дистанційної системи підготовки до олімпіад з ІТ. Відповідно до особливостей олімпіади, ймовірна структура системи підготовки така:

- інформація про Всеукраїнські учнівські олімпіади з інформаційних технологій. Історія, структура та правила проведення;
- вимоги до завдань ІІІ та IV етапів олімпіади;
- нормативні документи;
- завдання олімпіад;
- теоретичний матеріал;
- авторські розв'язки;
- відео-інструкції до розв'язання завдань олімпіад з ІТ;
- корисні посилання;
- дистанційний розв'язок завдань для підготовки [4].

У сучасних умовах розвитку суспільства, дуже важливим є розуміння функціональних можливостей інформаційних технологій й уміння визначати їхнє місце у професіональній діяльності та побуті.

Тому дуже важливими для сучасних школярів є знання інформаційних технологій, не лише на рівні шкільного курсу «Інформатики». Олімпіада з інформаційних технологій дає учням можливість проявити свої здібності, набратись нового досвіду, а також показує прикладний характер знань, які учні отримують в процесі навчання, та в процесі підготовки і участі у олімпіаді. Дуже важливо щоб учні кожної школи, не залежно від її спеціалізації, та географічного розташування, мали доступ до чітко структурованого, логічно підібраного, та якісно проаналізованого теоретичного та практичного матеріалу. Щоб не приходилось витрачати зайвий час на пошуки необхідної інформації серед безлічі матеріалів в мережі Internet, необхідним є створення ресурсу, який в повній мірі відповідатиме потребам вчителів та школярів, при підготовці до олімпіад з інформаційних технологій.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Малишевський О. Підготовка майбутніх вчителів фізико-математичних спеціальностей до використання засобів ІКТ / Олег Малишевський // Проблеми підготовки сучасного вчителя : зб. наук. пр. / Уман. держ. пед. ун-т ім. Павла Тичини ; [редкол.: Н. С. Побірченко (голов. ред.) та ін.]. — Умань : Жовтий, 2011. — 2008. — №3. — С. 111-116.
2. Методичні рекомендації щодо проведення IV етапу І всеукраїнської учнівської олімпіади з інформаційних технологій: [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://obd-ditu.at.ua/metod_pomsc/metod-rek-inform-20011.doc. — Назва з екрану.
3. Наказ МОНмолодьспорт №976 від 15.08.2011 року «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів у 2011/2012 навчальному році»: [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/21556/. — Назва з екрану.
4. Олімпіади з інформаційних технологій: [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://sites.google.com/site/ informacijnihtehnologij/. — Назва з екрану.
5. Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності: [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/ laws/show/z1318-11. — Назва з екрану.

Рапіта Н.

Науковий керівник – доц. Чорний В. З.

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цій статті ми розглядатимемо питання існування і єдиності розв'язку крайової задачі на відрізку [0;1] для звичайного нелінійного диференціального рівняння другого порядку.

Для крайових задач немає єдиних загальних умов існування і єдиності розв'язку. Вони визначаються для окремих класів диференціальних рівнянь із певними типами крайових умов.

Нехай $x \in R_n$ і $f \in R_n$ — вектори з дійсними компонентами. Норму вектора x позначимо $\|x\|$, так що $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$.

Будемо досліджувати таку крайову задачу: на відрізку [0; 1] знайти розв'язок рівняння

$$x'' - x = f(t, x, x'), \qquad (1)$$

який задовільняє крайові умови:

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = 0, \qquad (2)$$

$$t \in [0; 1].$$

де

Розвязок рівняння (1) з врахуванням крайових умов (2) задається наступним чином:

$$x(t) = \left(\frac{(e^{-s} - e^{s})(e^{2-t} - e^{t})}{2(e^2 - 1)}\right)\int_0^t h(s)ds + \left(\frac{(e^{-t} - e^{t})(e^{2-s} - e^{s})}{2(e^2 - 1)}\right)\int_t^1 h(s)ds;$$

Або:

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)\, h(s)ds, \qquad (3)$$

де

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{(e^{-s} - e^{s})(e^{2-t} - e^{t})}{2(e^2 - 1)}, & 0 \le s \le t \le 1 \\ \dfrac{(e^{-t} - e^{t})(e^{2-s} - e^{s})}{2(e^2 - 1)}, & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}; \qquad (4)$$

Далі нам потрібні деякі оцінки:

$$\int_0^1 |G(t, s)|\, ds \le 1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}; \qquad (5)$$

$$\int_0^1 |G_t(t, s)|\, ds \le M; \qquad (6)$$

де

$$M = \max_{0 \le t \le 1} \frac{1}{(e^2 - 1)}(-e^{2-t} + e^{2-2t} + e^2 - e^t + 1 + e^{2t} - e^{-t+1} - e^{t+1});$$

Такі оцінки можна отримати, дослідивши функції на екстремум.

