Оскільки $\text{одгно}\omega$ – м. н. першого порядку, то для $\forall t \geq 0$ і всіх $u\in$ [t;2t], $\omega(t) \leq \omega(u) \leq \omega(2t) \leq 3\omega(t)$ тоді $\omega_2(f;t) = 2t\int_t^{2t} \omega(u)u^{-2}du \approx \omega(t)$ і таким чином $f\in H_2^{\omega}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Галан Д.М. Об одной гипотезе Дзядика.- Укр. матем. жур.н., 1975, 27, Л 5, с.579 – 588.
2. Галан Д.М. О классах неприливних функцій, определяемих с помощю функции типа модуля неперервності со степеню гладкості $q = 1$. - Укр. матем. жур.н., 1980, 32, Л 5, с.585 – 592.
3. Галан В.Д., Галан Д.М. О неперивних функціях с заданой степеню гладкості и их классификація. :Международная конференція потеории приближения функцій: Тезиси докладов. Киев, 1993 с 40.
4. Гусейнов В.Г., Ильясов Н.А. Дифференциально и гладкосние свойста неперивних функцій. – Мат. Заметки, 1977, 29,56, с.785-794.
5. Вовчук И.А. Некоторие замечания о функціях типа модуля неперервности порядка $k = 2$. – вопроси теори приближений функции.УССР, 1976, С.194-199.
6. Дзядик В.К.Введения в теорію равномерного приближения функцій полиномами. – Наука, 1977.

Янік Д.

Науковий керівник – Качурівський Р. І.

ПОЧАТКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Постановка проблеми. Одним із шляхів пізнання навколишнього середовища є дослідження математичної моделі відповідного процесу чи явища. Значну роль при побудові таких моделей відіграють диференціальні рівняння з відхиленням аргументу. Зокрема, широко використовуються в теорії автоматичного керування, в теорії коливальних систем, при вивчені проблем пов'язаних із горінням палива у двигунах ракет, а також при вивчені проблем тривалого прогнозування в економіці, фізиці, хімії та інших областях науки і техніки, де наявність відхилень (запізнень) є причиною явищ, які й впливають на хід процесів.

Із розвитком інформаційних та новітніх технологій виникла потреба у виявленні і попереджені проблем, які створюються за рахунок відхилень. В системах автоматичного регулювання запізненням є проміжок часу, який практично завжди існує і необмежений для регулювання імпульсу на вході. Причиною нестабільного горіння палива у ракетних двигунах є, як прийнято вважати, наявність часу запізнення, який необхідний для перетворення паливної речовини у продукт горіння тощо. У зв'язку із цим, вивчення теорії диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, на мою думку, є актуальним.

Мета роботи - надати основні відомості з теорії диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, а саме: класифікувати рівняння, описати алгоритм знаходження початкової множини при сталому і змінному відхиленнях, а також описати найпростіший метод знаходження неперервного розв'язку, провести доведення теореми існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння з відхиленням аргументу, а також надати відомості з теорії періодичних розвязків нелінійних різницевих рівнянь.

Аналіз останніх досліджень. У зв'язку із потребами багатьох прикладних наук, систематичне вивчення рівнянь з відхиленням аргументу розпочалося в 40-х роках XX століття такими вченими як: А. Мишкіс, Е. Райт, Р. Белман; і набуло продовження у працях А. Ельсгольца, С. Норкина, Дж. Хейла, А. Халаная, Г. П. Пелюха, А. М. Шарковського та інших.

Теоретичне вирішення проблеми вимагає насамперед уточнення змісту вказаних понять: диференціальні рівняння із відхиленням аргументу, початкова задача для диференціальних рівнянь із відхиленням аргументу, початкова множина, початкова точка, метод кроків, характеристичний квазіполіном.

Диференціальним рівнянням з відхиленням аргументу називають диференціальні рівняння, в якому невідома функція і її похідна входять при різних значеннях аргументу, наприклад: $x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \tau > 0$.

