ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Пиць К.

Науковий керівник – доц. Дрогобицький Ю.В.

НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕМПЕРАТУРНІ РОЗПОДІЛИ У НАПІВПРОВІДНИКУ

Метою дослідження є нестаціонарні температурні розподіли, що формуються в масивних твердотільних зразках під впливом модульованих в часі, дискретних теплових імпульсів без врахування електрон-фононної взаємодії.

Актуальність дослідження полягає у тому, що раніше розглядались лише або неперервні пучки енергій, або модульовані імпульси лише квадратної форми.

Як відомо, врахування існування декількох нерівноважних підсистем призводить до значних математичних труднощів, і у загальному випадку не допускає аналітично точних розв'язків. У зв'язку із цим у нашій роботі ми обмежимося спрощеною моделлю. Будемо вважати, що у досліджуваному зразку нерівноважні температури всіх квазічастинок однакові, а поглинання імпульсу енергії відбувається на поверхні зразка. Така модель може бути реалізованою, наприклад, в напівпровідниках з n- або p-типом провідності з достатньо сильною електрон-фононною енергетичною взаємодією при щільному контакті напівпровідника з металевою плівкою, що поглинає енергію падаючого випромінювання і перетворює її в тепло. Зауважимо, що дана модель є точною для опису розповсюдження теплового імпульсу в металах і непрозорих діелектриках[5; 6].

Розглянемо наступну задачу: нехай на ліву поверхню однорідного, ізотропного, напівнескінченного зразка падають теплові імпульси, що мають довільну форму. Нехай τ_1 - тривалість імпульсу, а τ_2 — час, який проходить між двома сусідніми тепловими імпульсами.

Будемо вважати, що бічні грані зразка — теплоізольовані (рис.1).

Для спрощення розрахунку нестаціонарного теплового поля, зручно перейти до нової

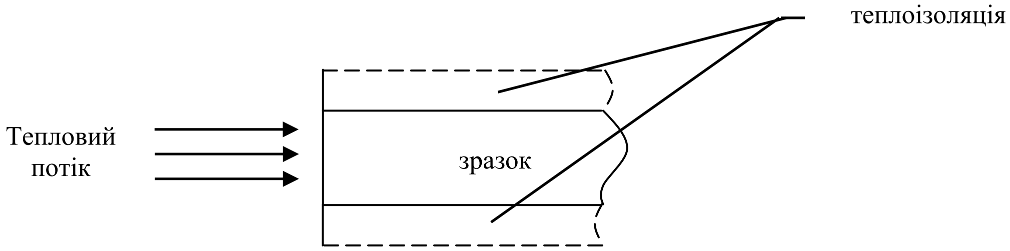

Рис. 1 Схематичне зображення досліджуваного зразка.

температури:

$$\tilde{T} = T - T_0$$

де T — нерівноважна температура, що виникає під впливом дії теплового імпульсу, T_0 – рівноважна температура.

Така заміна значно спрощує подальші розрахунки і, враховуючи лінійність рівнянь, не змінює їх вигляду. У кінцевих результатах, для переходу до звичайної температури необхідно додати T_0.

Надалі нову темперутуру $\tilde{T}$ будемо для зручності позначати як T .

Температуру T будемо шукати з рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (1)$$

Де $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ – коефіцієнт температуропровідності, k – коефіцієнт теплопровідності, ρ – густина матеріалу, c – питома теплоємність.

Розглянуте рівняння (1) відображає взаємозв'язок фізичних параметрів, які описують стан систем з неперервною щільністю і, має нескінченну множину частинних розв'язків. При розв'язанні конкретної фізичної задачі необхідно знайти розв'язок, який задовольняє деякі додаткові умови, які визначаються змістом задачі. Такими умовами є граничні умови та початкові умови.

Для нашої задачі цими умовами є наступні:

$$\begin{cases} T(x,t)\big|_{t=0} = 0 & (2) \\ -X\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = f(t) & (3) \end{cases}$$

Тут, умова (2) означає, що у початковий момент часу ($t=0$) зразок не збурений — температура рівна рівноважній. Умова (3) визначає потік через ліву поверхню зразка.

Враховуючи особливості задачі, а саме граничну умову (3), розв'язок будемо шукати за допомогою операційного методу Лапласа[1, с. 8-13].

Застосуємо перетворення Лапласа до функції:

$$T(x,t) \rightarrow U(x,p) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}^2} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow pU(x,p) - U(x,0) \qquad (6)$$

Оскільки, у початковий момент часу:

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T(x,0) = 0 \qquad (7)$$

то, зображення функції:

$$U(x,0) = 0 \qquad (8)$$

звідси отримаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = pU(x,p) \qquad (9)$$

Таким чином, вихідне рівняння перетворюється у:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} = \frac{\mathbf{P}}{\boldsymbol{\alpha}}U(x,p) \qquad (10)$$

Знайдемо зображення граничної умови (3). Для цього треба знайти зображення. За теоремою про зображення періодичного оригіналу

Якщо[1, с. 29-32]:

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & n(\tau_1+\tau_2) < t \le n(\tau_1+\tau_2)+\tau_1 \\ 0, & n(\tau_1+\tau_2)+\tau_1 < t \le n(\tau_1+\tau_2) \end{cases} \qquad (11)$$

τ_1 – тривалість імпульсу, τ_2 – тривалість затримки, n – номер імпульсу

$\tau_1 + \tau_2$ – період функції, і $f_0(t) \rightarrow F_0(p)$,

то:

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-p\,\tau_1+\tau_2}} \qquad (12)$$

Для нашого випадку:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-p\,\tau_1+\tau_2}}\int_{0}^{\tau_1+\tau_2} e^{-pt}dt=\frac{1-e^{-p\,\tau_1}}{1-e^{-p\,\tau_1+\tau_2}}\frac{1}{p} \qquad (13)$$

Для умови (3) маємо:

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\frac{F(p)}{X} \qquad (14)$$

$F(p)$ береться з (13).

