$$x(t+N)=x(t)=f^N(t,x(t)),$$

тобто $x(t)$ задовольняє рівняння (7). Звідси, згідно леми 1 випливає, що для доведення теореми достатньо показати, що функція $\gamma(t)$ задовольняє рівняння (4).

Припустимо, що це не так, тобто $\gamma(t+1)\neq f(t,\gamma(t))$.

Тоді згідно тотожності $\gamma(t)=f^N(t,\gamma(t))$ матимемо

$$\gamma(t+1)=f^N(t+1,\gamma(t+1)), \qquad f(t,\gamma(t))=f(t,f^N(t,\gamma(t))).$$

Тоді згідно співвідношень (6) і умов 2, 3, знаходимо

$$\left|f^N(t+1,\gamma(t+1))-f(t,f^N(t,\gamma(t)))\right|=\left|f(t+N,f^{N-1}(t+1,\gamma(t+1)))-f(t,f^N(t,\gamma(t)))\right|=$$

$$=\left|f(t,f^{N-1}(t+1,\gamma(t+1)))-f(t,f^N(t,\gamma(t)))\right|\le\omega(t)\cdot\left|f^{N-1}(t+1,\gamma(t+1))-f^N(t,\gamma(t))\right|\le$$

$$\le\omega(t)\cdot\omega(t+N-1)\cdot\left|f^{N-2}(t+1,\gamma(t+1))-f^{N-1}(t,\gamma(t))\right|\le\ldots$$

$$\ldots\le\omega(t)\cdot\omega(t+N-1)\cdot\ldots\cdot\omega(t+1)\cdot\left|\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))\right|$$

Звідси одержуємо

$$\left|\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))\right|\le\theta\left|\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))\right|.$$

Дана нерівність матиме зміст, якщо $\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))=0$, тобто коли $\gamma(t+1)\equiv f(t,\gamma(t))$. Одержана суперечність доводить, що рівняння (4) має єдиний неперервний N - періодичний розв'язок [4].

Теорема доведена.

Отже, у роботі розглянуто основні відомості з теорії диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. Зокрема, основна увага акцентується на початковій задачі для диференціальних рівнянь із сталим і змінним запізненнями аргументу. На прикладах розглянуто знаходження початкової множини диференціального рівняння зі сталим відхиленням аргументу, а також продемонстровано застосування методу кроків для знаходження неперервного розв'язку $x(t)$ рівняння $x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau))$ на відрізку, якщо відома початкова функція на початковій множині E_0. Розглянута теорема існування і єдності розв'язку основної початкової задачі, а також теореми, які забезпечують існування єдиного неперервного N - періодичного розв'язку нелінійних різницевих рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументом. М. : Издательство Наука, 1964. – 128 с.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнений с запаздывающим аргументом. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва Наука, 1972. – 352 с.
3. Пелюх Г. П., Шарковський А. Н. Введение в теорию функциональных уравнений. – К. :Наук. Думка, 1974. – 119 с.
4. Пелюх Г. П. О существовании периодических решений нелинейных разносных уравнений. – К. :Укр. мат. журн., 2002, т.54, №12 с. 1626-1633.

Бабій А.

Науковий керівник – доц. Галан В. Д.

МОДУЛІ НЕПЕРЕРВНОСТІ І СТЕПЕНІ ГЛАДКОСТІ ФУНКЦІЇ

В роботі вивчаються властивості модуля неперервності різних порядків функції f з заданим степенем гладкості $s\geq 0$, досліджується розподіл функцій класу $C^s(I)$ по класах $W^rH_k^w(I)$ та розглядаються деякі інші питання. Наявні технічно трудомісткі перетворення, де доведено кілька допоміжних тверджень, із котрих, на наш погляд, самостійний інтерес представляє лема 3.4.

Робота присвячена вивченню властивостей модуля неперервності порядків неперервних на I (де I - одна з множин: $[a;b]$, чи $[0;+\infty)$, (чи R) функцій, а також дослідженню співвідношень між класами $\tilde{C}^s(I)$ (див. нижче означення 0.3) і класами $W^rH_k^w$. (див. нижче означення 0.1)

Означення 0.1. Нехай: $k\epsilon N, r\epsilon N_0 = \{0\} \cup N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\},\ M > 0$ - фіксоване число, і φ - функція типу k -го модуля неперервності.

