

ISSN 1427-3165

Український математичний журнал

Том 70
№ 12

2018

Науковий журнал

**Алфавітний покажчик 70-го тому
„Українського математичного журналу”**

<i>Абдуллаев Ф. Г., Имаи кизи М., Савчук В. В.</i> Застосування многочленів Фабера в доведеннях комбінаторних тотожностей	2 – 151
<i>Akgül A.</i> Second-order differential subordinations on a class of analytic functions defined by Rafid-operator.....	5 – 587
<i>Aktaş M. F.</i> Lyapunov-type inequalities for two classes of nonlinear systems with homogeneous Dirichlet boundary conditions.....	6 – 727
<i>Alaidarous E., Benchohra M., Medjadj I.</i> Global existence results for neutral functional differential inclusions with state-dependent delay	11 – 1443
<i>Altawallbeh Z., Al-Smadi M., Komashynska I., Atewi A.</i> Numerical solutions of fractional system, two-point BVPs using iterative reproducing kernel algorithm	5 – 599
<i>Al-Hashmi S. A., Nauman S. K.</i> A study of modules over rings and their extensions.....	10 – 1299
<i>Анон А. В., Касиренко Т. М., Мурач О. О.</i> Нерегулярні еліптичні крайові задачі та простори Хермандера	3 – 299
<i>Aouf M. K., Mostafa A. O., Zayed H. M.</i> Mapping properties for convolution involving hypergeometric series	11 – 1466
<i>Ardekani L. K., Davvaz B.</i> Derivations of gamma (semi)hyperringes	8 – 1011
<i>Асанова А. Т.</i> К теории нелокальных задач с интегральными условиями для систем уравнений гиперболического типа	10 – 1313
<i>Атласюк О. М., Михайлець В. А.</i> Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболева	10 – 1324
<i>Атласюк О. М., Михайлець В. А.</i> Фредгольмові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболева.....	11 – 1457
<i>Ashyralyev A., Akturk S.</i> The structure of fractional spaces generated by the two-dimensional difference operator on the half plane	8 – 1019
<i>Бабенко В. Ф., Конарева С. В.</i> Неравенства типа Джексона – Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства	9 – 1155
<i>Balci S., Imash кузу М., Abdullayev F. G.</i> Polynomial inequalities in regions with interior zero angles in the Bergman space	3 – 318
<i>Бандура А. І., Скасків О. Б.</i> Обмеженість L -індексу композиції цілих функцій кількох змінних.....	10 – 1334
<i>Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Коляса Л. І.</i> Спектральні властивості несамоспрязаних нелокальних крайових задач для оператора диференціювання парного порядку	6 – 739
<i>Безкоровайная Л. Л.</i> Поверхности, образованные действительной и мнимой частями аналитической функции: А-деформации, происходящие независимо или одновременно	4 – 447
<i>Богданский Ю. В.</i> Бесконечномерная версия неравенства Фридрихса.....	11 – 1476
<i>Богданский Ю. В.</i> Формула Гаусса – Остроградского в L_2 -версии. Приложение к задаче Дирихле.....	5 – 611
<i>Бойчук О. А., Журавльов В. П., Покутний О. О.</i> Обмежені розв’язки еволюційних рівнянь	1 – 7
<i>Бондаренко А. Р., Коваленко О. В.</i> Про залежність між нормою кратно монотонної функції і нормами її похідних	7 – 867

<i>Вакарчук С. Б.</i> Обобщенные характеристики гладкости и некоторые экстремальные задачи теории аппроксимации функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. I	9 – 1166
<i>Вакарчук С. Б.</i> Обобщенные характеристики гладкости и некоторые экстремальные задачи теории аппроксимации функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. II	10 – 1345
<i>Варенюк Н. А., Галба Е. Ф., Сергиенко И. В., Химич А. Н.</i> Взвешенная псевдоинверсия с индефинитными весами	6 – 752
<i>Веселовська О. В.</i> Про апроксимацію та зростання цілих гармонічних в \mathbb{R}^n функцій	4 – 464
<i>Волянська І. І., Ільків В. С., Симолюк М. М.</i> Нелокальна задача для рівняння з частинними похідними другого порядку в необмеженій смузі	10 – 1374
<i>Гембарська С. Б.</i> Про граничні значення тригармонічного інтеграла Пуассона на межі одиничного круга	7 – 876
<i>Гейфтер С. Л., Півень О. Л.</i> Цілі розв'язки одного лінійного неявного диференціально-різницевого рівняння у банахових просторах	8 – 1044
Глонти О. А. , <i>Пуртухія О. Г.</i> Хеджирование европейского опциона с негладкой функцией выплаты	6 – 773
<i>Городецкий В. В., Петришин Р. И., Вережак А. П.</i> Многоточечная по времени задача для одного класса эволюционных псевдодифференциальных уравнений	3 – 337
<i>Горькавий В. А., Милка А. Д.</i> Бирозетки — модельные флексоры	7 – 885
<i>Грабова У. З., Кальчук І. В., Степанюк Т. А.</i> Про наближення бігармонічними інтегралами Пуассона класів $W_\beta^r H^\alpha$	5 – 625
<i>Grigorichuk R., Kravchenko R.</i> On the rigidity of rank gradient in a group of intermediate growth	2 – 165
<i>Грищук С. В.</i> Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I	8 – 1058
<i>Грищук С. В.</i> Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. II	10 – 1382
<i>Гусейнов И. М., Ханмамедов Аг. Х.</i> К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом	10 – 1390
<i>Güroğlu A. T., Meriç E. T.</i> Principally Goldie*-lifting modules	7 – 905
<i>Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І.</i> Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузиею та імпульсною дією	2 – 177
<i>Дереч В. Д.</i> Скінченні структурно-однорідні групи і комутативні нільнапівгрупи	8 – 1072
<i>Джумабаев Д. С., Темешева С. М.</i> Критерии существования изолированного решения нелинейной краевой задачи	3 – 356
<i>Дороговцев А. А., Изюмцева О. Л., Салхи Н.</i> Представление Кларка для локальных времен самопересечения гауссовских интеграторов	12 – 1587
<i>Duong P. T.</i> Some results on the global solvability for structurally damped models with a special nonlinearity	9 – 1211
<i>Durna N.</i> Subdivision of spectra for some lower triangular double-band matrices as operators on c_0	7 – 913
<i>Евстафьева В. В.</i> Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа	8 – 1085
<i>Jedynak R., Gilewicz J.</i> Magic efficiency of approximation of smooth functions by weighted means of two N -point Padé approximants	9 – 1192
<i>Ersoy O., Dag I., Adar N.</i> The exponential twice continuously differentiable B-spline algorithm for Burgers' equation	6 – 788

<i>Zhang R. R.</i> Value distribution of differential-difference polynomials of meromorphic functions	4 – 471
<i>Журавлев В. Ф.</i> Условия бифуркации решений слабозмущенных краевых задач для операторных уравнений в банаховых пространствах	3 – 366
<i>Жучок А. В., Копіць Й.</i> Вільні добутки n -кратних напівгруп	11 – 1484
<i>Заболоцький М. В., Басюк Ю. В., Тарасюк С. І.</i> Цілі функції нульового порядку з нулями на логарифмічній спіралі	7 – 923
<i>Зайналов Б. Р.</i> Первая нетривиальная группа гомологий симплициальных схем унимодулярных реперов над дедекиндовым кольцом	9 – 1232
<i>Ivelić Bradanović S., Latif N., Pečarić J.</i> Generalizations of Sherman's inequality via Fink's identity and Green's function	8 – 1033
<i>Iyigün E.</i> On Darboux vector in Lorentzian 5-space	5 – 635
<i>Kanas S., Altinkaya Ş., Yalçın S.</i> Subclass of k -uniformly starlike functions defined by symmetric q -derivative operator.....	11 – 1499
<i>Капустян О. В., Перестюк М. О., Романюк І. В.</i> Стійкість глобальних атракторів імпульсних нескінченновимірних систем	1 – 29
<i>Карлова О., Михайлюк В.</i> Верхній та нижній класи Лебега багатозначних відображень двох змінних	8 – 1097
<i>Кільчинський О. О., Масалітіна Є. В.</i> Метод пом'якшення нев'язок для круглої пластини під дією масових сил	4 – 481
<i>Кічмаренко О. Д.</i> Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь на півосі	5 – 642
<i>Княгина В. Н., Монахов В. С., Зубей Е. В.</i> О разрешимости конечной группы с S -полуноральными подгруппами Шмидта.....	11 – 1511
<i>Ковалев Ю. Г.</i> О критериях трансверсальности и дизъюнктности неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательного симметрического оператора	4 – 495
<i>Комлева Т. А., Плотникова Л. И., Плотников А. В.</i> Одна многозначная дискретная система и ее свойства	11 – 1519
<i>Korotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.</i> On moduli of smoothness with Jacobi weights	3 – 379
<i>Костин А. В.</i> Задача о тени в пространстве Лобачевского	11 – 1525
<i>Kochubei A. N.</i> Linear and nonlinear heat equations on a p -adic ball	2 – 193
<i>Кошманенко В. Д., Волошина В. О.</i> Граничні розподіли динамічних систем конфлікту з точковим спектром	12 – 1615
<i>Кравець В. І., Ковальчук Т. В., Могильова В. В., Станжицький О. М.</i> Застосування методу усереднення до задач оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями	2 – 206
<i>Леонов Г. А.</i> Функции Ляпунова в глобальном анализе хаотических систем.....	1 – 40
<i>Літовченко В. А.</i> Один метод дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних систем	6 – 801
<i>Луковський І. О.</i> Варіаційний метод розв'язування нелінійних крайових задач динаміки обмеженого об'єму рідини зі змінними межами.....	1 – 63
<i>Ma T. S., Li H. Y., Dong L. H.</i> A class of double crossed biproducts.....	11 – 1533
<i>Мазко О. Г.</i> Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах.....	11 – 1541
<i>Mazorchuk V., Zhang X.</i> Simple transitive 2-representations for two non-fiat 2-categories of projective functors	12 – 1625
<i>Macaitienė R.</i> Joint universality for L -functions from Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions	5 – 655