Основна початкова задача, аналогічна задачі Коші, полягає у визначенні неперервного розв'язку $x(t)$ рівняння $x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))$, де $\tau > 0$, при $t > t_0$, якщо $x(t) = \varphi(t)$ на множині $[t_0 - \tau, t_0]$. Тобто розв'язком даного рівняння є інтегральна крива визначена на відрізку $[t_0 - \tau, t_0] \cup [t_0, +\infty)$, де неперервна функція $\varphi(t)$ задана на відрізку $[t_0 - \tau, t_0]$ називається *початковою*.

Відрізок $[t_0 - \tau, t_0]$, на якому задана початкова функція, називається *початковою множиною* і позначається E_{t_0}. Точка t_0 називається *початковою точкою*.

Найбільш природнім методом розв'язку цієї задачі є так званий метод кроків (метод послідовного інтегрування), який полягає в тому, що неперервний розв'язок $x(t)$ поставленої задачі визначається із диференціальних рівнянь без запізнень $x'(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau))$ при $t_0 \le t \le t_0 + \tau$, $x(t_0) = \varphi_0(t_0)$.

Найбільш вивчений і важливий тип диференціальних рівнянь із відхиленням аргументу є диференціальне рівняння із запізненням аргументу, оскільки ці рівняння описують процеси із післядією і відповідно мають велике застосування в механіці, техніці, фізиці, економіці, біології і особливо в теорії автоматичного керування.

Диференціальним рівнянням із запізненням аргументу називають диференціальне рівняння з відхиленням аргументу, в якому похідна найвищого порядку від невідомої функції входить при однакових значеннях аргументу і цей аргумент не менший ніж всі аргументи невідомої функції і її похідних різних порядків, які входять у рівняння [3].

Розглянемо лінійні диференціальні рівняння із запізненням аргументу. Найпростішим автономним рівнянням є рівняння виду

$$x'(t) = a\,x(t) + b(t-h) \qquad (*)$$

де $h > 0$, а a, b - довільні дійсні числа. Теорія лінійних рівнянь будується по аналогії з теорією звичайних диференціальних рівнянь. Довільний розв'язок лінійного автономного звичайного диференціального рівняння є лінійною комбінацією розв'язків виду $t^l e^{\lambda t}$ $(\lambda \in C)$. Це саме стосується рівняння (*). Для перевірки достатньо підставити функцію $e^{\lambda t}$ у рівняння (*):

$$\lambda e^{\lambda t} = a e^{\lambda t} + b e^{\lambda(t-h)},$$

$$e^{\lambda t}\left(\lambda - a - b e^{-\lambda h}\right) = 0.$$

Позначимо через q комплексну функцію комплексного аргументу, яка задається формулою

$$q(\lambda) = \lambda - a - b e^{-\lambda h},$$

В результаті одержимо

$$q(\lambda) e^{\lambda t} = 0.$$

Звідси, функція $e^{\lambda t}$ буде розв'язком рівняння (*) тоді і тільки тоді, коли λ буде нулем функції q. Функцію q називають *характеристичним квазіполіномом* або *характеристичною функцією рівняння* (*), рівняння

$$q(\lambda) = 0 \qquad (**)$$

називають *характеристичним рівнянням*, а його розв'язок - *характеристичним значенням* (або *числами*, або *коренями*) рівняння (*).

Характеристичне рівняння (**) має нескінченну множину коренів. Тому множина розв'язків рівняння (*) (на відміну від множини розв'язків звичайного лінійного диференціального рівняння) нескінченну кількість коренів, в тому числі, функції виду $t^l e^{\lambda t}$ при різних l та λ лінійно незалежні [1].

Основний матеріал та результати досліджень.

Розглянемо диференціальне рівняння зі сталим відхиленням аргументу ($\tau > 0$).

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)). \qquad (1)$$

Для того, щоб знайти початкову множину на якій задаватиметься початкова функція необхідно розглянути ті значення $(t-\tau)$, які менші t_0, де $t > t_0$. Нехай $g(t) = t - \tau$, при початковій точці t_0

$$\begin{cases} t - \tau < t_0 \\ t > t_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t < t_0 + \tau \\ t > t_0 \end{cases} \Rightarrow t \in (t_0, t_0 + \tau)$$

На інтервалі $(t_0, t_0 + \tau)$ значення $(t-\tau)$ вийдуть за межі інтервалу $(t_0, +\infty)$ на якому шукаємо неперервний розв'язок $x(t)$ рівняння (1).

