Юрійчин І.

Науковий керівник – викл. Василенко Я. П.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ АПРОКСІМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ

Методи знаходження розв'язків звичайних диференційних рівнянь можна розділити на дві великі групи. В першу групу наближених методів входять, так звані, аналітичні методи. Ця назва підкреслює той факт, що в результаті їх застосування розв'язком служить елемент функціонального класу, наприклад, многочлен. До другої групи відносяться чисельні методи. Найбільш поширеними серед яких є методи Адамса і Рунге-Кутта. Характерною рисою чисельних методів є те, що відповіддю в результаті їх застосування є число чи деяка сукупність чисел.

У 1980-1984-х роках Дзядиком В.К. був розроблений, так званий, апроксімаційно-ітеративний метод (АІ-метод) розв'язування звичайних диференційних рівнянь.

На теперішній час цей метод знайшов широке застосування для знаходження наближених розв'язків ряду практичних задач (задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь першого порядку, для системи диференційних рівнянь, для розв'язування інтегральних рівнянь, крайових задач, жорстких задач для звичайних диференційних рівнянь та ін.).

В даній статті досліджується питання про наближення розв'язків задачі Коші виду:

$$\begin{cases} y' = F(x, y, \int_{x_0}^{x} f(t, y(y))dt) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

для інтегро-диференціальних рівнянь за допомогою АІ-методу з використанням ітераційного процесу Пікара.

Описано ітераційний процес Пікара для інтегро-диференційних рівнянь задачі Коші (1). Приводяться всі необхідні викладки для доведення теореми, з якої випливають достатні умови збіжності та оцінки відповідних похибок.

Розроблено АІ-алгоритм знаходження наближених розв'язків задачі Коші (1) для інтегро-диференціальних рівнянь, а також доведена основна теорема для АІ-алгоритму, де отримуються оцінки, що дозволяють досягти великої точності при його застосуванні. Ось тому запропонований підхід до розв'язання задачі Коші (1) для інтегро-диференціальних рівнянь є особливо ефективним.

Досліджена в роботі модифікація АІ-методу може знайти широке застосування і при розв'язуванні інших прикладних задач.

Ітераційний процес Пікара для інтегро-диференціальних рівнянь

Розглянемо питання про знаходження многочленного наближення розв'язку на сегменті $[x_0, x_0 + h]$ задачі Коші виду (1) за допомогою АІ-методу [2, 3]. Наближений розв'язок будемо шукати в прямокутнику:

$\Pi = \Pi(x_0, y_0, h, H) = [x_0, x_0 + h]\text{x}\,[y_0 - H, y_0 + H]$, де $\text{H} = const > 0$.

Проінтегрувавши обидві частини рівняння (1) одержимо інтегральне рівняння:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t), \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds)dt \qquad (2)$$

при умові, що (*x*, *y*) є П.

Основні положення, пов'язані з використанням процесу Пікара для наближення розв'язків задачі (1), викладені в наступній теоремі:

Теорема 1 (теорема Пікара).

Нехай на множині $\Pi = \Pi(x_0, y_0, h, H) = [x_0, x_0 + h]\text{x}\,[y_0 - H, y_0 + H]$ задана функція $f(x, y)$ яка є:

1) аналітичною в int П;
2) неперервною на П;
3) задовільняє по змінній y умову Ліпшиця з константою *A*, тобто:

$$\forall\, x \epsilon [x_0; x_0 + h] \text{ і } \forall\, y_1, y_2 \epsilon [y_0 - H, y_0 + H]: |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq A\,|y_2 - y_1|$$

і на множині $\Pi_1 = \Pi\; x\; [y_0 - H, y_0 + H]$ задана функція $F(x, y, z)$ ($z = \int_{x_0}^{x} f(t, y(y))dt$), яка є:

1) аналітичною в int Π_1;
2) неперервною на Π_1;
3) задовільняє по змінним y і z умову Ліпшиця з константами A_1 і A_2, тобто:

$$\forall\, x \epsilon [x_0; x_0 + h] \text{ і } \forall\, y_1, y_2, z_1, z_2 \epsilon [y_0 - H, y_0 + H]: |F(x, y_2, z_2) - F(x, y_1, z_1)| \leq A_1\,|y_2 - y_1| + A_2\,|z_2 - z_1|$$

Тоді, якщо для задачі Коші (1) побудувати послідовність наближених розв'язків Пікара, які визначаються ітеративним чином за допомогою формул:

$$y_0(x) = y_0;$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_0(t), \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds)dt$$
$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_1(t), \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds)dt$$
$$\dots$$
$$y_{\upsilon+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_\upsilon(t), \int_{x_0}^{x} f(s, y_\upsilon(s))ds)dt$$