<i>Макаров В. Л.</i> Точні та наближені розв'язки спектральних задач для оператора Шрьодінгера на $(-\infty, \infty)$ з поліноміальним потенціалом	1 – 79
<i>Малицька Г. П., Буртняк І. В.</i> Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для систем Колмогорова другого порядку	8 – 1107
<i>Маркітан В. П., Працьовитий М. В., Савченко І. О.</i> Суперфрактальність множини неповних сум одного додатного ряду	10 – 1403
<i>Маслюк Г. О., Михайлець В. А.</i> Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків у просторах Слободецького	3 – 404
<i>Маслюченко В. К., Мельник В. С.</i> Побудова проміжних диференційовних функцій	5 – 672
<i>Мацак І. К., Плічко А. М., Шелуденко А. С.</i> Граничні теореми для максимуму сум незалежних випадкових процесів	4 – 506
<i>Meraj Ali Khan.</i> Contact CR-warped product of submanifolds of the generalized Sasakian space forms admitting the nearly trans-Sasakian structure	10 – 1417
<i>Михайлець В. А., Пелехата О. Б., Рева Н. В.</i> Предельные теоремы для решений краевых задач	2 – 216
<i>Павленков В. В.</i> ORV послідовності з невідродженими групами регулярних точок	7 – 933
<i>Пагіря М. М.</i> Зображення функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ ланцюговими дробами	5 – 682
<i>Перестюк Н. А., Скрипник Н. В.</i> Усреднение нечетких систем	3 – 412
<i>Пичугов С. А.</i> Кратные модули непрерывности и наилучшие приближения периодических функций в метрических пространствах	5 – 699
<i>Пожарська К. В.</i> Оцінки ентропійних чисел класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці	9 – 1249
<i>Příža V., Rontó A., Rontó M., Shchobak N.</i> On solutions of nonlinear boundary-value problems the components of which vanish at certain points	1 – 94
<i>Recke L.</i> Forced frequency locking for differential equations with distributional forcings	1 – 115
<i>Романюк А. С.</i> Колмогоровські поперечники і білінійні наближення класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних	2 – 224
<i>Savaş R., Öztürk M.</i> On generalized ideal asymptotically statistical equivalent of order α for functions.....	12 – 1650
<i>Савчук В. В.</i> Найкращі наближення ядра Коші – Сегьо в середньому на одиничному колі	5 – 708
<i>Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.</i> О равностепенной непрерывности одного семейства обратных отображений в терминах простых концов	9 – 1264
<i>Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А., Маркиш А. А.</i> Об оценке искажения расстояния снизу для одного класса отображений	11 – 1553
<i>Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А., Блекмор Д., Прикарпатський А. К.</i> Теорія багатовимірних операторів трансмутації Дельсарта – Ліюна. I	12 – 1660
<i>Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.</i> Асимптотичні Σ -розв'язки сингулярно збуреного рівняння Benjamin – Wong – Mahony зі змінними коефіцієнтами	2 – 236
<i>Севостьянов Е. А., Скворцов С. А.</i> О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями	7 – 952
<i>Skrypnik W. I.</i> Mechanical systems with singular equilibria and the Coulomb dynamics of three charges	4 – 519
<i>Słowik R.</i> The Drazin inverses of infinite triangular matrices and their linear preservers	4 – 534
<i>Слюсарчук В. Ю.</i> Необхідні та достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь зі самоспряженими операторними коефіцієнтами	5 – 715

<i>Солодкий С. Г., Семенова Є. В.</i> Апроксимаційні та інформаційні аспекти чисельного розв'язування нестійких інтегральних та псевдодиференціальних рівнянь	3 – 429
<i>Tiryaki A.</i> Saccioppoli-type estimates for a class of nonlinear differential operators.....	10 – 1429
<i>Tuneski N., Bulboacă T.</i> Sufficient conditions for bounded turning of analytic functions	8 – 1118
<i>Фардигола Л. В.</i> Оператори перетворення в задачах керованості для виродженого хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами	8 – 1128
<i>Ферук В. А.</i> Один варіант проєкційно-ітеративного методу для інтегральних рівнянь типу Фредгольма	6 – 812
<i>Fečkan M., Pospíšil M.</i> On equations with generalized periodic right-hand side	2 – 255
<i>Филипповская М. С.</i> Устойчивость и неустойчивость по Лагранжу нерегулярных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения	6 – 823
<i>Чабанюк Я., Роса В.</i> Процедура стохастичної апроксимації для дифузійного процесу з напівмарковськими перемикуваннями	11 – 1563
<i>Chen F. X.</i> On the generalization of some Hermite – Hadamard inequalities for functions with convex absolute values of the second derivatives via fractional integrals	12 – 1696
<i>Чжан Чи, Скиба А. Н.</i> О Σ_r^{σ} -замкнутых классах конечных групп	12 – 1707
<i>Чуйко С. М., Несмелова О. В., Дзюба М. В.</i> Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач	2 – 280
<i>Шанин Р. В.</i> Оценки равноизмеримых перестановок в анизотропном случае	7 – 968
<i>Sharma N. L.</i> A note on the coefficient estimates for some classes of p -valent functions ...	4 – 549
<i>Швай К. В.</i> Оцінки найкращих білінійних наближень класів (ψ, β) -диференційовних періодичних функцій багатьох змінних	4 – 564
<i>Jabeen T., Agarwal R. P., Lupulescu V., O'Regan D.</i> Existence of global solutions for some classes of integral equations.....	1 – 130
<i>Янченко С. Я.</i> Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського – Бесова, визначених на \mathbb{R}^d	4 – 574

Короткі повідомлення

<i>Al-Khaladi A. H. H.</i> Entire functions share two half small functions.....	7 – 978
<i>Апатов Ю. П., Жураев А. Х.</i> Третья краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками	9 – 1274
<i>Бабич Ю. А., Михайлова Т. Ф.</i> Аппроксимация периодических функций многих переменных функциями меньшего числа переменных в метрических пространствах Орлича	8 – 1143
<i>Бахтин А. К., Денега И. В., Выговская Л. В.</i> Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей	9 – 1282
<i>Бондаренко В. Г.</i> Формула Троттера – Далецкого для нелинейного возмущения.....	12 – 1717
<i>Calderón Martín A. J.</i> A note on strongly split Lie algebras.....	7 – 988
<i>Коренков М. Є., Харкевич Ю. І.</i> Про асимптотику асоційованих сигма-функцій і тета-функцій Якобі	8 – 1149
<i>Kumar R., Gaur A.</i> A corrigendum to “Hereditary properties between a ring and its maximal subrings”	4 – 583
<i>Lashin A. Y.</i> Coefficient estimates for two subclasses of analytic and bi-univalent functions	9 – 1289
<i>Li L.</i> A remark on John – Nirenberg theorem for martingales	11 – 1571
<i>Мамедханов Дж. И., Дадашова И. Б.</i> Об одной теореме Г. Фройда.....	11 – 1578

<i>Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U.</i> Simpson-type inequalities for geometrically relative convex functions.....	7 – 992
<i>Öner T., Şentürk İ., Öner G.</i> Properties of the logical consequence operation and its relationship with the independence of propositional logic.....	6 – 857
<i>Prytula M. M., Hentosh O. E., Prykarpatsky Ya. A.</i> Differential-geometric structure and the Lax – Sato integrability of a class of dispersionless heavenly type equations	2 – 293
<i>Savaş E.</i> On the lacunary (A, φ) -statistical convergence of double sequences	6 – 848
<i>XinFu Li, Ming Li.</i> Decay estimates for a kind of linear wave equations.....	7 – 1001

Хроніка

<i>Самойленко А. М., Абдуллаев Ф. Г., Савчук В. В., Сердюк А. С.</i> Міжнародна конференція „Математичний аналіз, диференціальні рівняння та їх застосування — MADEA-8”, присвячена 80-річчю від дня народження академіка А. М. Самойленка	10 – 1439
--	-----------

Ювілейні дати

<i>Березанський Ю. М., Королюк В. С., Луковський І. О., Макаров В. Л., Марченко В. О., Пастур Л. А., Перестюк М. О., Хруслов Є. Я., Шарковський О. М., Бойчук О. А., Гутляньський В. Я., Кочубей А. Н., Кушнір Р. М., Нікітін А. Г., Портенко М. І., Антонюк О. В., Парасюк І. О., Ронто М. Й., Ткаченко В. І., Трофімчук С. І.</i> Анатолій Михайлович Самойленко (до 80-річчя від дня народження).....	1 – 3
--	-------

А. В. Дворник (Ін-т математики НАН України, Київ),

О. О. Струк (Терноп. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка),

В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА З ДИФУЗИЄЮ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

We establish sufficient conditions for the existence and asymptotic stability of positive piecewise continuous almost periodic solutions for the Lotka – Volterra systems of differential equations with diffusion and impulsive action.