Таким чином задача для зображення $U(x,p)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2}=\frac{\mathbf{P}}{\boldsymbol{\alpha}}U \qquad (15)$$

де:

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\frac{F(p)}{X} \qquad (16)$$

Оскільки розглядаємо необмежений зразок, то при $x\to\infty$ збудження повинно затухати:

$$\lim_{x\to\infty}U(x,p)=0. \qquad (17)$$

Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, загальний розв'язок рівняння[3, с. 13-81]:

$$U(x,p)=Ae^{X\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}+Be^{-X\sqrt{\frac{p}{\alpha}}} \qquad (18)$$

Згідно із (17) $A=0$. Залишається знайти B.

Знайдемо *B* з граничної умови (3):

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}e^{-X\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}B\Big|_{x=0}=-B\sqrt{\frac{p}{\alpha}}=-\frac{F(p)}{X} \qquad (19)$$

Звідки *B*:

$$B=\frac{1}{X}\sqrt{\frac{\alpha}{p}}F(p) \qquad (20)$$

Остаточно для зображення:

$$U(x,p)=\frac{\frac{1}{X}\sqrt{\alpha}F(p)1}{\sqrt{p}}e^{-X\sqrt{\frac{p}{\alpha}}} \qquad (21)$$

Де $F(p)$ відоме з (13).

Знайдемо оригінал для $F(p)$.

Використовуючи добре відоме значення зображення, маємо[1, с.180]:

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\to\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \qquad (22)$$

де в нас:

$$a=\frac{X}{\sqrt{\alpha}} \qquad (23)$$

Враховуючи, що:

$$U(x,p)=\frac{\frac{1}{X}\sqrt{\alpha}F(p)e^{-X\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}}{\sqrt{p}} \qquad (24)$$

і користуючись теоремою Бореля [2, с. 18]:

Якщо функції $f(t)$ і є оригіналами і $f(t)\to F(p)$ й $g(t)\to G(p)$, то

$$f(t)*g(t)\to F(p)*G(p) \qquad (25)$$

Де:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau \qquad (26)$$

Отримаємо:

$$T(x,t)=\frac{1}{X}\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\frac{X^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}f(\tau)d\tau \qquad (27)$$

Враховуючи періодичний характер $\mathbf{f(\tau)}$:

$$\int_0^t e^{-\frac{X^2}{4\alpha(t-\tau)}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}f(\tau)d\tau=\int_0^{\tau_1} e^{-\frac{X^2}{4\alpha(t-\tau)}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}f(\tau)d\tau+ \qquad (28)$$

Кожен з інтегралів (28) легко виражається чере[4, с. 34]:

$$\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-y^2} \quad \text{або} \quad \operatorname{Erf} t=1-\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty} e^{-y^2} \qquad (29)$$

Узявши кожен з інтегралів та знайшовши їх суму, отримаємо:

$$T(x,t)=\frac{1}{X}\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=0}^{k}T_i(x,t) \qquad (30)$$

де:

i – номер імпульсу (перший імпульс має номер “0”), k – кількість імпульсів.

$$T_i(x,t)=\int_{i(\tau_1+\tau_2)}^{i[(\tau]_1+\tau_2)+\tau_1} e^{-\frac{X^2}{4\alpha(t-\tau)}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}f(\tau)d\tau \qquad (31)$$

Висновки. Отже, знайшовши інтеграл (31), можна отримати температурний розподіл для будь-якої функції $\mathbf{f(\tau)}$ у масивних твердотільних зразках під впливом модульованих в часі, дискретних теплових імпульсів без врахування електрон-фононної взаємодії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мартыненко В.С. Операционное исчисление / В.С. Мартыненко – К.: Вища школа, 1973. –268с.
2. Павленко А.В. Операційне числення [Електронний ресурс] /А.В. Павленко, Л.П. Кагадій, В.Л. Копорулін // Дніпропетровськ: НМетАУ. – 2012. – Режим доступу до ресурсу: https://nmetau.edu.ua/file/khighmath_16314.pdf.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений/ Н.М. Матвеев.– М.: Высш. Шк., 1967.– 564с.
4. Горбань І. І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів [Текст] / І. І. Горбань ; НАН України, Ін-т пробл. мат. машин і систем. - К. : [б.в.], 2003. - 244 с.: рис. - Бібліогр.: с. 236-239. - ISBN 966-02-2664-0
5. Басс Ф.Г.Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках/ Ф.Г. Басс, В.С. Бочков, Ю.Г. Гуревич. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.– 288с.
6. Распространение теплового импульса в ограниченной проводящей среде: термоэлектрическое детектирование/ Альваро Ф. Карбалло Санчес, Ю.Г. Гуревич, Г.Н. Логвинов, Ю.В. Дрогобицкий, О.Ю. Титов. // ФТТ.- 1999.- том 41, вып. 4.- С. 606-611. [Physics of the Solid State.- 1999.- V. 41, No. 4.- p. 544-549].