то:

1) Ряд $y_0 + \sum_{\upsilon=0}^{\infty}[y_{\upsilon+1}(x) - y_\upsilon(x)]$ мажорується деяким збіжним числовим рядом з додатніми членами, а значить, і рівномірно збігається на $[x_0; x_0 + h]$ до деякої функції y(x), а його сума $y(x) = \lim_{\upsilon\to\infty} y_\upsilon(x)$ буде аналітичною функцією в $[x_0, x_0 + h]$;

2) Функція y(x) задовольняє на $[x_0, x_0 + h]$ задачі Коші (1) і, отже, є неперервно-диференційованою на відрізку $[x_0, x_0 + h]$;

3) Кожна з функцій $y_\upsilon(x), \forall\, x\epsilon\, [x_0, x_0 + h]$ наближає розв'язок $y(x)$ таким чином, що має місце нерівність:

$$|y(x) - y_\upsilon(x)| = M \cdot B^\upsilon \cdot \frac{(x-x_0)^{\upsilon+1}}{(\upsilon+1)!} \cdot e^{B(x-x_0)},$$
$$M = max|F(x, y, z), (x, y, z)|\epsilon\Pi$$
$$B = A_1 + A_2 \cdot A \cdot h$$

АІ-алгоритм наближення розв'язків інтегрально-диференціальних рівнянь

Нехай задана задача Коші (1) і ставиться завдання: наблизити розв'язки задачі Коші за допомогою АІ-методу на базі ітераційного процесу Пікара.

Аналогічно до звичайних диференціальних рівнянь, з метою побудови наближеного розв'язку, будемо застосовувати до підінтегральних функцій в (2) перенесений з [-1,1] на $[x_0, x_0 + h]$ інтерполяційний многочлен Лагранжа $Zn(f(\cdot), x)$.

Розглянемо ітеративні формули, побудовані на основі ітеративного процесу Пікара, де підінтегральні функції наближені за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа:

$$y_0(n, x) \,=\, y_0$$
$$y_\upsilon\,(n, x) \,=\, y_0 \,+ \int_{x_0}^{x} Z_n\,\{F(\cdot, y_{\upsilon-1}\,(n,\cdot), p_\upsilon\,(n,\cdot)); t\}dt \;(4.2)$$
$$\text{де}, p_\upsilon\,(n, \text{x}) \,=\, \int_{x_0}^{x} Z_n\,\{f(\cdot, y_{\upsilon-1}\,(n,\cdot)); t\}\,dt$$

Через $y_{\upsilon j}$ позначимо числа, які є значеннями в точках

$$x_j \,=\, x_j(n) \,\epsilon\, [x_0; x_0 + h]$$

таких многочленів $y_\upsilon\,(n, x)$, степеня не вище $n + 1$:

$y_\upsilon\,(n, x) = \,y_0 + \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y_{\upsilon-1}(n, x_i), p_\upsilon(n, x_i))x \int_{x_0}^{x} l_i(t)dt,$

де $p_\upsilon = \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y_{\upsilon-1}(n, x_i))x \int_{x_0}^{x} l_i(t)dt, \int_{\text{x0}}^{x} l_i(t)dt \,=\, a_{ij} \,\cdot\, \frac{h}{2}$

Тому цих формул при кожному фіксованому $n\,\epsilon\, N$ послідовно одержимо при $\nu = 1,2, \dots$ та $j = 1,2, \dots n$:

$$y_0(n, x_j) = y_0 = y_{0j}$$

$y_\upsilon(n, x_j) = y_0 + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}F(x_i, y_{\upsilon-1i}, p_{\upsilon i}) = \,y_{\upsilon j}\,,$

де $p_{\upsilon i} = p_\upsilon(n, x_j) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}F(x_i, y_{\upsilon-1}(n, x_j)).$

Оцінка точності наближення розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь за допомогою АІ-методу.

Доведена наступна теорема.

Теорема 2. Нехай задача Коші (1) (або еквівалентне їй інтегральне рівняння (2)) при деяких $h > 0, H > 0$ задана в замкнутій області:

$\Pi_1 = \Pi_1(x_0, y_0, h, H) = \,[x_0, x_0 + h]\text{x}\,[y_0 - H, y_0 + H]$

і функція $F(x, y, z)$ є аналітичною в int Π_1 і неперервною на Π_1, а функція $f(x, y)$ аналітична в int П і неперервна на П

$$(\Pi = \Pi(x_0, y_0, h, H) = \,[x_0, x_0 + h]\text{x}\,[y_0 - H, y_0 + H]).$$

Функція $F(x,y,z)$ по змінних y і z, а функція $f(x,y)$ по змінній y задовольняють умовам Ліпшиця з константами A_1, A_2 та А відповідно.