Получены условия существования и асимптотической устойчивости строго положительных кусочно-непрерывных почти периодических решений систем дифференциальных уравнений Лотки – Вольтерра с диффузией и импульсным воздействием.

1. Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t, x) + u(t, x)(a_1(t, x) - b_1(t, x)u(t, x) - c_1(t, x)v(t, x)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t, x) + v(t, x)(a_2(t, x) - b_2(t, x)u(t, x) - c_2(t, x)v(t, x)), \quad (2)$$

$x \in \Omega$, $t \neq \tau_k$, імпульсною дією вигляду

$$u(\tau_k + 0, x) - u(\tau_k, x) = d_{1k}u(\tau_k, x) + q_{1k}, \quad (3)$$

$$v(\tau_k + 0, x) - v(\tau_k, x) = d_{2k}v(\tau_k, x) + q_{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

та крайовими умовами Неймана

$$\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial v(t, x)}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5)$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою межею $\partial \Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$, $\partial/\partial n$ – похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k$, які рівномірно відділені один від іншого.

Система (1)–(5) описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі та зазнають короткочасного зовнішнього впливу в моменти часу τ_k . Функції $u(t, x)$ та $v(t, x)$ визначають щільність двох біологічних видів у момент часу t і просторовій точці x . Виходячи з біологічної інтерпретації, вважаємо функції невід'ємними. Додатні сталі μ_1 та μ_2 є коефіцієнтами дифузії відповідно першого і другого виду. Логістичні вирази $u(a_1 - b_1 u)$ та $v(a_2 - c_2 v)$ характеризують відтворення першого і другого видів. Члени $c_1 v$ та $b_2 u$ показують гальмівний вплив виду v на вид u і виду u на вид v відповідно. Дослідження імпульсних систем із дифузією, які описують еволюцію біологічних видів, привертає останнім часом велику увагу багатьох авторів (див., наприклад, [1–5]).

У цій роботі ми дослідимо умови існування строго додатного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи (1)–(5). Будемо використовувати концепцію майже періодичних функцій у сенсі робіт [6, 7]. Ці кусково-неперервні функції мають розриви першого роду по t в точках імпульсної дії $t = \tau_k$. Такі майже періодичні розв'язки активно вивчаються для різних класів систем із імпульсною дією (див. [8–15]).

Спочатку ми доведемо обмеженість розв'язків системи (1)–(5) і вкажемо умови довготривалого виживання кожного з видів у термінах перманентності — коли кількість індивидів кожного виду стабілізується в деякій обмеженій області, відділеній від нуля. Точніше, система називається перманентною, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку системи з невід'ємними початковими функціями $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$ таке існує $t_0 = t_0(u_0, v_0)$, що

$$m_0 \leq u(t, x) \leq M_0, \quad m_0 \leq v(t, x) \leq M_0$$

для $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq t_0$. Далі ми отримаємо умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язків з області перманентності в нормах просторів $L^p(\Omega)$ інтегровних функцій, означених у області Ω , і нормах інтерполяційних просторів X^α , побудованих для оператора Лапласа Δ і крайових умов (5). Використання інтерполяційних просторів X^α дозволяє розглядати розв'язки у сильному і класичному сенсі.

За умови рівномірної асимптотичної стійкості на підставі ідей робіт [16–18], доводиться існування в області перманентності асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку.

2. Основні означення та попередні результати. Для обмеженої функції $g(t, x)$ позначимо

$$g^L = \inf_{t,x} g(t, x), \quad g^M = \sup_{t,x} g(t, x).$$

Позначимо через $\|\cdot\|_C$ норму простору $C(\bar{\Omega})$ неперервних функцій на $\bar{\Omega}$.

Нехай $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахів простір із нормою $\|\cdot\|_X$, \mathbb{R} та \mathbb{Z} — множини дійсних та цілих чисел відповідно. Позначимо через $\|\cdot\|$ норму в \mathbb{R}^n чи відповідну норму у просторі матриць. Будемо розглядати простір $\mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, усіх обмежених кусково-неперервних функцій $x : J \rightarrow X$ таких, що:

i) множина $\{\tau_j \in J : \tau_{j+1} > \tau_j, j \in \mathbb{Z}\}$ моментів розривів x не має скінченних граничних точок;

ii) $x(t)$ є неперервною зліва: $x(\tau_j - 0) = x(\tau_j)$, та існує $\lim_{t \rightarrow \tau_j + 0} x(t) = x(\tau_j + 0)$.

Означення 1. Ціле число p називається ε -майже періодом послідовності $\{x_k\}$, $x_k \in X$, якщо $\|x_{k+p} - x_k\|_X < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε -майже періодів.

Множина $A \subset \mathbb{R}$ відносно щільна, якщо існує додатне число l таке, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні одне число, яке належить A .

Означення 2. Строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ дійсних чисел має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε -майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{\tau_k^j\}$, де $\tau_k^j = \tau_{k+j} - \tau_k$, $j \in \mathbb{Z}$.

Як показано у [19], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 3. Функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, X)$ називається w -майже періодичною, якщо:

i) строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ моментів розриву функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

ii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що якщо точки t' і t'' належать одному інтервалу неперервності і $|t' - t''| < \delta$, то $|\varphi(t') - \varphi(t'')|_X < \varepsilon$;

iii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε -майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - \tau_k| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нагадаємо, що неперервна функція $\psi: \mathbb{R} \rightarrow X$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε -майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $|\psi(t + \tau) - \psi(t)|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Означення 4. Кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J, X)$ знаходиться в ε -околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J, X)$, якщо $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in J$ таких, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$, та $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ та $\{\tau_i^2\}$ – послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно. У цьому випадку будемо писати $\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \varepsilon$, $t \in J$.

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається у w -топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J, X)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|f_k(t) - f(t)|_X < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$, $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i – точки розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J , збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i .

Наведемо лему з [10], яка є узагальненням леми 7 з [6, с. 288].

Лема 1. Нехай строго зростаюча послідовність дійсних чисел $\{\tau_j\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, послідовність $\{B_j\}$, $B_j \in X$, ε майже періодичною, а функція $\varphi(t): \mathbb{R} \rightarrow X$ – w -майже періодичною. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $l = l(\varepsilon) > 0$, що для довільного інтервалу J довжини l існують такі $r \in J$ і ціле $q \in \mathbb{Z}$, що виконуються нерівності

$$|\tau_{i+q} - \tau_i - r| < \varepsilon, \quad \|B_{i+q} - B_i\|_X < \varepsilon, \quad i \in \mathbb{Z},$$

і

$$|\varphi(t + r) - \varphi(t)|_X < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \quad |t - \tau_j| > \varepsilon, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

За лемою 22 [7, с. 192] для послідовності $\{\tau_j\}$ з рівномірно майже періодичними послідовностями різниць існує границя

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t, t + T)}{T} = p$$

рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$, де $i(s, t)$ – число точок τ_k з інтервалу (s, t) .

Будемо використовувати також лему про узагальнену нерівність Гронуолла [20, 21].

Лема 2. Нехай $0 \leq \alpha < 1$, $M_1 \geq 0$, $M_2 > 0$, $0 < Q < \infty$ і локально інтегровна на $0 \leq t \leq Q$ невід'ємна функція $y(t)$ задовольняє на цьому інтервалі нерівність

$$y(t) \leq M_1 + M_2 \int_0^t (t - s)^{-\alpha} y(s) ds.$$

Тоді існує додатна стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, M_2, Q) \in (1, \infty)$ така, що

$$y(t) \leq M_1 \tilde{C}(\alpha, M_2, Q).$$

Будемо розглядати систему (1)–(5) з такими умовами:

(Н₁) додатнозначні обмежені функції $a_i(t, x)$, $b_i(t, x)$ та $c_i(t, x)$, $i = 1, 2$, неперервно диференційовні по $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \Omega$ та майже періодичні за Бором по t ;

(Н₂) послідовність дійсних чисел $\{\tau_j\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, і $\Theta \geq \tau_{j+1} - \tau_j \geq \theta > 0$, $j \in \mathbb{Z}$, з деякими сталими Θ та θ ;

(Н₃) виконуються нерівності $d_{ik} > -1$, $q_{ik} \geq 0$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}$, і послідовності дійсних чисел $\{d_{1k}\}$, $\{d_{2k}\}$, $\{q_{1k}\}$, $\{q_{2k}\}$ майже періодичні.

Позначимо $d = \sup_{ik} d_{ik}$, $q = \sup_{ik} q_{ik}$.

Означення 5. Вектор-функція $(u(t, x), v(t, x))$ є класичним розв'язком системи без імпульсів (1), (2), (5), якщо вона двічі неперервно диференційовна по $x \in \Omega$, неперервно диференційовна по $x \in \bar{\Omega}$, неперервно диференційовна по $t > 0$ і задовольняє цю систему.