Класом $MW^r H(k, I, \varphi)$ називається множина всіх визначених на I неперервних функцій f, кожна з яких r раз неперервно-диферинційована на $I(f^{(0)}(x) := f(x))$, і для кожної з яких

$$w_k\left(f^{(r)}; t\right) \le M\varphi(t), t \ge 0.$$

Функцією типу модуля неперервності будемо називати визначену на $R_0 = [0; +\infty)$ неперервну функцію $w = w(t)$, яка володіє властивостями:

а) $w(0) = 0;$

б) $w(t) > 0$ при $t > 0;$

в) $w(t)$ не спадає на $[0; \infty);$

г) існує постійна $\lambda = \lambda(w) > 0$ така, що при всіх $t \ge \lambda\ w(t) = w(\lambda)$.

Множина всіх функцій типу модуля неперервності позначаємо через Ω.

Означення 0.6. Степенем гладкої функції $w\epsilon\Omega$ називається число :

$$q(w) = \underline{\lim}_{t\to+0} \frac{\ln w(t)}{\ln(t)},\ \ q(w) \ge 0.$$

Покладемо ще

$$\overline{q}(w) := \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{\ln w(t)}{\ln(t)}$$

І через $\Omega(\alpha, \beta)$ позначимо множину всіх тих функцій w типу модуля неперервності, для кожної з яких виконується умова

$$q(w) = \alpha \le \overline{q}(w) = \beta.$$

Означення 0.2. Степенем гладкості неперервної на I функції f $(f\epsilon C(I))$ називається число:

$$q(f) = \sup_{k\epsilon N}\left\{q\left(w_k(f; \cdot)\right)\right\}.$$

Позначимо ще

$$\overline{q}(f) = \sup_{k\epsilon N}\left\{q\left(w(f; \cdot)\right)\right\}.$$

Означення 0.3. Нехай $s \ge 0$ фіксоване число. Класом $\tilde{C}^s(I)$ називається множина всіх тих неперервних на I функцій f, кожна з яких має степінь гладкості $q(f) = s$.

Згідно з цим означенням при всіх $0 \le \alpha \le \beta < +\infty$ класи $\tilde{C}^\alpha(I)$ і $\tilde{C}^\beta(I)$ не мають спільних елементів і клас $C(I) = \bigcup_{s\ge0} \tilde{C}^s(I)$.

Відомо, що:

1) якщо $f\epsilon\tilde{C}^s(I)\ i\ s\epsilon[0; +\infty)\backslash N$, то функція f буде $r = [s]$ ([s]- ціла частина S) раз неперервно диференційована на I; $f^{(r)}\epsilon C(I)$ і при кожному $n\epsilon N$.

$$\lim_{t\to+0} \frac{w_{r+k}(f; t)}{t^r w_1(f^{(r)}; t)} > 0 \qquad (1)$$

2) якщо $f\epsilon\tilde{C}^s(I)$ і $s = r + 1\epsilon N$, то функція f буде r раз неперервно диференційованою на I і при всіх натуральних $k \ge 2$ будуть виконуватися нерівності:

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{w_{r+k}(f; t)}{t^r w_2(f^{(r)}; t)} > 0 \qquad (2)$$

Лема 1. Нехай (використовуючи прийняті в цьому параграфі позначення) функції $w = w(p; x)$ визначена наступним чином:

$$w(p;x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x=0, \\ \varphi_n(p,\beta;x), \text{ якщо } x\epsilon[x_{2n+1}(p);x_{2n-1}(p)), \\ \varphi_1(p,\beta;x_1), \text{ якщо } x\geq x_1(p)=x_1 \end{cases} \quad (*)$$