З виразів (3), (5) та (6) отримаємо:

$$\|x(t)\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)\max_{0 \le s \le 1}\|h(s)\|; \qquad (7)$$

$$\|x'(t)\| \le M \max_{0 \le s \le 1}\|h(s)\|; \qquad (8)$$

Далі перейдемо до розгляду питання про існування розв'язків рівняння (1), які задовольняють крайові умови (2). Наступна теорема містить достатні умови існування і єдиності розв'язку крайової задачі (1), (2).

Теорема

Нехай функція $f(t, x, x')$ неперервна для $t \in [0; 1]$ і всіх (x, x') та задовольняє умову Ліпшиця відносно x, x':

$$\|f(t, x_1, x_1') - f(t, x_2, x_2')\| \le v_0\|x_1 - x_2\| + v_1\|x_1' - x_2'\| \qquad (9)$$

зі сталими Ліпшиця $v_0, v_1 > 0$ і настільки малими, що

(10)

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок, який задовольняє крайові умови (2).

Зауваження:

Замість вимоги, щоб f була визначена для значень $t \in [0;1]$, всіх (x, x') досить вважати, що f визначена для $t \in [0;1], \quad \|x(t)\| \leq R, \quad \|x'(t)\| \leq \left(\frac{M}{\left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)}\right)R$, де R задовольняє нерівність:

$$\left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)m \leq R\left[1-\left(\left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)v_0+Mv_1\right)\right], \tag{11}$$

де $m = \max\|f(t,0,0)\|$ для $0 \leq t \leq 1$.

Або просто $N\left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right) \leq R,$ (12)

де $N = max\|f(t,x,x')\|$ для $t \in [0;1], \|x(t)\| \leq R, \quad \|x'(t)\| \leq \left(\frac{M}{\left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)}\right)R,$

Доведення:

Нехай *B* — банахів простір функцій $h(t)$, де $t \in [0;1]$. Функції $h(t)$ мають неперервні перші похідні і норму, яка задається наступним чином:

). (13)

Доведемо дану теорему, користуючись принципом стискуючих відображень теоремою 0.1 [2, 475].

Для того щоб задати відображення T_0 візьмемо в кулі $\|h\| \leq R$ із *B* деяку функцію $h(t)$ і поставимо, що $x(t)$ єдиний розв'язок рівняння

$$x'' - x = f\left(t, h(t), h'(t)\right), \tag{14}$$

який задовольняє крайові умови (1.2).

Нехай $T_0(h(t)) = x(t)$ в кулі $\|h\| \leq R$.

Якщо $T_0(0) = x_0$ і $\|f(t,0,0)\| \leq m$, то з (7), (8) при $h(t) = f(t,0,0)$, будемо мати:

$$\|x_0(t)\| \leq \left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)m; \tag{15}$$

$$\left(\frac{1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}}{M}\right)\|x_0'(t)\| \leq \left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)m; \tag{16}$$

Значить норма функції $x_0(t) = T_0(0)$ з простору В задовольняє нерівність: $|T_0(0)| \leq \left(1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)m$. (17)

Візьмемо довільні $h_1(t)$, $h_2(t)$ із кулі $\|h(t)\| \leq R$.

Нехай $T_0(h_1(t)) = x_1(t)$, $T_0(h_2(t)) = x_2(t)$.

Знайдемо $|T_0(h_1) - T_0(h_2)|$. А для цього оцінимо

$\|x_1 - x_2\|$, $\quad \left(\frac{1-\frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}}{M}\right)\|x_1' - x_2'\|$.

З рівності (7) і умови Ліпшиця (9) отримаємо:

$$\|x_1 - x_2\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)(v_0\|x_1 - x_2\| + v_1\|x_1' - x_2'\|).$$

Розкриємо дужки в правій частині останньої нерівності і врахуємо означення норми (13):

$$\|x_1 - x_2\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0\|x_1 - x_2\| + Mv_1\left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}}{M}\right)\|x_1' - x_2'\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0|h_1 - h_2| + Mv_1|h_1 - h_2| \le \left(\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0 + Mv_1\right)|h_1 - h_2|$$

. (18)

З рівності (8) і умови Ліпшиця (9) отримаємо:

$$\|x_1' - x_2'\| \le M(v_0\|x_1 - x_2\| + v_1\|x_1' - x_2'\|).$$

Домножимо нерівність на $\dfrac{1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}}{M}$, розкриємо дужки:

$$\left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}}{M}\right)\|x_1' - x_2'\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0\|x_1 - x_2\| + Mv_1\left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}}{M}\right)\|x_1' - x_2'\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0|h_1 - h_2| + Mv_1|h_1 - h_2| \le \left(\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0 + Mv_1\right)|h_1 - h_2|$$