Вектор-функція $(u, v) : \Omega \times [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2$, де $\alpha > 0$, є розв'язком початкової задачі

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad v(t_0, x) = v_0(x), \tag{6}$$

імпульсної системи (1)–(5), якщо функція (u, v) є класичним розв'язком системи без імпульсів (1), (2), (5) при $t \neq \tau_j$, задовольняє умови (3), (4) при $t = \tau_j$ і виконується умова (6).

3. Перманентність і асимптотична стійкість. У подальшому нам буде потрібний такий допоміжний результат [1]. Розглянемо логістичне рівняння без запізнення та з імпульсною дією у фіксовані моменти

$$\dot{z} = z(a - bz), \quad t \neq t_k, \tag{7}$$

$$z(t_k + 0) - z(t_k) = dz(t_k) + q, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

де $z \geq 0$, a і b – додатні сталі, $d > -1$, $q \geq 0$, строго зростаюча послідовність $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geq \theta > 0$.

Лема 3. Усі розв'язки $z(t)$, $z(0) = z_0 > 0$ рівняння (7), (8) задовольняють оцінки

$$0 < z(t) \leq \max\{A, A(1 + d) + q\}, \quad A = \frac{a}{b(1 - e^{-a\theta})}$$

для $t \geq 2\theta$.

Також будемо використовувати теорему порівняння з [22].

Теорема 1. Нехай T і ν – додатні числа, а функція $u(t, x)$ неперервна на $[0, T] \times \bar{\Omega}$, неперервно диференційовна по $x \in \bar{\Omega}$, з неперервними похідними $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_i$ та $\partial u / \partial t$ на $(0, T] \times \Omega$ і задовольняє нерівності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + c(t, x)u \geq 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \partial\Omega,$$

$$u(0, x) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

де функція $c(t, x)$ обмежена на $(0, T] \times \Omega$.

Тоді $u(t, x) \geq 0$ на $(0, T] \times \bar{\Omega}$. Крім того, $u(t, x)$ строго додатна на $(0, T] \times \bar{\Omega}$, якщо $u(0, x)$ не рівна тотожно нулю.

Лема 4. Для кожного розв'язку системи (1)–(5) з невід'ємними початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$ існує $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$ таке, що

$$u(t, x) \leq M_0, \quad v(t, x) \leq M_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq \bar{t},$$

де

$$M_0 = \max\{A, A(1 + d) + q\}, \quad A = \frac{a^M}{b^L(1 - e^{-a^M\theta})},$$

$$a^M = \max(a_1^M, a_2^M), \quad b^L = \min(b_1^L, c_2^L).$$

Доведення. Нехай $\bar{u}(t, x, u_0)$ – розв’язок рівняння

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \bar{u} - \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}) = 0. \quad (9)$$

Використовуючи нерівність

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a_1(t, x) - b_1(t, x)u - c_1(t, x)v) \geq \\ &\geq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a_1^M - b_1^L u) \geq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a^M - b^L u), \end{aligned}$$

отримуємо

$$0 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \bar{u} - \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}) \geq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a^M - b^L u).$$

Застосовуючи теорему 1, одержуємо $u(t, x, u_0, v_0) \leq \bar{u}(t, M_u)$, $M_u = \bar{u}(0, M_u)$ де стала M_u така, що $\|u_0(x)\|_C = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u_0(x)| \leq M_u$. За теоремою єдиності розв’язок рівняння (9) з незалежною від x початковою умовою не залежить від x при $t \geq 0$. Тому функція $\bar{u}(t, M_u)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння $d\bar{u}/dt = \bar{u}(a^M - b^L \bar{u})$.

З умови (3) отримуємо оцінку для імпульсної дії:

$$\|u(\tau_k + 0, x, u_0, v_0)\|_C \leq \|u(\tau_k, x, u_0, v_0)\|_C(1 + d) + q.$$

За лемою 3 всі розв’язки рівняння з імпульсами

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{u}(a^M - b^L \bar{u}), \quad \bar{u}(\tau_k + 0) - \bar{u}(\tau_k) = d\bar{u}(\tau_k) + q$$

фінально обмежені сталою A або $(d + 1)A + q$.

Аналогічно отримуємо оцінку для $v(t, x, u_0, v_0)$.

Лему 4 доведено.

Лема 5. Нехай виконуються нерівності

$$a_1^L - c_1^M M_0 + \sigma_1 > 0, \quad a_2^L - b_2^M M_0 + \sigma_2 > 0, \quad (10)$$

де

$$\sigma_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{0 < \tau_j \leq T} \ln(1 + d_{ij}), \quad i = 1, 2.$$

Тоді існує таке $m_0 > 0$, що для кожного розв’язку системи (1)–(5) з ненульовими початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, існує $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ таке, що

$$u(t, x) \geq m_0, \quad v(t, x) \geq m_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq t_0.$$

Доведення. Для обмежених розв’язків $\|u(t, \cdot)\|_C \leq M_0$, $\|v(t, \cdot)\|_C \leq M_0$, $t \geq 0$, виконується нерівність

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a_1(t, x) - b_1(t, x)u - c_1(t, x)v) \leq$$

$$\leq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a_1^L - b_1^M u - c_1^M M_0),$$

тому

$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \mu_1 \Delta \hat{u} - \hat{u}(a_1^L - b_1^M \hat{u} - c_1^M M_0) \leq \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \Delta u - u(a_1^L - b_1^M u - c_1^M M_0).$$

Застосовуючи теорему 1, отримуємо $u(t, x, u_0, v_0) \geq \hat{u}(t, m_u)$, де стала $m_u > 0$ така, що $\|u_0(x)\| \geq m_u, x \in \bar{\Omega}$. Зауважимо, що ми можемо припустити, що $m_u > 0$, оскільки за теоремою 1, якщо $u_0(x) \geq 0, u_0(x) \not\equiv 0, v_0(x) \geq 0, v_0(x) \not\equiv 0$, то $u(t, x, u_0, v_0) > 0, v(t, x, u_0, v_0) > 0$ для всіх $x \in \bar{\Omega}, t > 0$.

Враховуючи (3) і невід'ємність q_{1k} , розв'язок $u(t, x, u_0, v_0)$ оцінюємо знизу розв'язком логістичного рівняння з імпульсами

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u}(a_1^L - b_1^M \hat{u} - c_1^M M_0), \quad \hat{u}(\tau_k + 0) - \hat{u}(\tau_k) = d_{1k} \hat{u}(\tau_k). \quad (11)$$

Виконуючи у рівнянні (11) заміну змінних $\hat{u} = 1/z$, отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = -(a_1^L - c_1^M M_0)z + b_1^M, \quad z(\tau_k + 0) = (1 + d_{1k})^{-1} z(\tau_k). \quad (12)$$

Фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$U(t, s) = \prod_{s \leq \tau_j < t} \frac{1}{1 + d_{1j}} e^{-(a_1^L - c_1^M M_0)(t-s)} = \exp \left\{ -(a_1^L - c_1^M M_0)(t-s) - \sum_{s \leq \tau_j < t} \ln(1 + d_{1j}) \right\}.$$

Зазначимо, що для майже періодичної послідовності $\{d_{1j}\}$ та послідовності $\{\tau_j\}$ з рівномірно майже періодичними послідовностями різниць завжди існує границя

$$\sigma_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{s \leq \tau_j < s+T} \ln(1 + d_{1j}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{s \leq \tau_j < s+T} \frac{\ln(1 + d_{1j})}{i(s, s+T)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(s, s+T)}{T}.$$

При виконанні нерівності (10) для $U(t, s)$ справедливою є оцінка

$$|U(t, s)| \leq \tilde{K} e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s,$$

з деякими додатними сталими \tilde{K} і α_1 , а рівняння (12) має єдиний асимптотично стійкий обмежений на осі розв'язок

$$z_0(t) = \int_{-\infty}^t U(t-s) b_1^M ds \leq \frac{\tilde{K} b_1^M}{\alpha_1}.$$

Кожний інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z_* \leq 2\tilde{K} b_1^M / \alpha_1$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Відповідно кожний розв'язок рівняння (11) оцінюється знизу сталою $\alpha_1 / 2\tilde{K} b_1^M$ починаючи з деякого моменту часу.

Оцінки для розв'язків v аналогічні.

Лему 5 доведено.

Лема 6. Нехай виконується нерівність $q_0 = \inf_{ij} q_{ij} > 0$. Тоді існує $m_0 > 0$ таке, що для кожного розв'язку системи (1)–(5) з невід'ємними початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$, $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$, існує $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ таке, що

$$u(t, x) \geq m_0, \quad v(t, x) \geq m_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq t_0,$$

Доведення. Як і у випадку рівняння (11) показуємо, що розв'язки системи (1)–(5) оцінюються знизу розв'язками рівняння

$$\frac{dz}{dt} = z(a^L - b^M z - c^M M_0), \quad z(\tau_k + 0) - z(\tau_k) = d_0 u(t_k) + q_0, \quad (13)$$

де $a^L = \min\{a_1^L, a_2^L\}$, $b^M = \max\{b_1^M, c_2^M\}$, $c^M = \max\{c_1^M, b_2^M\}$, $d_0 = \inf_{jk} d_{jk}$. Оскільки розв'язки рівняння невід'ємні, а значення розв'язку при $t = \tau_k + 0$ не менше за q_0 , то при $a^L < c^M M_0$ на відрізку $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \geq 1$, розв'язок оцінюється знизу величиною

$$z(t) \geq \frac{(c^M M_0 - a^L)q_0}{q_0 b^M (e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tau_k)} - 1) + (c^M M_0 - a^L)e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tau_k)}}.$$

При $a_1^L = c_1^M M_0$ отримуємо

$$z(t) \geq \frac{q_0}{1 + q_0 b^M (t - \tau_k)}, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Аналогічно доводимо при $a^L > c^M M_0$.