Початковою множиною буде область значень функції $g(t) = t - \tau$ на $[t_0, t_0 + \tau]$. Функції $g(t)$ монотонно зростає на даному відрізку, оскільки $g'(t) = 1 > 0$.

Зобразимо схематично графік даної функції (рис. 1).

$$g(t_0)=t_0-\tau$$
$$g(t_0+\tau)=t_0+\tau-\tau=t_0$$

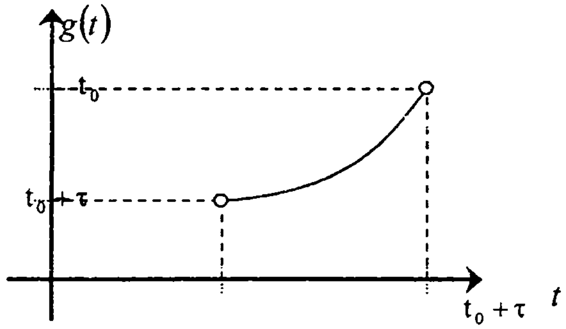

Рис. 1

Отже початковою множиною, на якій задаватиметься початкова функція $\varphi(t)$ є відрізок $[t_0-\tau, t_0]$. Для того, щоб розв'язок рівняння (1) був неперервний накладемо умову, що $x(t_0+0)=\varphi(t_0)$. Крива розв'язку $x(t)$ рівняння (1) є сукупністю кривої $x(t)$ на відрізку $[t_0, t_0+\tau]$, а також кривої початкової функції $x(t)=\varphi(t)$ на відрізку $[t_0-\tau, t_0]$.

Якщо ж запізнення змінне, тобто $\tau=\tau(t)$, то початкова задача для рівняння

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \quad (2)$$

полягає у знаходженні розв'язку рівняння (2) при $t>t_0$, причому початкова множина E_{t_0} складається із точки t_0 та із тих значень $(t-\tau(t))$, які менші t_0 при $t>t_0$. Вважатимемо, що $x(t)=\varphi(t)$ на множині E_{t_0}. Для того, щоб розв'язок рівняння (2) був неперервний, накладемо умову, що $x(t_0+0)=\varphi(t_0)$ [2].

Приклад 1. Знайти початкову множину для рівняння $x'(t)=f(t,x(t),x(t-\cos^2 t))$, при початковій точці $t_0=0$.

Оскільки $\tau(t)=\cos^2 t$ – змінне, то початкова функція $\varphi(t)$ повинна бути задана на початковій множині, яка складається із точки і тих значень $t-\cos^2 t<t_0$, при $t\ge t_0$.

$\begin{cases} t-\cos^2 t<0 \\ t\ge 0. \end{cases}$ Розв'яжемо нерівність $t-\cos^2 t\le 0$ графічно (рис. 2)

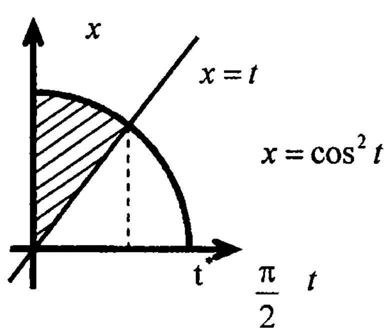

Рис. 3

$$g(t)=t-\cos^2 t$$

Областю визначення даної функції буде відрізок $[0,t^*]$, де t^* – корінь рівняння $t-\cos^2 t=0$.

$g(0)=0-1=-1;$

$g(t^*)=t^*-\cos^2 t^*=0;$

Отже, початкова функція $\varphi(t)$ буде задана на початковій множині $E_{t_0}=[-1,0]$.

Приклад 2: Знайти початкову множину для рівняння $x'(t)=f\left(t,x(t),x\frac{t}{2}\right)$, де початкова точка: 1) $t_0=0$; 2) $t_0=1$.