Тоді $w(p;x)\epsilon\Omega(\alpha,\beta)$, тобто функції $w(p;x)$ при всіх допустимих значень p, які є функціями виду модулів неперервності зі степенем гладкості $q\big(w(p,\cdot)\big)=\alpha$ і для кожної з них

$$\bar{q}\big(w(p,\cdot)\big):=\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{\ln w(p,x)}{lnx}=\beta.$$

Лема 2. Нехай $\alpha\epsilon[0;1],\beta>\alpha,m>\beta,m\epsilon N,p\epsilon(\beta,m]\cap N,w(p;x)$ – функція типу модуля неперервності, визначена на $[0;\infty)$ з допомогою рівності (*) і

$$f_p(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x=0, \\ x\int_x^{+\infty}dv_1\int_{v_1}^{+\infty}dv_2\ldots\int_{v_{p-2}}^{+\infty}dv_{p-1}\int_{v_{p-1}}^{+\infty}\frac{w(p;v_p)}{v_p^{p+1}}dv_p, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$$

Тоді $f_p(x)$ – неперервна на $[0;+\infty)$ функція і при кожному натуральному $k\leq p+1$

$$w_k\big(f_p;t\big)=(-1)^{k-1}\Delta_t^k\big(f_p;0\big),t>0$$

В перших трьох теоремах роботи узагальнюються співвідношення (1) і (2). Зокрема встановлено, що в випадку, коли s належить $[0;+\infty)\backslash\mathrm{N}$ в нерівностях (1) множник $w_1\big(f^{(r)};t\big)$ може бути замінений множником $w_m\big(f^{(r)};t\big)$, в якому m - натуральне число, не менше 2.

Теорема 1. Нехай $\alpha\epsilon[0;1],m\epsilon N,m\epsilon\alpha$. Тоді серед функцій класу $\tilde{C}^\alpha(I)$ знайдеться функція f така, що при кожному натуральному $k\leq m$

$$\underline{\lim_{t\to+0}}\frac{w_{k+1}(f;t)}{w_k(f;t)}=0$$

і всіх натуральних p

$$\underline{\lim_{t\to+0}}\frac{w_{k+1+p}(f;t)}{w_{k+1}(f;t)}>0.$$

Теорема 2. Нехай $\alpha\epsilon[0;1],\beta>\alpha,m\epsilon N,m>\beta$. Тоді в множині $\Omega(\alpha;\beta)$ існує функція w така, що при кожному натуральному $p\epsilon(\beta,m]$ клас H_{p+1}^w. буде ширшим, ніж клас H_p^w.

Як видно із цієї теореми, величина $\overline{q}(w)=\beta$ не приносить корисної інформації про насиченість класів H_p^w, визначених за допомогою функцій $w\epsilon\Omega(\alpha;\beta)$, з збільшенням числа k.

Наступна теорема відноситься до класу функцій, визначених за допомогою випуклих вверх модулів неперервності.

Відмітимо тут і той факт, що (як видно із теореми 2) величина $\overline{q}(w)=\overline{q}$ не несе корисної інформації про насиченість класів $H_k^w(I)$ із збільшенням k. Основний результат роботи – теорема 3 про співвідношення між класами $\tilde{C}^s(I)$.

Теорема 3. Нехай $s\geq0$ – дійсне число, $k\epsilon N,w$ - функція типу модуля неперервності, $q(w)=q=\underline{\lim}_{t\to+0}\frac{lnw(t)}{\ln(t)}$ – степені гладкості функції W і $q(w)=q=\overline{\lim}_{t\to+0}\frac{lnw(t)}{\ln(t)}$.
Тоді

а) при будь-якому $r>0$ і кожному $k<q$ $\tilde{C}^s(I)\cap H_k^w(I)=\emptyset$;

б) при довільному $s<q$ і всіх k $\tilde{C}^s(I)\cap H_k^w(I)=\emptyset$;

в) у випадку $s=q$ існує континуальна множина класів $H_{[s]+1}^w(I)$ таких, що $\tilde{C}^s(I)\cap H_{[s]+1}^w(I)=\emptyset$;

г) при будь-якому $s>\overline{q}$ і всіх $\mathrm{k}>\mathrm{s}$ $\tilde{C}^s(I)\subset H_{[s]+1}^w(I)$.