Лему 6 доведено.

Зауваження 1. Припустимо, що $d_{ij} = 0$, $i = 1, 2$, $j \in \mathbb{Z}$, і $a_1^L > c_1^M M_0$, $a_2^L > b_2^M M_0$. Лінійне рівняння (12) має додатний асимптотично стійкий сталий розв'язок $z_* = b_1^M / (a_1^L - c_1^M M_0)$. Кожен інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z(t) < 2b_1^M / (a_1^L - c_1^M M_0)$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Тому розв'язки $(u(t, x, u_0, v_0), v(t, x, u_0, v_0))$ з невід'ємними не рівними тотожно нулю початковими функціями задовольняють оцінки

$$u(t, x, u_0, v_0) \geq \frac{a_1^L - c_1^M M_0}{2b_1^M}, \quad v(t, x, u_0, v_0) \geq \frac{a_2^L - b_2^M M_0}{2c_2^M}, \quad x \in \bar{\Omega},$$

починаючи з деякого моменту часу $t_1 = t_1(u_0, v_0)$.

Теорема 2. Нехай для системи (1)–(5) виконуються такі умови:

1) система перманентна: існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що кожний розв'язок з невід'ємними не рівними тотожно нулю початковими функціями $(u_0(x), v_0(x))$ починаючи з деякого моменту часу $t_0 = t_0(u_0, v_0)$ залишається у множині

$$E_0 = \{(u, v) : m_0 \leq u \leq M_0, m_0 \leq v \leq M_0\};$$

2) має місце нерівність

$$a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0 + \sigma > 0, \quad \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}, \quad (14)$$

де

$$a^M = \max(a_1^M, a_2^M), \quad b^L = \min(b_1^L, c_2^L), \quad c^L = \min(c_1^L, b_2^L), \quad c^M = \max(c_1^M, b_2^M).$$

Тоді розв'язки системи з початковими функціями зі значеннями у множині E_0 рівномірно асимптотично стійкі.

Доведення. Розглянемо два розв'язки $(u_1(t, x), v_1(t, x))$ і $(u_2(t, x), v_2(t, x))$, які мають значення у множині E_0 , і функцію

$$\mathcal{A}_p(t) = \int_{\Omega} ((u_1(t, x) - u_2(t, x))^p + (v_1(t, x) - v_2(t, x))^p) dx,$$

де p – парне натуральне число. Її похідна має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}_p(t)}{dt} &= p \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1} \left(\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right) dx + p \int_{\Omega} (v_1 - v_2)^{p-1} \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} \right) dx = \\ &= p\mu_1 \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1} (\Delta u_1 - \Delta u_2) dx + p \int_{\Omega} a_1(t, x) (u_1 - u_2)^p dx - \\ &- p \int_{\Omega} (b_1(t, x) (u_1 - u_2)^p (u_1 + u_2) + c_1(t, x) (u_1 - u_2)^{p-1} (u_1 v_1 - u_2 v_2)) dx + \\ &+ p\mu_2 \int_{\Omega} (v_1 - v_2)^{p-1} (\Delta v_1 - \Delta v_2) dx + p \int_{\Omega} a_2(t, x) (v_1 - v_2)^p dx - \\ &- p \int_{\Omega} (c_2(t, x) (v_1 - v_2)^p (v_1 + v_2) + b_2(t, x) (v_1 - v_2)^{p-1} (u_1 v_1 - u_2 v_2)) dx. \end{aligned}$$

Враховуючи рівність

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-1} (\Delta u_1 - \Delta u_2) dx = -(p-1) \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^{p-2} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx,$$

отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}_p(t)}{dt} &\leq p \int_{\Omega} (a_1^M - (2b_1^L + c_1^L)m_0) (u_1 - u_2)^p dx + \\ &+ p \int_{\Omega} (c_1^M M_0 |(u_1 - u_2)^{p-1} (v_1 - v_2)| + b_2^M M_0 |(u_1 - u_2) (v_1 - v_2)^{p-1}|) dx + \\ &+ p \int_{\Omega} (a_2 - (b_2^L + 2c_2^L)m_0) (v_1 - v_2)^p dx \leq p (a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0) \mathcal{A}_p(t). \end{aligned}$$

В останніх оцінках ми скористалися нерівністю $w^{p-1}z + wz^{p-1} \leq w^p + z^p$ для невід'ємних w, z і натурального p .

При $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$ виконується нерівність

$$\mathcal{A}_p(\tau_j) \leq \mathcal{A}_p(\tau_{j-1} + 0) \exp \{ p (a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0) (\tau_j - \tau_{j-1}) \}.$$

За допомогою формул (3), (4) оцінимо $\mathcal{A}_p(\tau_j + 0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p(\tau_j + 0) &= \int_{\Omega} (1 + d_{1j})^p (u_1(\tau_j, x) - u_2(\tau_j, x))^p dx + \\ &+ \int_{\Omega} (1 + d_{2j})^p (v_1(\tau_j, x) - v_2(\tau_j, x))^p dx \leq \\ &\leq \max \{ (1 + d_{1j})^p, (1 + d_{2j})^p \} \mathcal{A}_p(\tau_j) = K_j^p \mathcal{A}_p(\tau_j). \end{aligned}$$

Як наслідок отримуємо

$$\mathcal{A}_p(t) \leq \prod_{t_0 \leq \tau_j < t} K_j^p e^{p(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0)(t-t_0)} \mathcal{A}_p(\tau_0). \quad (15)$$

При виконанні нерівності

$$\prod_{t_0 \leq \tau_j < t} K_j e^{(a^M - (2b^L + c^L)m_0 + c^M M_0)(t-t_0)} \leq M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)}$$

з нерівності (15) випливає експоненціальна оцінка з показником $-\beta_1$ в усіх просторах $L^p(\Omega)$ з парними p і як наслідок оцінка в \sup -нормі

$$\begin{aligned} &\sup_x (|u_1(t, x) - u_2(t, x)| + |v_1(t, x) - v_2(t, x)|) \leq \\ &\leq M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \sup_x (|u_1(t_0, x) - u_2(t_0, x)| + |v_1(t_0, x) - v_2(t_0, x)|), \end{aligned} \quad (16)$$

що показує рівномірну асимптотичну стійкість розв'язків у просторі $C(\bar{\Omega})$.

4. Абстрактна постановка. Позначимо $w = (u, v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) = X$, де $p > n$ — натуральне число. Норму у просторі $X = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ будемо позначати $\|\cdot\|_0$.

Запишемо систему (1)–(5), (6) у вигляді

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t, w), \quad t \neq \tau_j, \quad (17)$$

$$w(\tau_j + 0) = w(\tau_j) + G_j(w(\tau_j)), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (18)$$

$$w(0) = w_0, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -\mu_1 \Delta + \beta & 0 \\ 0 & -\mu_2 \Delta + \beta \end{pmatrix}, \quad \beta > 0, \\ F(t, w) &= \begin{pmatrix} u(a_1(t, \cdot) + \beta - b_1(t, \cdot)u - c_1(t, \cdot)v) \\ v(a_2(t, \cdot) + \beta - b_2(t, \cdot)u - c_2(t, \cdot)v) \end{pmatrix}, \\ G_j(w(\tau_j)) &= \begin{pmatrix} d_{1j}u(\tau_j, \cdot) + q_{1j} \\ d_{2j}v(\tau_j, \cdot) + q_{2j} \end{pmatrix} = D_j w(\tau_j) + Q_j, \end{aligned}$$

β – деяке додатне число, $\beta < \beta_1$. Легко бачити, що $d = \sup_j \|D_j\|$, $q = \sup_j \|Q_j\|$.

Оператор A_1 має область означення

$$D(A_1) = \left\{ \xi : \xi \in W^{2,p}(\Omega), \frac{\partial \xi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\},$$

де $W^{2,p}(\Omega)$ – простір Соболева функцій з $L_p(\Omega)$, які мають дві узагальнені похідні. Оператор A_1 секторіальний з $\Re \xi \geq \beta$ для $\xi \in \sigma(A_1)$, де $\sigma(A_1)$ – спектр оператора A_1 . Для оператора A_1 означаються степені $A_1^\alpha, \alpha \geq 0$, та відповідні їм області означення $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ з нормою $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|_0$ [21]. Оператор $-A_1$ є генератором аналітичної напівгрупи $e^{-A_1 t}$ і справджується рівність $e^{-A_1 t} A_1^\alpha x = A_1^\alpha e^{-A_1 t} x$, де $x \in X^\alpha, t > 0$. Виконуються нерівності [21]

$$|A_1^\alpha e^{-A_1 t}|_0 \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\beta t}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad (20)$$

$$\|(e^{-A_1 t} - I)x\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha |A_1^\alpha x|_0, \quad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1], \quad x \in X^\alpha, \quad (21)$$

де $C_\alpha > 0$ обмежена при $\alpha \rightarrow 0+$. Також виконується нерівність $\|x\|_0 \leq L_0 \|x\|_\alpha$ з деякою сталою $L_0 > 0$ для $x \in X_\alpha$.