Оскільки запізнення $\tau(t)=t-\frac{t}{2}$ змінне, то початкова функція повинна бути задана на множині, яка складається з точки t_0 і з тих значень $\left(\frac{t}{2}=t-\frac{t}{2}\right)$, які менші t_0 при $t\ge t_0$.

1) $\begin{cases} t-\frac{t}{2}<t_0 \\ t\ge t_0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t-\frac{t}{2}<0 \\ t\ge 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t<0 \\ t\ge 0 \end{cases}$

Отже, початкова множина E_0 складається лише з одної точки 0.

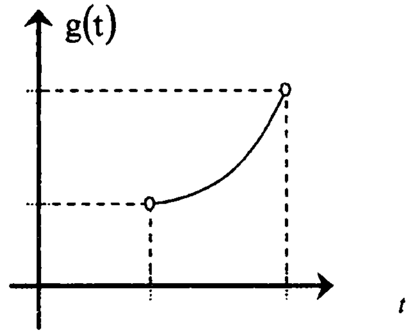

Рис. 3

2) $\begin{cases} t-\dfrac{t}{2}<t_0 \\ t\ge t_0 \end{cases}$ $\begin{cases} t-\dfrac{t}{2}<1 \\ t\ge 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{t}{2}<1 \\ t\ge 1 \end{cases}$ $\begin{cases} t<2 \\ t\ge 1 \end{cases}$

При даних $t\in[1,2]$ значення $(t-\tau(t))$ вийде за межі інтервалу $(t_0,+\infty)$ на якому існує неперервний розв'язок заданого рівняння.

Розглянемо $g(t)=t-\dfrac{t}{2}$, $t\in[1,2]$. Дана функція зростає, оскільки $g'(t)=1-\dfrac{1}{2}>0$. Зобразимо схематично графік функції $g(t)$ (рис. 3). $g(2)=1$, $g(1)=\dfrac{1}{2}$

Отже, початкова множина, на якій задана початкова функція $\varphi(t)$, є відрізком $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Метод послідовних інтегрувань дає можливість визначити розв'язок $x(t)$ на деякому скінченому відрізку. А також одночасно доводить існування розв'язку в околі точки $(t_0,\varphi_0(t_0))$, якщо функції φ і f неперервні в розглянутій області зміни невідомих. А єдиність розв'язку забезпечується, якщо функція f задовольняє одній із умов, що гарантують єдиність розв'язку рівняння

$$x'(t)=f(t,x(t),\varphi_0(t-\tau))$$

без відхилень аргументу, наприклад умова Ліпшіца по другому аргументу [1].
Для візуалізації даного методу розглянемо наступне завдання.

Приклад 3: Знайти неперервний розв'язок $x(t)$ рівняння $x'(t)=6\,x(t-1)$ на відрізку $[1;3]$, якщо на початковій множині $E_{t_0}=[0,1]$ початкова функція становить $x(t)=\varphi_0(t)=t$.

1) $t\in E_{t_1}=(1,2]$, тоді $x'(t)=6\,\varphi_0(t-1)=6(t-1)$.

Проінтегруємо дане рівняння:

$$x(t)=\int 6\cdot(t-1)\,dt=6\cdot\frac{(t-1)^2}{2}+C=3\,(t-1)^2+C.$$

Знайдемо константу C використовуючи умову неперервності розв'язку

$\varphi_0(t_0)=x(t_0+0)$,

$x(1)=\varphi_0(1)=1$.

$3\,(1-1)^2+C=1\Rightarrow C=1$.

$x(t)=\varphi_1(t)=3\,(t-1)^2+1$ – неперервний розв'язок на множині $t\in E_{t_1}=(1,2]$.

($\varphi_1'(1)=6\,(t-1)>0$ на $t\in(1,2]$, $\varphi_1(t)$ монотонно зростає)

2) $t\in E_{t_1}=(2,3]$, тоді $x'(t)=6\cdot\varphi_1(t-1)=6\left(3\cdot(t-2)^2+1\right)=18\cdot(t-2)^2+6$.

Проінтегруємо дане рівняння:

$$x(t)=\int\left(18\cdot(t-2)^2+6\right)dt=18\cdot\frac{(t-2)^3}{3}+6t+C=6\,(t-2)^3+6t+C.$$

Знайдемо константу C використовуючи початкову умову:

$x(2)=\varphi_1(2)=3\cdot(2-1)^2+1=4$.