Тоді при сформульованих вище умовах многочлени $y_\upsilon(n,x)$, побудовані за допомогою АІ-алгоритму наближають на сегменті $[x_0, x_0+h]$ розв'язок $y(x)$ задачі Коші (1) таким чином, що при цьому виконується нерівність:

$$|y_\upsilon(n,x)-y(x)| \le \left(2+\frac{2}{\pi}\ln n\right)\cdot\frac{2h^2\cdot M}{(r-1)r^n}x\left(\frac{1-(hB)^{\upsilon+1}}{1-hB}\right)+MB^\upsilon\cdot\frac{h^{\upsilon+1}}{(\upsilon+1)}e^{Bh},$$

де r – параметр еліпса аналітичності ε_r (еліпса Жуковського) функції $F(x,y,z)$ з центром в точці $(x_0+\frac{h}{2},0)$ і півосями $a_r=\frac{h}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right), b_r=\frac{h}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)$.

Зауваження: У випадку, коли $r=1$, $\varepsilon_1=[x_0,x_0+h]$ (тобто еліпс Жуковського вироджується у відрізок).

Результати чисельних експериментів

Алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі Коші (1) був реалізований у вигляді комп'ютерної програми. Для тестування програми було розглянуто ряд прикладів, точний розв'язок яких є відомим.

Приклад 1. $y' = x\cdot(y+2\int_0^x ty\,dt)$, $y(0)=1$.

Точний розв'язок: $y(x)=e^{x^2}$.

Приклад 2. $y' = \frac{1}{2}\cos x(y+\int_0^x \cos t\, y(t)dt+1)$, $y(0)=1$.

Точний розв'язок: $y(x)=e^{\sin x}$.

Приклад 3. $y' = 2x\cdot(\int_0^x ty\,dt+1)$, $y(0)=1$.

Точний розв'язок: $y(x) = -\sin x^2$.

Приклад 4. $y' = x+\cos x-\frac{3}{2}(1+\cos\sqrt{2}x)+\int_0^x \sin(x-s)\,y(s)ds$, $y(0)=1$.

Точний розв'язок: $y(x) = -x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$.

Результати чисельного експерименту наведені в таблиці.

Таблиця 1

Приклад	*h*	Задана точність наближення	*n*	v	Фактична точність наближення
1	1	10^{-6}	8	8	$5{,}9\cdot10^{-7}$
		10^{-8}	9	10	$6\cdot10^{-3}$
		10^{-10}	11	11	$7{,}1\cdot10^{-10}$
	0,5	10^{-6}	5	5	$5{,}6\cdot10^{-7}$
		10^{-8}	6	7	$4{,}6\cdot10^{-8}$
		10^{-10}	8	8	$1{,}5\cdot10^{-10}$
2	1	10^{-6}	6	8	$1{,}1\cdot10^{-6}$
		10^{-8}	8	9	$1{,}9\cdot10^{-9}$
		10^{-10}	10	11	$1{,}2\cdot10^{-10}$
	0,5	10^{-6}	4	6	$1{,}5\cdot10^{-6}$
		10^{-8}	6	8	$1{,}7\cdot10^{-9}$
		10^{-10}	7	9	$2{,}2\cdot10^{-10}$
3	0,2	10^{-6}	8	3	$5{,}3\cdot10^{-6}$
	0,1	10^{-8}	5	2	$8{,}3\cdot10^{-8}$
4	0,1	10^{-6}	9	4	$1{,}3\cdot10^{-6}$

Висновки. Таким чином, апроксимаційно-ітераційний алгоритм при наближенні розв'язків задач Коші для інтегро-диференціальних рівнянь дає досить хороші результати. Особливою перевагою АІ-методу є можливість побудови наближених розв'язків в аналітичному вигляді.

ЛІТЕРАТУРА

1.Дзядик В.К.,. Басов А.М, Ризк М.М. Теорія і практика АІ-методу, порівняння його з методами Рунге-Кутта. – Київ: Інститут математики АН УРСР, 1991.

2.Дзядик В.К. Апроксимаційні методи розв'язку диференційних і інтегральних рівнянь. – Київ: Наукова дума, 1988.

3.Дзядик В.К. Апроксимаційні методи розв'язку диференційних і інтегральних рівнянь, їх застосування і розвиток. – К. Інститут математики АН УРСР, 1986.

4.Самойленко А.М. та ін. – Диференціальні рівняння: приклади і задачі. – М.: Вища школа, 1989.