. (19)

Оскільки, $T_0(h_1(t)) = x_1(t)$, $T_0(h_2(t)) = x_2(t)$, то з останніх нерівностей (18), (19) і означення норми отримаємо:

$$|T_0(h_1) - T_0(h_2)| \le \left(\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0 + Mv_1\right)|h_1 - h_2|. \qquad (20)$$

Отже, ми маємо відображення T_0 кулі $|h(t)| \le R$. простору B в простір B , яке задовольняє нерівність

$$|T_0(h_1) - T_0(h_2)| \le \left(\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0 + Mv_1\right)|h_1 - h_2|,$$

причому

Крім того,

$$|T_0(0)| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)m$$

і

$$\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)m \le R\left[1 - \left(\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)v_0 + Mv_1\right)\right].$$

А значить виконується принцип стискуючих відображень теорема 0.1 [2, 475], з якої слідує, що відображення T_0 має єдину нерухому точку $x_0(t)$, таку що $T_0(x_0) = x_0(t)$. Оскільки точку $x_0(t)$ ми вибирали, так щоб це був єдиний розв'язок рівняння $x'' - x = f\left(t, h(t), h'(t)\right)$, який задовільняв крайові умови (2), то теорема доведена.

Доведення теореми, враховуючи зауваження, проводиться, використовуючи зауваження до принципу стискуючих відображень (зауваження до теореми 0.1).

Нехай $|f(t, x, x')| \le N$ для $t \in [0; 1], \|x(t)\| \le R, \qquad \|x'(t)\| \le \left(\dfrac{M}{\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}\right)}\right)R$, і виконується нерівність $N\left(1 - \dfrac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right) \le R$.

Для доведення теореми розглянемо оператор $T_0(h(t)) = x(t)$ означений вище.

З умови зауваження і нерівностей (15), (16) отримаємо:

$$\|x(t)\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)m\ ;$$

$$\left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2-1}}{M}\right)\|x'(t)\| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)m;$$

А це показує, що якщо $|h| \le R$, то $x = |T_0(h)|$ задовольняє нерівність $|x(t)| \le \left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right)N$. Значить, якщо справедливо $N\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{e^2 - 1}\right) \le R$, то оператор T_0 відображає кулю $|h(t)| \le R$ в себе. А значить можна застосувати зауваження до теореми 0.1 [2,475], яке говорить, що відображення T_0 має єдину нерухому точку $x_0(t)$, таку що $T_0(x_0) = x_0(t)$. Згідно з означенням оператора T_0, $x_0(t)$ є єдиним розв'язком крайової задачі (1), (2), що і треба було показати.

Таким чином теорема і зауваження до неї доведені.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник / Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.— К.: Либідь,2003. — 600 с.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720с.

Бочар Г.

Науковий керівник – доц. Галан В.Д.

ПРО РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ НА ЗАМКНЕНИХ ОБЛАСТЯХ З КУСКОВО-ГЛАДКОЮ ГРАНИЦЕЮ

1. Майже у всіх галузях математики важливу роль відіграють задачі про апроксимацію функцій.

Під наближенням функції розуміють заміну за певним правилом однієї функції іншою, близькою до вихідної в тому чи іншому сенсі. Практична необхідність в такій заміні виникає в різних ситуаціях: коли цю функцію необхідно замінити більш простою і зручною для обчислень, відновити функціональну залежність за експериментальними даними, тощо.

Ми будемо працювати з таким розділом комплексного аналізу як наближення функції комплексної змінної, який вивчає апроксимацію функцій комплексної змінної за допомогою аналітичних функцій спеціальних класів. Центральною його проблемою є наближення функцій поліномами та раціональними функціями.

Загальна задача про можливість рівномірного наближення поліномами ставиться так: для яких компактів K в комплексній площині будь-яка функція $f(z)$, яка є неперервною на K і голоморфною у безлічі внутрішніх точок K, допускає рівномірну апроксимацію на K (з будь-яким ступенем точності) за допомогою поліномів від z.

С.М. Мергелян [7] повністю розв'язав проблему про можливість рівномірного наближення алгебраїчними многочленами функцій комплексної змінної, заданих на компактних множинах. Прямі та обернені теореми рівномірного наближення досліджувались у роботах багатьох авторів. У роботах Ю.І. Волкова, В.К. Дзядика та Г.А. Алібекова [1,6] вперше знайдено відповідь на питання про те, які необхідні і достатні умови повинна задовольняти на замкнених множинах типу A (з кусково-гладкою границею) функція $f(z)$ для того, щоб її рівномірні наближення алгебраїчними многочленами степеня $\le n$ мали порядок $n^{-s}, s > 0$.

У даній роботі узагальнюються ці результати і розглядається питання про можливість