$6\cdot(2-2)^3+6\cdot2+C=4\Rightarrow C=-8$.

$x(t)=\varphi_2(t)=6\cdot(t-2)^3+6t-8$ – неперервний розв'язок на множині $t\in E_{t_2}=(1,2]$.

($\varphi_2'(t)=18\cdot(t-2)^2+6>0$ на $t\in(2,3]$, $\varphi_2(t)$ монотонно зростає)

Зобразимо схематично графік розв'язку (рис. 4)

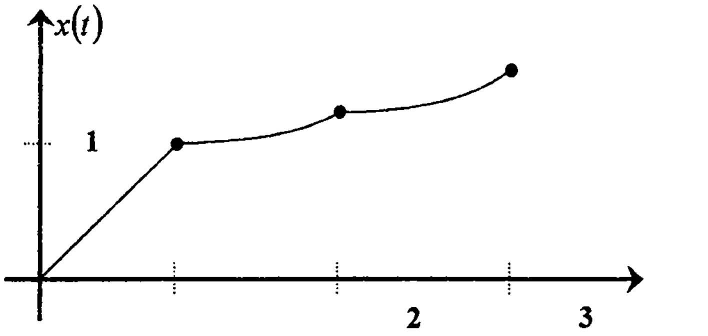

Рис. 4

Відповідь: $x(t)=6\cdot(t-2)^3+6t-8$ неперервний розв'язок на відрізку $[1,3]$.

Якщо метод кроків можна застосовувати і множина ζ_{t_0} не є одиничною точкою, тоді диференціальне рівняння з відхиленням аргументу зведеться до диференціального рівнянь без відхилення аргументу, до якого можна застосувати відомі теореми існування і єдності розв'язку основної початкової задачі.

Теорема існування і єдиності розв'язку основної початкової задачі для рівняння із запізнення аргументу:

Якщо у рівнянні $x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_i(t)),\ldots,x(t-\tau_m(t)))$ (3)

1) всі $\tau_i(t)$ неперервні при $t_0\le t\le t_0+H$ ($H>0$) і невід'ємні;

2) функція f неперервна в околі точки $(t_0,\varphi(t_0),\varphi(t_0-\tau_i(t_0)),\ldots,\varphi(t_0-\tau_m(t_0)))$ і задовольняє умову Ліпшиця по всім аргументам починаючи з другого;

3) початкова функція $\varphi(t)$ неперервна на E_{t_0}.

Тоді існує єдиний неперервний розв'язок $x(t)$ основної початкової задачі для рівняння (3) при $t_0\le t\le t_0+h$, де h досить мале [1]

Розглянемо рівняння

$$x(t+1)=f(t,x(t)), \tag{4}$$

де $t\in R=(-\infty,+\infty)$, $f:R\times R\to R$, і накладемо умови:

1) функція $f(t,x)$ неперервна при $t\in R$, $x\in R$ і N - періодична по t (N - ціле додатне число);

2) для $\forall\, t,x,y\in R$ функція $f(t,x)$ задовольняє умову

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le\omega(t)|x-y| \tag{5}$$

де $\omega(t)$ - деяка невід'ємна N - періодична функція;

3) $\omega(t)\omega(t+1)\ldots\omega(t+N-1)\le\theta<1,\quad t\in R$ [4].

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} &f^1(t,x)=f(t,x),\\ &f^2(t,x)=f(t+1,f^1(t,x)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f^n(t,x)=f(t+n-1,f^{n-1}(t,x))\quad n=2,3,\ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

і розглянемо рівняння

$$x_m(t)=f^N(t,x(t)). \tag{7}$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді рівняння (4) має єдиний неперервний N-періодичний розв'язок.

Доведення.

Нехай $x(t)$ - деякий неперервний N - періодичний розв'язок рівняння (4). Тоді

$$x(t+1)=f(t,x(t)),$$

$$x(t+2)=f(t+1,x(t+1))=f(t+1,f(t,x(t)))=f^2(t,x(t)),$$

$$x(t+N)=x(t)=f^N(t,x(t)),$$

тобто $x(t)$ задовольняє рівняння (7). Звідси, згідно леми 1 випливає, що для доведення теореми достатньо показати, що функція $\gamma(t)$ задовольняє рівняння (4).

