidze I., Tsistskishvili G., Kutchava M.</i> Mathematical calculation of cargo staffing in marine transport means . . . . .	40
<i>Добуляк Л.П., Костенко С.Б., Шевчук С.П.</i> Дослідження розвитку малого бізнесу України за допомогою трендових моделей . . . . .	41
<i>Дзяк І.І., Малюга Ю.І.</i> Розв'язування задач гіперпружного деформування методом скінченних елементів . . . . .	44

<i>Найко А.О., Васильк О.І.</i> Статистичне моделювання випадкових процесів в моделях, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями . . . . .	132
<i>Насітчик О.</i> Задача Коші для півлінійного рівняння дифузії з оператором дробового диференціювання . . . . .	137
<i>Пелес Я.М., Будз І.С., Куринець А.В., Філь Б.М.</i> Методи розв'язування початкової задачі з оцінкою головного члена локальної похибки . . . . .	138
<i>Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П.</i> Періодичні функції із змінним періодом та їх ряди Фур'є . . . . .	143
<i>Притоманова О.М.</i> Про одну неперервну задачу оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях . . . . .	147
<i>Revt S.M.</i> Knowledge Management . . . . .	150
<i>Савенко П., Клакович Л.</i> Методи певних функцій у дослідженнях проблеми неєдності розв'язків диференціальних та нелінійних інтегральних рівнянь . . . . .	152
<i>Сабула Я.Г.</i> Числовий аналіз гетерогенних математичних моделей методом скінченних елементів . . . . .	157
<i>Сеньо П.С.</i> Алгоритм побудови функціональних інтервалів суперпозиції функцій . . . . .	161
<i>Shakhno S.M., Shunkin Yu. V., Yarmola H.P.</i> Analysis of local convergence of Gauss-Newton-Kurchatov method . . . . .	165
<i>Shcherbatyy M.V.</i> Application of radial basis function surrogate models for calculation of functionals in PDE constrained optimization problems . . . . .	169
<i>Sosnitsky A.V., Shevchenko A.I.</i> Universal theory as the new hypothetical general scientific paradigm . . . . .	171
<i>Sybil Yu.M.</i> Dirichlet problem for the wave equation in domain with thin inclusion . . . . .	176
<i>Takidze I.</i> The size of the density and concentration of electrons . . . . .	178
<i>Тертичний Д., Щербина Ю., Колос П.</i> Некласичне застосування самоорганізаційних карт Коховена для обробки зображень . . . . .	179

<i>Токовий Ю.В., Бойко Д.С.</i> Дослідження тривимірних полів температури та термонапружень у не обмежених трансверсально ізотропних тілах . . . . .	184
<i>Tsizh M.</i> Методи складних мереж та машинного навчання в дослідженні великомасштабної структури Всесвіту . . . . .	188
<i>Tymchenko A.A., Zaspá G.O., Savchenko Ye.A.</i> System Analysis of Information Technology for Designing Invariant Optimal Control Systems . . . . .	189
<i>Тимофієва Н.К.</i> Про природу прямих та обернених функцій в комбінаторній оптимізації . . . . .	194
<i>Ульяшук-Мартишук О.В., Міцута О.Р.</i> Алгоритмічні аспекти поширення забруднень через пористе середовище із геобар'єром . . . . .	198
<i>Венгерський П.С., Трушевський В.М.</i> Застосування нейронної мережі до розв'язування задачі стоку мілкої води у кінематичному наближенні . . . . .	203
<i>Yaroshko O.S., Podlevskyi B.M.</i> About one approach to finding the number of eigenvalues in a given region for two-parameter spectral problems . . . . .	208
<i>Ярошко С.М., Ярошко С.А.</i> Обчислення кратних характеристичних чисел модифікованим методом послідовних наближень . . . . .	211
<i>Yezerska T., Hechko R., Mamchar N., Huzyk P., Korkuna A., Doshna Z.</i> Facial Expression Recognition for Portable Devices . . . . .	216
<i>Гайбеш М., Цегельник Г.</i> Чисельний метод типу спуску відшукування розв'язку системи двох нелінійних рівнянь . . . . .	228
<i>Читосеріко П.</i> Підходи до формулювання оптимізаційних задач в гнучкому виробництві . . . . .	230
<i>Дашорський показчик</i> . . . . .	232

$$a_{33} = \frac{1}{3}\beta_{43}(1 - 6\omega), \quad a_{34} = \frac{1}{6} + 2\omega, \quad a_{41} = -2\omega,$$

$$a_{42} = 2\omega(2 - \beta_{43}), \quad a_{43} = 2\beta_{43}\omega, \quad a_{44} = -2\omega, \quad (7)$$

де  $\beta_{43}$  – відмінний від нуля параметр. При цьому

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{[4,0]} = \omega h^4 (D^2 f + f_y \cdot Df) + O(h^5) \cong h \sum_{i=1}^4 \tilde{a}_{4i} k_i, \quad (8)$$

Запропоновані формули, використовуючи лише чотири звертання до правої частини диференціального рівняння, дозволяють отримувати в кожній вузловій точці не тільки односторонній метод четвертого порядку точності і двосторонній формули третього порядку точності, а також оцінку головного члена похибки двосторонніх наближень.