Виберемо α так, що $2\alpha - n/p \geq \nu > 0, \alpha < 1$. Аналогічно [23] покажемо, що якщо початкова функція задовольняє умову $w_0 \in X^\alpha, w_0 \geq 0$, то задача без імпульсів (1)–(2), (6) має єдиний класичний розв'язок $(u(t, x), v(t, x))$, який існує для всіх $t > 0$, якщо $u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Розв'язок початкової задачі (17)–(19) задовольняє інтегральне рівняння

$$w(t, w_0) = e^{-A_1 t} w_0 + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s)) ds + \sum_{0 < \tau_j < t} e^{-A_1(t-\tau_j)} G_j(w(\tau_j)),$$

тому за означенням норми у просторі X^α

$$\begin{aligned} \|w(t, w_0)\|_\alpha &\leq \|e^{-A_1 t}\|_0 \|w_0\|_\alpha + \int_0^t |A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s))|_0 ds + \\ &+ \sum_{0 < \tau_j < t} |A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_j)} (D_j w(\tau_j) + Q_j)|_0, \end{aligned}$$

Для $t \in [\tau_k - \theta/2, \tau_k]$ виконується $(t - \tau_j)^{-1} \leq 2/\theta, j < k$. З останньої нерівності і (20) отримуємо

$$\begin{aligned} \|w(t, w_0)\|_\alpha &\leq C_0 e^{-\beta t} \|w_0\|_\alpha + C_\alpha F_0 \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\alpha} ds + \\ &+ C_\alpha (dM_0 + q) (2/\theta)^\alpha \sum_{0 < \tau_j < t} e^{-\beta(t-\tau_j)} \leq \tilde{C}_0, \quad t \in [\tau_k - \theta/2, \tau_k], \end{aligned}$$

де $F_0 = \sup_{w \in E_0} \|F(s, w)\|_0$. Отже, $\|w(\tau_j, w_0)\|_\alpha \leq \tilde{C}_0$ для всіх натуральних j . З (18) одержуємо $\|w(\tau_j + 0, w_0)\|_\alpha \leq d\tilde{C}_0 + q$. Звідси випливає, що $\|w(t, w_0)\|_\alpha \leq \tilde{C}_1, t \geq 0$, з деякою

додатною сталою \tilde{C}_1 . З обмеженості множини у просторі X^β випливає її компактність у просторі X^α , $\alpha < \beta$. Тому траєкторії $w(t)$ передкомпактні в X^α , $\alpha > 0$.

Норма різниці двох розв'язків $w(t, w_1)$ і $w(t, w_2)$ задовольняє нерівність

$$\begin{aligned} & \|w(t, w_1) - w(t, w_2)\|_\alpha \leq \|A_1^\alpha e^{-A_1 t}(w_1 - w_2)\|_0 + \\ & + \int_0^t \|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s, w_1)) - F(s, w(s, w_2))\|_0 ds + \\ & + \sum_{0 < \tau_j < t} \|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_j)} D_j(w(\tau_j, w_1) - w(\tau_j, w_2))\|_0 \leq \\ & \leq C_0 e^{-\beta t} \|w_1 - w_2\|_\alpha + \int_0^t \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} F_w |w(s, w_1) - w(s, w_2)|_0 ds + \\ & + \sum_{0 < \tau_j < t} \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-\tau_j)}}{(t-\tau_j)^\alpha} d \|w(\tau_j, w_1) - w(\tau_j, w_2)\|_0 ds, \end{aligned} \quad (22)$$

де $F_w = \sup_{w \in E_0} \|\partial_w F_w\|$. Використовуючи (16), отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} & |w(t, w_1) - w(t, w_2)|_\alpha \leq C_0 e^{-\beta t} \|w_1 - w_2\|_\alpha + \\ & + \int_0^t \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} F_w M_1 e^{-\beta_1 s} \|w_1 - w_2\|_0 ds + \\ & + C_\alpha d (2/\theta)^\alpha \sum_{0 < \tau_j < t} e^{-\beta(t-\tau_j)} M_1 e^{-\beta_1 \tau_j} \|w_1 - w_2\|_0 \leq \\ & \leq e^{-\beta t} \|w_1 - w_2\|_\alpha \left(C_0 + F_w M_1 L_0 \int_0^t \frac{C_\alpha e^{-(\beta_1-\beta)s}}{(t-s)^\alpha} ds + \frac{C_\alpha d M_1 L_0 (2/\theta)^\alpha}{1 - e^{-\theta(\beta_1-\beta)}} \right) \leq \\ & \leq M_2 e^{-\beta t} \|w_1 - w_2\|_\alpha, \quad t \in [\tau_k - \theta/2, \tau_k]. \end{aligned} \quad (23)$$

Тому

$$\|w(\tau_k, w_1) - w(\tau_k, w_2)\|_\alpha \leq M_2 e^{-\beta \tau_k} \|w_1 - w_2\|_\alpha$$

і, враховуючи форму імпульсної дії (18), маємо

$$|w(\tau_k + 0, w_1) - w(\tau_k + 0, w_2)|_\alpha \leq d M_2 e^{-\beta \tau_k} \|w_1 - w_2\|_\alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглядаючи $w(\tau_k + 0, w_1) - w(\tau_k + 0, w_2)$ як початкову точку, аналогічно (23) на інтервалі $t \in [\tau_k + 0, \tau_{k+1} - \theta/2]$ отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} & |w(t, w_1) - w(t, w_2)|_\alpha \leq \\ & \leq e^{-\beta(t-\tau_k)} \left(C_0 + F_w M_1 L_0 \int_{\tau_k}^t \frac{C_\alpha e^{-(\beta-\beta_1)s}}{(t-s)^\alpha} ds \right) |w(\tau_k + 0, w_1) - w(\tau_k + 0, w_2)|_\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

З нерівностей (23) і (24) отримуємо оцінку для всіх $t \geq 0$:

$$|w(t, w_1) - w(t, w_2)|_\alpha \leq M_3 e^{-\beta t} \|w_1 - w_2\|_\alpha \quad (25)$$

з деякою додатною сталою $M_3 \geq 1$.

5. Майже періодичні розв'язки.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді система має єдиний асимптотично стійкий кусково-неперервний майже періодичний розв'язок зі значеннями у множині E_0 .*

Доведення. Розглянемо розв'язок $\xi(t)$ системи (17), (18) зі значеннями у множині E_0 . Він рівномірно асимптотично стійкий у просторі X^α . Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існують $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ і $T(\varepsilon) > 0$ такі, що для кожного розв'язку $w(t)$ системи (17), (18) з $\|\xi(0) - w(0)\|_\alpha < \delta$ виконується $\|\xi(t) - w(t)\|_\alpha < \varepsilon/2$ для $t \geq 0$ і $\|\xi(t) - x(t)\|_\alpha < \delta_1/2$ для всіх $t \geq T(\varepsilon)$, $\delta_1 = \min(\varepsilon, \delta)$.

Нехай $\{\nu_m\}$ – така довільна послідовність дійсних чисел, що $\nu_{m+1} > \nu_m$, $\nu_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Оскільки система майже періодична, існує підпослідовність (яку знову позначимо $\{\nu_m\}$), для якої виконуються такі умови:

а₁) існують послідовність цілих чисел $\alpha(m)$ (див. [12]), майже періодичні послідовності $\{\tilde{D}_i\}$, $\{\tilde{P}_i\}$ і послідовність дійсних чисел із рівномірно майже періодичними різницями $\{\tilde{\tau}_i\}$ такі, що $\lim_{m \rightarrow \infty} (\tau_{i+\alpha(m)} - \nu_m) = \tilde{\tau}_i$, $\lim_{m \rightarrow \infty} D_{i+\alpha(m)} = \tilde{D}_i$, $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{i+\alpha(m)} = \tilde{P}_i$ рівномірно по $i \in \mathbb{Z}$;

а₂) $F(t + \nu_m, w)$ прямує до деякої функції $\tilde{F}(t, w)$ у w -топології рівномірно відносно w з обмеженої області $\|w\|_\alpha \leq K$;

а₃) $\xi_0^m = \xi(\nu_m)$ збігається у просторі X^α до деякого елемента ζ_0 (оскільки траєкторія $\xi(t)$ передкомпактна в X^α).

Позначимо $\xi^m(t) = \xi(t + \nu_m)$. Тоді $\xi^m(t)$ є розв'язком системи

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_m, w), \quad (26)$$

$$w(\tau_j - \nu_m + 0) = w(\tau_j - \nu_m) + G_j(w(\tau_j - \nu_m)), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

і $\xi^m(t)$ рівномірно асимптотично стійкий з тими ж $\delta(\varepsilon)$ і $T(\varepsilon)$, як і $\xi(t)$.