Припустимо, що це не так, тобто $\gamma(t+1)\neq f(t,\gamma(t))$.

Тоді згідно тотожності $\gamma(t)=f^N(t,\gamma(t))$ матимемо

$$\gamma(t+1)=f^N(t+1,\gamma(t+1)), \qquad f(t,\gamma(t))=f(t,f^N(t,\gamma(t))).$$

Тоді згідно співвідношень (6) і умов 2, 3, знаходимо

$$\left|f^N(t+1,\gamma(t+1))-f(t,f^N(t,\gamma(t)))\right|=\left|f(t+N,f^{N-1}(t+1,\gamma(t+1)))-f(t,f^N(t,\gamma(t)))\right|=$$
$$=\left|f(t,f^{N-1}(t+1,\gamma(t+1)))-f(t,f^N(t,\gamma(t)))\right|\leq\omega(t)\cdot\left|f^{N-1}(t+1,\gamma(t+1))-f^N(t,\gamma(t))\right|\leq$$
$$\leq\omega(t)\cdot\omega(t+N-1)\cdot\left|f^{N-2}(t+1,\gamma(t+1))-f^{N-1}(t,\gamma(t))\right|\leq\ldots$$
$$\ldots\leq\omega(t)\cdot\omega(t+N-1)\cdot\ldots\cdot\omega(t+1)\cdot\left|\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))\right|$$

Звідси одержуємо

$$\left|\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))\right|\leq\theta\left|\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))\right|.$$

Дана нерівність матиме зміст, якщо $\gamma(t+1)-f(t,\gamma(t))=0$, тобто коли $\gamma(t+1)\equiv f(t,\gamma(t))$. Одержана суперечність доводить, що рівняння (4) має єдиний неперервний N - періодичний розв'язок [4].

Теорема доведена.

Отже, у роботі розглянуто основні відомості з теорії диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. Зокрема, основна увага акцентується на початковій задачі для диференціальних рівнянь із сталим і змінним запізненнями аргументу. На прикладах розглянуто знаходження початкової множини диференціального рівняння зі сталим відхиленням аргументу, а також продемонстровано застосування методу кроків для знаходження неперервного розв'язку $x(t)$ рівняння $x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau))$ на відрізку, якщо відома початкова функція на початковій множині E_0. Розглянута теорема існування і єдності розв'язку основної початкової задачі, а також теореми, які забезпечують існування єдиного неперервного N - періодичного розв'язку нелінійних різницевих рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументом. М. : Издательство Наука, 1964. – 128 с.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнений с запаздывающим аргументом. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва Наука, 1972. – 352 с.
3. Пелюх Г. П., Шарковський А. Н. Введение в теорию функциональных уравнений. – К. :Наук. Думка, 1974. – 119 с.
4. Пелюх Г. П. О существовании периодических решений нелинейных разносных уравнений. – К. :Укр. мат. журн., 2002, т.54, №12 с. 1626-1633.

Бабій А.

Науковий керівник – доц. Галан В. Д.

МОДУЛІ НЕПЕРЕРВНОСТІ І СТЕПЕНІ ГЛАДКОСТІ ФУНКЦІЇ

В роботі вивчаються властивості модуля неперервності різних порядків функції f з заданим степенем гладкості $s\geq 0$, досліджується розподіл функцій класу $C^s(I)$ по класах $W^rH^w_k(I)$ та розглядаються деякі інші питання. Наявні технічно трудомісткі перетворення, де доведено кілька допоміжних тверджень, із котрих, на наш погляд, самостійний інтерес представляє лема 3.4.

Робота присвячена вивченню властивостей модуля неперервності порядків неперервних на I (де I - одна з множин: $[a;b]$, чи $[0;+\infty)$, (чи R) функцій, а також дослідженню співвідношень між класами $\tilde{C}^s(I)$ (див. нижче означення 0.3) і класами $W^rH^w_k$. (див. нижче означення 0.1)