Веселовська Г.

Наукові керівники – доктор фіз.-математ. наук, провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України А.П. Голуб; доцент В.А. Лотоцький

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДО ПОБУДОВИ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Узагальнені моментні зображення для побудови апроксимацій Паде функцій однієї змінної запропонував у 80-х роках 20 сторіччя відомий український математик В.К. Дзядик [3]. Цей метод виявився досить ефективним для побудови та дослідження апроксимацій Паде та їх узагальнень. Поширення його на випадок двовимірних числових послідовностей було здійснено у працях А.П. Голуба та Л.О. Чернецької [2].

Означення 1. *Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *якщо у просторі X вказано двовимірну послідовність елементів* $\{x_{k,m}\}_{k=0}^{\infty}$, *а у просторі Y – двовимірну послідовність елементів* $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ *такі, що* $s_{k+j,\,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, \qquad k,j,m,n \in Z_+. \quad (1)$

Поставимо двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ у відповідність формальний степеневий ряд від двох змінних:

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \quad (2)$$

Нехай простори X та Y є нормованими лінійними просторами і у просторі X існують комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A, B: X \to X$ такі, що: $Ax_{k,m} = x_{k+1,m}$, $Bx_{k,m} = x_{k,m+1}$, для всіх $k,m \in Z_+$, а у просторі Y існують обмежені лінійні оператори $A^*, B^*: Y \to Y$ такі, що

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \qquad \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle, \quad \text{для } \forall x \in X, y \in Y.$$

Тоді зображення (1) можна зобразити в операторному вигляді $s_{k,m} = \langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, \qquad k,m \in Z_+. \quad (3)$

Розглядаючи оператори $(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = \varkappa \int_0^t \varphi(\tau)d\tau + t\varphi(t), \qquad \varphi \in L_1([0,1]).$
на основі результатів роботи [2] будемо мати:
Теорема . Для аналітичної функції вигляду

$$f(z,w) = \frac{zh(z) - wh(z)}{z - w}, \qquad (4)$$

де

$$h(z) = \frac{1}{\upsilon + 1}\,({}_2F_1\left(\upsilon + \varkappa + 1, 1; \upsilon + 2; z\right) = \frac{1}{\upsilon + 1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\upsilon + \varkappa + 1)_k}{(\upsilon + 1)_k} z^k.$$

при довільному $N \in \mathbf{N}$, раціональна функція, $\left[\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}\right]_f (z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}$,

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n,$$

в якій

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n} + z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \, [illegible]$$

а коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$, $k,m = \overline{0,N}$, задовольняють рівність:

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} \frac{(\upsilon + \varkappa + 1)_{k+m}}{(\upsilon + 1)_{k+m}} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} = \sum_{r=0}^{2N} p_r^{(2N)} t^r. \quad (5)$$

де $p_r^{(2N)}$ – коефіцієнти зсунутого ортонормованого на за вагою $t^{\upsilon}dt$ многочлена Якобі степеня
$p_r^{(2N)} = \alpha_N (-1)^r \binom{2N}{j} \frac{(\upsilon + 1)_{2N+r}}{(\upsilon + 1)_r}, \qquad r = 0,1,\ldots,2N,$
матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції (4) для $(k,m) \in \mathcal{E} = \{\mathbf{Z}_+^2 : k + m \le 4N - 1\}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
2. Голуб А.П. Чернецька Л.О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функції двох змінних. // Укр. Мат. Журнал. – 2013. – 65, №8. – с. 1035-1058.
3. Дзядик В.К. Про узагальнені проблеми моментів // Доп. АН УРСР. – 1981. – №6, – с. 8-12.