Позначимо $\tau_j - \nu_m = \tau_{j-\alpha(m)}^m$. Нехай $j - \alpha(m) = i$, тоді $j = i + \alpha(m)$ і система (26), (27) набирає вигляду

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_m, w), \quad (28)$$

$$w(\tau_i^m + 0) = w(\tau_i^m) + G_{i+\alpha(m)}(w(\tau_i^m)), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (29)$$

Аналогічно позначимо $\tau_j - \nu_n = \tau_{j-\alpha(n)}^n$. Нехай $j - \alpha(n) = i$, тоді $j = i + \alpha(n)$ і розв'язок $\xi^n(t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \nu_n, w), \quad (30)$$

$$w(\tau_i^n + 0) = w(\tau_i^n) + G_{i+\alpha(n)}(w(\tau_i^n)), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

З умов а₁)–а₃) випливає, що для додатного δ_1 існує таке натуральне N_1 , що при $m, n \geq N_1$ виконується

$$|\tau_i^m - \tau_i^n| < \delta_1, \quad |G_{i+\alpha(m)}(w) - G_{i+\alpha(n)}(w)|_\alpha < \delta_1, \quad \rho(F(\cdot + \nu_m, w), F(\cdot + \nu_n, w)) < \delta_1 \quad (32)$$

рівномірно по $i \in \mathbb{Z}$ та $\|w\|_\alpha \leq K$ з деяким $K > 0$.

Нехай $\eta(t)$ – розв’язок рівняння (28), (29) з початковою умовою $\eta(0) = \xi^n(0) = \xi(\nu_n)$. Існує таке $N > 0$, що $\|\xi^m(0) - \xi^n(0)\|_\alpha < \delta$ при $m, n \geq N$. Тоді з рівномірної асимптотичної стійкості отримуємо $|\eta(t) - \xi^m(t)|_\alpha < \varepsilon/2$ при $t \geq 0$ і $\|\eta(t) - \xi^m(t)\|_\alpha < \delta/2$ при $t \geq T(\varepsilon)$.

Оцінимо $\eta(t) - \xi^n(t)$ на інтервалі $[0, T(\varepsilon)]$. Припустимо для визначеності $\tau_1^m < \tau_1^n$. При виконанні (32) на інтервалі $[0, \tau_1^m]$ різниця $\eta(t) - \xi^n(t)$ задовольняє оцінки

$$\begin{aligned} |\eta(t) - \xi^n(t)|_\alpha &\leq \int_0^t |A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} (F(s + \nu_m, \eta(s)) - F(s + \nu_m, \xi^n(s)))|_0 ds + \\ &+ \int_0^t |A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} (F(s + \nu_m, \xi^n(s)) - F(s + \nu_n, \xi^n(s)))|_0 ds \leq \\ &\leq \int_0^t \frac{F_w L_0 C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} |\eta(s) - \xi^n(s)|_\alpha ds + \delta_1 \int_0^t \frac{C_\alpha e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds \leq \\ &\leq F_w L_0 C_\alpha \int_0^t \frac{|\eta(s) - \xi^n(s)|_\alpha}{(t-s)^\alpha} ds + \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (33)$$

За лемою 2 існує така стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, Q, F_w)$, що

$$|\eta(t) - \xi^n(t)|_\alpha \leq \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha} \tilde{C} = \Lambda_1(\delta_1), \quad t \in [0, \tau_1^m].$$

Оцінимо різницю в точці $t = \tau_1^n + 0$:

$$\begin{aligned} |\eta(\tau_1^n + 0) - \xi^n(\tau_1^n + 0)|_\alpha &\leq |A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - \tau_1^m)} (D_1 \eta(\tau_1^m) + Q_1) + \\ &+ \int_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - s)} F(s + \nu_m, \eta(s)) ds - D_1 A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - \tau_1^m)} \xi^n(\tau_1^m) - A_\alpha Q_1 - \\ &- \int_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} D_1 A_1^\alpha e^{-A_1(\tau_1^n - s)} F(s + \nu_n, \xi^n(s)) ds|_0 \leq d C_0 e^{-\beta(\tau_1^n - \tau_1^m)} |\eta(\tau_1^m) - \xi^n(\tau_1^m)|_\alpha + \\ &+ (1+d) F_0 \int_{\tau_1^m}^{\tau_1^n} \frac{C_\alpha e^{-\beta(\tau_1^n - s)}}{(\tau_1^n - s)^\alpha} ds + |A_1^\alpha (e^{-\beta(\tau_1^n - \tau_1^m)} - I) Q_1|_0 \leq \\ &\leq d C_0 \Lambda_1(\delta_1) + \frac{(1+d) F_0 C_\alpha}{1-\alpha} \delta_1^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} C_{1-\alpha_1} \delta_1^{\alpha_1} \|Q_1\|_{\alpha+\alpha_1} = \tilde{\Lambda}_2(\delta_1), \end{aligned} \quad (34)$$

де $\tilde{\Lambda}_2(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$.

На інтервалі $t \in (\tau_1^n, \min\{\tau_2^m, \tau_2^n\}]$ різниця задовольняє нерівність

$$|\eta(t) - \xi^n(t)|_\alpha \leq |A_1^\alpha e^{-A_1(t-\tau_1^n)} (\eta(\tau_1^n + 0) - \xi^n(\tau_1^n + 0))|_0 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t |A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} (F(s + \nu_m, \eta(s)) - F(s + \nu_n, \xi^n(s)))|_0 ds \leq \\
 & \leq C_0 \tilde{\Lambda}_2(\delta_1) + F_w L_0 C_\alpha \int_0^t \frac{|\eta(s) - \xi^n(s)|_\alpha}{(t-s)^\alpha} ds + \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha}
 \end{aligned}$$

і за лемою 2 оцінку

$$|\eta(t) - \xi^n(t)|_\alpha \leq \left(C_0 \tilde{\Lambda}_2(\delta_1) + \delta_1 \frac{\Theta^{1-\alpha} C_\alpha}{1-\alpha} \right) \tilde{C} = \Lambda_2(\delta_1).$$

Аналогічно (34) отримуємо

$$\begin{aligned}
 & |\eta(\max\{\tau_2^m, \tau_2^n\} + 0) - \xi^n(\max\{\tau_2^m, \tau_2^n\} + 0)|_\alpha \leq \\
 & \leq dC_0 \Lambda_2(\delta_1) + \frac{(1+d)F_0 C_\alpha}{1-\alpha} \delta_1^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} C_{1-\alpha_1} \delta_1^{\alpha_1} \|Q_2\|_{\alpha+\alpha_1} = \tilde{\Lambda}_3(\delta_1),
 \end{aligned}$$

де $\tilde{\Lambda}_3(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$.

На інтервалі $[0, T(\varepsilon)]$ не більше ніж $T(\varepsilon)/\theta + 1$ точок імпульсної дії. Проводячи аналогічне оцінювання, показуємо, що існують такі функції $\Lambda_j(\delta_1)$, що $\Lambda_j(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$ і

$$|\eta(t) - \xi^n(t)|_\alpha \leq \Lambda_j(\delta_1), \quad t \in (\max\{\tau_{j-1}^m, \tau_{j-1}^n\}, \min\{\tau_j^m, \tau_j^n\}],$$

для $j = 1, 2, \dots, T(\varepsilon)/\theta + 1$. Припускаємо, що $\tau_0^m = \tau_0^n = 0$. Виберемо δ_1 так, щоб $\Lambda_j(\delta_1) < \delta/2$ для всіх j .

Отже, існує таке натуральне N_1 , що для всіх $m, n \geq N_1$ виконується $\rho(\eta(\cdot), \xi^n(\cdot)) < \delta/2$ на інтервалі $[0, T(\varepsilon)]$. Тому $\rho(\xi^m(\cdot), \xi^n(\cdot)) < \varepsilon$ при $t \in [0, T(\varepsilon)]$ і $|\xi^m(T(\varepsilon)) - \xi^n(T(\varepsilon))|_\alpha < \delta$. Розглядаючи точку $t = T(\varepsilon)$ як початкову і повторюючи наведене вище оцінювання, отримуємо аналогічні нерівності на інтервалі $[T(\varepsilon), 2T(\varepsilon)]$ і в точці $t = 2T(\varepsilon)$. Повторюючи таку ж процедуру на наступних інтервалах $[2T(\varepsilon), 3T(\varepsilon)]$, $[3T(\varepsilon), 4T(\varepsilon)]$ і т. д., у підсумку отримуємо $\rho(\xi^m(\cdot), \xi^n(\cdot)) < \varepsilon$ при $t \geq 0$ і $m, n \geq N_1$.

Ми довели збіжність у w -топології на півосі $t \geq 0$ послідовності функцій $\xi(t + \nu_n)$ зі значеннями у просторі X^α . Позначимо через $p(t)$, $t \geq 0$, граничну функцію. Використовуючи стандартний діагональний метод і вибираючи, якщо необхідно, підпослідовності послідовності $\{\nu_n\}$, продовжуємо функцію $p(t)$ на всю вісь так, що $\xi(t + \nu_n)$ збігається до $p(t)$ у w -топології на компактних інтервалах.