Зауважимо, що відомі відповідні двосторонні методи Рунге-Кутти третього порядку точності містять щонайменше шість звертань до правої частини вихідного диференціального рівняння [2]-[4].

Дані розрахункові формули використовувались при розрахунку і аналізі розподілу магнітного поля у магнітотвердому шарі, що знаходиться за умов одночасної дії гармонійного за часом та постійного магнітного полів.

1. Pelekh Ya.M., Mentynskyi S.M., Pelekh R.Ya. Nonlinear numerical methods for the solution of initial value problem for ordinary differential equations // Scientific Bulletin of Mukachevo State University. Journal of Scientific Articles. – 2016. – Issue 20(15). – P. 65-75.
2. Горбунов А.Д., Шахов Ю.А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I // Ж. вычисл. матем. и математ. физ. – 1963. – 3, № 2. – С. 239-253.
3. Добронец Б.С. Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы. – Новосибирск: Наука. – 1990. – 206 с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том II. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

## ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ЇХ РЯДИ ФУР'Є

М.В. Приймак, Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца

Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Україна

Причиною виникнення періодичних функцій із змінним періодом (ПФЗП) є наявність емпіричних періодичних функцій, період яких вже не є постійним, а певним чином змінюється. Одним із прикладів таких функцій – це електрокардіограми (ЕКГ), отримані після дії на організм фізичного навантаження. На рис. 1а-1в показані три відрізки ЕКГ, кожний тривалістю 3 сек., взяті через 60 сек., 120 сек. і 180 сек. після дії навантаження. Із графіків видно, що форма ЕКГ на кожному із них повторюється, але при цьому період повторюваності змінюється, а саме збільшується, та із плином часу стабілізується.

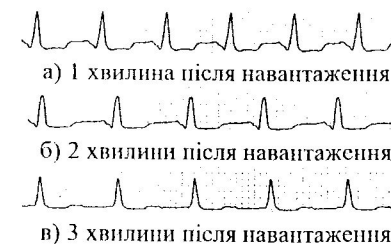


Рис. 1. Відрізки ЕКГ, отримані після дії фізичного навантаження

Яким же чином досліджувати сигнали із змінним періодом (ЗП)? Основоположні кроки в цьому напрямку вже зроблені, зокрема в [1] визначено клас функцій із ЗП, побудована система ортогональних тригонометричних функцій із ЗП [2, 3]. Ці та інші результати стали основою побудови рядів Фур'є ПФЗП. На деяких із цих результатів зупинимось більш детально.

Поняття функції із ЗП як моделі відповідних сигналів вперше було визначено в [1]. Функція  $f(x)$ ,  $x \in I \subseteq R$ , називається **періодичною із змінним періодом**  $T(x) > 0$ , якщо для всіх  $x \in I$  таких, що  $x + T(x) \in I$ , виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)), \quad x \in I = [a, b].$$

Приклад ЗП зображено на рис. 2.

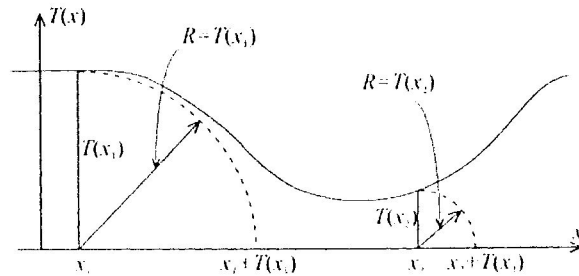


Рис. 2. Графік функції змінного періоду  $T(x)$

Для ПФЗП із ЗП  $T(x)$  необхідно ще розглядати ЗП  $T^-(x)$ , що забезпечує рівність  $f(x) = f(x - T^-(x))$ . Між періодами  $T^+(x)$  і  $T^-(x)$  існує взаємозв'язок [2, 3], що виражається формулами

$$T^+(x) = T^-(x + T(x)), \quad T^-(x) = T^+(x - T^-(x)).$$

Найпростішими ПФЗП є тригонометричні функції  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$ . На рис. 3 зображена функція  $f_1(x) = \sin x^{\frac{3}{4}}$  (товста лінія) та, для порівняння, функція  $f_2(x) = \sin x$  (тонка лінія).

ЗП  $T_\alpha^+(x)$  та  $T_\alpha^-(x)$  функцій  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$  визначаються формулами [2, 3]:

$$T_\alpha^+(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad x \geq 0, \quad T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad x \geq T(0).$$

Для випадку  $\alpha = \frac{3}{4}$  графіки цих періодів показані на рис. 4. Для порівняння подано також період  $T(x) = T = 2\pi$  функцій  $\sin x$  і  $\cos x$ .