Покажемо, що функція $p(t)$ w -майже періодична. За побудовою функція $p(t)$ має послідовність розривів $\{\tilde{\tau}_j\}$, яка має рівномірно майже періодичні послідовності різниць. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $T_1 = T_1(\varepsilon)$, що множина

$$\left\{ \tau : \sup_{t \geq T_1(\varepsilon)} |\xi(t + \tau) - \xi(t)|_\alpha < \varepsilon, |t - \tau_k| > \varepsilon \right\} \tag{35}$$

відносно щільна в \mathbb{R} . Дійсно, якщо множина (35) не є відносно щільною для деякого $\varepsilon_0 > 0$, то для довільного $T_1(\varepsilon_0)$ існує послідовність інтервалів $[h_n - l_n, h_n + l_n]$ таких, що

$$\sup_{t \geq T_1(\varepsilon_0), |t - \tau_k| \geq \varepsilon_0} |\xi(t + \tau) - \xi(t)|_\alpha \geq \varepsilon_0$$

для всіх $\tau \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$. Виберемо довільне l_1 і $l_n > \max_{m < n} h_m$, тоді $h_n - h_m \in$

$\in [h_n - l_n, h_n + l_n]$, якщо $m < n$. Тому

$$\sup_{t \geq 0, |t+h_m-\tau_k| \geq \varepsilon_0} |\xi(t+h_n) - \xi(t+h_m)|_\alpha = \sup_{t \geq h_m, |t-\tau_k| \geq \varepsilon_0} |\xi(t) - \xi(t+h_n-h_m)|_\alpha \geq \varepsilon_0. \quad (36)$$

За доведеним вище послідовність $\{h_n\}$ має таку підпослідовність $\{h_{n_k}\}$, що послідовність функцій $\{\xi(t+h_{n_k})\}$ збіжна у w -топології на півосі $t \geq 0$. Це суперечить нерівності (36).

Тепер покажемо, що гранична функція $p(t)$ задовольняє нерівність $|p(t+\tau) - p(t)|_\alpha < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $|t - \tilde{\tau}_k| > \varepsilon$. Вибираючи ν_n з достатньо великим n , отримуємо нерівність $|\xi(t+\nu_n+\tau) - \xi(t+\nu_n)|_\alpha < \varepsilon$ для $t \geq T(\varepsilon) - \nu_n$, $t+\tau \geq T_1(\varepsilon) - \nu_n$ і $|t+\theta_n - \tilde{\tau}_k| > \varepsilon$. Зафіксуємо t , τ і виберемо достатньо велике n так, що виконуються останні нерівності. Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, отримуємо $|p(t+\tau) - p(t)|_\alpha < \varepsilon$. Ця нерівність виконується для $t \in \mathbb{R}$, $|t - \tilde{\tau}_k| > \varepsilon$ і відносно щільної множини ε -майже періодів τ . Отже, функція $p(t)$ w -майже періодична.

Виберемо таку послідовність дійсних чисел $\{\theta_k\}$, що $\theta_{k+1} > \theta_k$ і $\theta_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, і виконуються умови:

a₁') існує послідовність $\alpha(m)$ така, що $\lim_{m \rightarrow \infty} (\tau_{i+\alpha(m)} - \theta_m) = \tau_i$, $\lim_{m \rightarrow \infty} D_{i+\alpha(m)} = D_i$, $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{i+\alpha(m)} = P_i$ рівномірно по $i \in \mathbb{Z}$;

a₂') $F(t + \theta_m, w)$ прямує до $F(t, w)$ у w -топології рівномірно відносно w , $\|w\|_\alpha \leq K$;

a₃') $\xi(\theta_m)$ збігається у просторі X^α до деякого елемента $\tilde{\zeta}_0$.

Позначимо через $p_*(t)$ побудовану за цією послідовністю w -майже періодичну функцію $\mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$. Доведемо, що вона задовольняє рівняння (17), (18). Функція $p_*(t)$ будуватиметься як границя послідовності функцій $\tilde{\xi}(t + \theta_m)$, які задовольняють рівняння

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t + \theta_m, w),$$

$$w(\tau_{i+\alpha(m)} - \theta_m + 0) = w(\tau_{i+\alpha(m)} - \theta_m) + G_{i+\alpha(m)}(w(\tau_{i+\alpha(m)} - \theta_m)), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Виберемо відрізок $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, який не містить точок імпульсів τ_i і точок $\tau_{i+\alpha(m)} - \theta_m$ при досить великих m . На відрізку $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ розв'язок $\tilde{\xi}(t + \theta_m)$ зодовольняє інтегральне рівняння

$$\tilde{\xi}(t + \theta_m) = e^{-A_1(t-\bar{t}_1)} \tilde{\xi}(\bar{t}_1 + \theta_m) + \int_{\bar{t}_1}^t e^{-A_1(t-s)} F(s + \theta_m, \tilde{\xi}(s + \theta_m)) ds.$$

Переходячи в останньому рівнянні до границі при $m \rightarrow \infty$, отримуємо інтегральне рівняння для $p_*(t)$:

$$p_*(t) = e^{-A_1(t-\bar{t}_1)} p_*(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^t e^{-A_1(t-s)} F(s, p_*(s)) ds.$$

За лемою 3.3.2 з [21] неперервний розв'язок $(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \rightarrow X^\alpha$ цього інтегрального рівняння є класичним розв'язком рівняння (17), (18) у банаховому просторі X . Аналогічно [23] показуємо, що якщо α задовольняє нерівності

$$2\alpha - n/p \geq \nu > 0, \quad \alpha < 1, \quad (37)$$

то задача без імпульсів (1), (2) з початковою функцією $w_0 \in X^\alpha$, $w_0(\cdot) \geq 0$, має єдиний класичний розв'язок $(u(t, x), v(t, x))$, який існує для всіх $t > 0$. Імпульсні умови задовольняються за побудовою. При виконанні нерівностей (37) простір X^α неперервно вкладений у простір C^ν . Отже, розв'язок $p_*(t) \in w$ -майже періодичним як функція $\mathbb{R} \rightarrow C(\Omega)$.

Теорему 3 доведено.

Література

1. Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V. I. An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* – 2006. – 7, № 5. – P. 1255–1267.
2. Dvirnyj A. I., Slyn'ko V. I. Stability in terms of two measures for a class of semilinear impulsive parabolic equations // *Sb. Math.* – 2013. – 204, № 4. – P. 485–507.
3. Li C., Guo X., He D. An impulsive diffusion predator-prey system in three-species with Beddington-DeAngelis response // *J. Appl. Math. and Comput.* – 2013. – 43, № 1-2. – P. 235–248.
4. Struk O. O., Tkachenko V. I. On impulsive Lotka–Volterra systems with diffusion // *Ukr. Math. J.* – 2002. – 54, № 4. – P. 629–646.
5. Wang X., Li Z. Global attractivity and oscillations in a nonlinear impulsive parabolic equation with delay // *Kyungpook Math. J.* – 2008. – 48, № 4. – P. 593–611.
6. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
7. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1995. – x + 462 p.
8. Akhmetov M. U., Perestyuk N. A. Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // *J. Appl. Math. Mech.* – 1992. – 56, № 6. – P. 829–837.
9. Dvornyk A. V., Tkachenko V. I. Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions // *Ukr. Math. J.* – 2017. – 68, № 11. – P. 1673–1693.
10. Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S. Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments // *J. Math. Anal. and Appl.* – 2017. – 446, № 1. – P. 1030–1045.
11. Pinto M., Robledo G. Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // *Appl. Math. and Comput.* – 2010. – 217, № 8. – P. 4167–4177.
12. Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I. Almost periodic impulsive systems // *Different. Equat.* – 1993. – 29, № 4. – P. 684–691.
13. Stamov G. T. Almost periodic solutions of impulsive differential equations // *Lect. Notes Math.* – 2012. – 2047. – XX + 217 p.
14. Tkachenko V. Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // *Funct. Different. Equat.* – 2014. – 21, № 3-4. – P. 155–169.
15. Tkachenko V. Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action // *Math. Modeling and Appl. Nonlinear Dynamics.* – New York: Springer, 2016. – P. 161–205.
16. Coppel W. A. Almost periodic properties of ordinary differential equations // *An. Mat. Pura ed Appl. Serie Quarta.* – 1967. – 76, № 1. – P. 27–49.
17. Yoshizawa T. Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system // *Funkc. Ekvacioj.* – 1969. – 12, № 1. – P. 23–40.
18. Myslo Y. M., Tkachenko V. I. Global attractivity in almost periodic single species models // *Funct. Different. Equat.* – 2011. – 18, № 3-4. – P. 269–278.
19. Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I. Unbounded functions with almost periodic differences // *Ukr. Math. J.* – 1991. – 43, № 10. – P. 1306–1309.
20. Dvornyk A. V., Tkachenko V. I. On the stability of solutions of evolutionary equations with nonfixed times of pulse actions // *J. Math. Sci.* – 2017. – 220, № 4. – P. 425–439.
21. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations // *Lect. Notes Math.* 1981. – 840. – IV + 348 p.
22. Smith L. H. Dynamics of competition // *Lect. Notes Math.* – 1999. – 1714. – P. 192–240.
23. Alikakos N. D. An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations // *J. Different. Equat.* – 1979. – 33, № 2. – P. 201–225.

Одержано 01.12.17