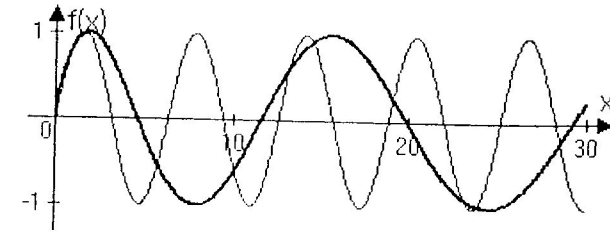


Рис. 3. Функції  $f_1(x) = \sin x^{\frac{3}{4}}$  (товста лінія),  $f_2(x) = \sin x$  (тонка лінія)

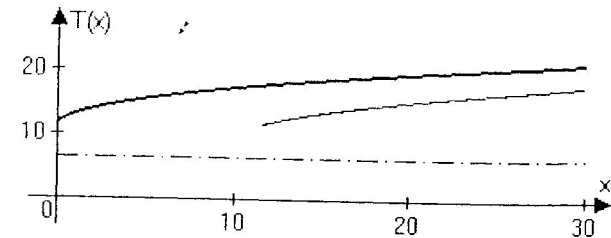


Рис. 4. ЗП  $T_\alpha^+(x)$  (товста лінія),  $T_\alpha^-(x)$ ,  $x \geq 2\pi^{\frac{4}{3}} \approx 11.594$  (тонка лінія) та період  $T(x) = T = 2\pi$

В [2, 3] доведена теорема, згідно якої тригонометрична система функцій

$$\sin kx^\alpha, \quad \cos kx^\alpha, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

є ортогональною із ваговою функцією  $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ , причому інтервал ортогональності  $[x, x + T_\alpha(x)]$  вже не є постійним, а змінюється і його довжина дорівнює значенню періоду  $T_\alpha(x)$  в лівій точці інтервалу.

Визначено також скалярний добуток ПФЗП із ЗП  $T(x)$  і на цій основі визначено простір  $L_2[\rho, (x + T(x))]$ , де  $\rho = \rho(x)$  – вагова функція.

Ряд Фур'є ПФЗП. Нехай  $f(x)$  – періодична функція із

ЗП  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $x \geq 0$ . Для цієї функції її ряд Фур'є

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha).$$

Коефіцієнти Фур'є визначаються формулами

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T_n(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T_n(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \cos kx^\alpha dx,$$

$$b_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T_n(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \sin kx^\alpha dx.$$

**Приклад.** Розглянемо ПФЗП  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{\frac{5}{7}})$  із ЗП  $T(x) = -x + (x^{\frac{5}{7}} + 2\pi)^{\frac{7}{5}}$ . Нехай  $\tau = 20$ . Оскільки в цій точці період  $T(20) = -20 + (20^{\frac{5}{7}} + 2\pi)^{\frac{7}{5}} \approx 23,4095$ , то для знаходження коефіцієнтів Фур'є інтервал інтегрування рівний  $[20; 20 + T(20)] \approx [20; 43,4095]$ .

На рисунку 5 показано графік скінченної суми ряду Фур'є функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{\frac{5}{7}})$  (суцільна лінія) та графік самої функції (пунктирна лінія). Аналіз графіків показує, що скінченна сума ряду вже при  $n = 9$  достатньо добре відтворює форму самої функції.

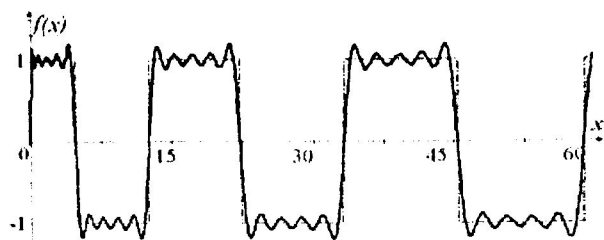


Рис. 5. Функція  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{\frac{5}{7}})$  (пунктирна лінія) та її скінчений ряд Фур'є

Визначено віддаль між функцією  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{\frac{5}{7}})$  та її скінченим рядом при числі коефіцієнтів  $n = 10$  і  $n = 40$ . При  $n = 10$  віддаль  $\rho(f(x), \tilde{f}(x)) = 0,50379$ , для  $n = 40$   $\rho(f(x), \tilde{f}(x)) = 0,084788$ . Отримані результати свідчать про збіжність ряду до самої функції.

1. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т. 10, № 2. – С. 132-141.
2. Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П. Сигнали зі змінним періодом та їх модель // Вісник НТУУ "КПІ". Серія Інформатика, управління та обчислювальна техніка. – К.: Век+, 2013. – № 5 9. – С. 116-121.
3. Приймак М.В. Функції із змінним періодом // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Математика, механіка. – 2016. – Вып. 2 (36). – С. 14-16.

#### ПРО ОДНУ НЕПЕРЕРВНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТТЯ МНОЖИН ІЗ НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕРАМИ В ОБМЕЖЕННЯХ

О.М. Притоманова

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Теорія оптимального розвитку множин (ОРМ) ефективно застосовується для розв'язання широкого спектру теоретичних та практичних задач класів оптимізаційних задач, які зводяться в математичній постановці до неперервних моделей оптимального розвитку множин [1].

Розглянемо одну практичну виробничо-транспортну задачу оптимального розміщення підприємств з обмеженими обсягами виробництва в умовах невизначеності, для розв'язання якої застосуємо теорію ОРМ [2].

Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області  $\Omega \subset E_2$ . Скінченне число  $N$  виробників