Отже, комп'ютерний вимірювальний комплекс може використовуватись, як вимірювальний прилад для проведення традиційних якісних демонстрацій, надаючи їм кількісного характеру, а також як основа автоматизованої лабораторної установки. Використання універсального вимірювального комп'ютерного комплексу дає змогу вирішувати наступні питання при вивченні фізики:

- підняти демонстраційний і лабораторний експеримент на якісно більш вищий рівень, внаслідок реєстрації достатньо чутливими давачами фізичних параметрів з високою точністю, обробки експериментальних результатів з використанням відповідного програмного забезпечення і отриманням кінцевого результату у вигляді графіків і таблиць, які можуть бути синхронізовані в часі з відео фрагментами сюжетів фізичних дослідів і демонстрацій і спостерігатись одноразово на екрані монітора.
- використання даного комплексу дає змогу впроваджувати в навчальний процес основні дидактичні принципи навчання - науковість і доступність, забезпечення пізнавальної активності, індивідуалізація навчання, мотивацію, формування зворотного зв'язку між об'єктом дослідження і суб'єктом сприйняття.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Литвинов Ю., Малець Є., Мялова О., Сергєєв В. Комп'ютернітехнології в експерименті з механіки. В зб. Наукові записки КДПУ ім. В.Винниченка. Серія: педагогічні науки. Вип.. 82, ч.2, 2009 р., с. 312-316.
2. Литвинов Ю., Малець Є., Мялова О., Токарєв П., Сергєєв В. Застосуваннясучаснихтехнологій при виконанніекспериментальнихзавдань з фізики. В зб. Наукові записки КДПУ ім.. В.Винниченка, Серія: педагогічні науки, вип..90, с. 168-171.
3. Курс теоретической механики /И.М.Воронков.- М.: Наука, - 1964.
4. Курс физики «Механика» / Ч.Киттель, У.Найт, М.Рудерман. - М. Наука. - 1971. - С. 500

Бучок О.

Науковий керівник – доц. Галан В. Д.

ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ПІДМНОЖИНІ ПРЯМОЇ РАЗОМ З ПОХІДНИМИ

Нехай $E \subset R$. Звуженням функції $f: R \to R$ називається функція $f_E: E \to R$, значення якої співпадає зі значеннями на E функції f, тобто $f_E(x) = f(x)$ при $x \in E$.

Означення 1. Нехай $H(R)$– деякий простір функцій $f: R \to R$, $\breve{H}(E)$–простір функцій $f: E \to R$. Кажуть, що простір $\breve{H}(E)$ являється слідом на E простору $H(R)$ і записують:

$$\breve{H}(E) = H(R)|_E$$

якщо:

а) звуження f_E кожної функції $f \in H(R)$ належить $\breve{H}(E)$, тобто $f_E(x) \subset \breve{H}(E)$;

б) для кожної функції $f \in \breve{H}(E)$ існує функція $\bar{f} \in H(R)$, така, що $f = f_E$.

Питання, що розглядається в роботі розглядалось ще в 1934 році H. Whitney [2, с. 369-387], який описав слід класу $C^r(R), r \in N$ на довільній замкнутій підмножині $E \subset R$. ($C^r(R)$ – клас r раз неперервно диференційованих на R функцій). При цьому класом $\breve{C}^r(E)$ виявився клас заданих на E функцій, розділені різниці ($r+1$) -го порядку яких сходяться на E. В цьому випадку розглядались тільки значення функцій f на E і відповідно, розглядались тільки «прості» розділені різниці, тобто вузли $x_0, x_1, \dots, x_r$, яких були простими.

В 1957 році P. I. Merrien[8, с.291-309] розглянув випадок, коли на E відомі не тільки значення функції, але і її похідних і також описав слід класу $C^r(E)$ але уже, зрозуміло, з допомогою розділених різниць з кратними вузлами.

Надалі в роботах В.К. Дзядика, Ю.Н. Субботіна, A. Jonsson, DeBoor, Ю.А. Брудного, П.А. Шварцмана, І.А. Шевчука (див. [1,5,6,7,9]) були описані сліди класів $W^r(R)$, ($f \in W^r(R)$). Якщо похідна $f^{(r-1)}$ локально абсолютно неперервна і $|f^{(r)}(x)| \leq C, C - const$, а також класів $W^r H_k^{\varphi}(R)$ (означення див.нижче). У цих роботах опис дано з допомогою розділених різниць з простими вузлами, тобто враховувались тільки значення функції f на E.

В магістерській роботі розглядається випадок, коли на множині E відомі не тільки значення функції, але і її похідних, тому опис слідів дається за допомогою розділених різниць не з простим, а подібно до роботи P. I. Merrien з кратними вузлами.

Нехай $\tau_n = (x_0, x_1, \dots, x_n) \coloneqq (x_i)_{i=0}^{n}$ – довільний набір точок числової осі, причому деякі з точок можуть повторюватись. Запис цього ж набору у вигляді

$$\tau_n = \left(x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{jp_j}, \dots, x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{lp_l}\right) \coloneqq\coloneqq \left(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{jp_j}\right)_{j=0}^{l}$$

означає, що:

$\forall j \in \{0, 1, \dots, l\}, \; x_{j_1} = x_{j_2} = \cdots = x_{jp_j} \coloneqq \breve{x}_j;$

$\breve{x}_j \neq \breve{x}_i$, якщо $j \neq i$;

$$\sum_{j=0}^{l} p_j = n + 1$$
.

Через $[\tau_n; f]$будемо позначати розділену різницю $(n+1)$-го порядку функції f , складену по набору τ_n. Якщо набір τ_n складено з різних чисел, то через $[\tau_n; f]$будемо позначати розділену різницю в звичайному розумінні (), тобто

$$[\tau_n; f] \equiv [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0\ (j \neq i)}^{n} (x_i - x_j)} \qquad (0.1)$$

а якщо $\tau_n = \left(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{jp_j}\right)_{j=0}^{l}$ і хоча б одне з натуральних чисел $p_j > 1$, то розділена різниця $[\tau_n; f]$розглядається в узагальненому вигляді і визначається за формулою Ерміта (див., напр., [16, с. 16]):

$$[\tau_n; f] = \left[x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0p_0}, \dots, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{jp_j}, \dots, x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{lp_l}; f\right] \coloneqq \quad \coloneqq \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=0}^{p_j-1} \frac{f^{(p_j}}{(p_j} \quad , \qquad (0.2)$$

в якій

$$g_j(x) = \prod_{i=0 (i \neq j)}^{l} (x - \breve{x}_i)^{-p_i} \qquad (0.3)$$

Модулем неперервності k -го порядку (або k -м модулем неперервності) неперервної на I функції f називається функція $\omega_k(f) = \omega_k(f; t)$, що визначається при будь-якому $t \geq 0$ рівністю:

$$\omega_k(f) = \omega_k(f; I, t) \coloneqq \sup_{0 \leq h \leq t} \sup_{x, x+kh \in I} \left|\Delta_h^k(f; x)\right| , \qquad (0.4)$$

де $\Delta_l^k(f;x) \coloneqq \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i f(x+ih)$ – (0.5)

скінченна різниця k -го порядку функції f в точці x з кроком h, а I – одна з множин: $[a;b]$, або $[a;\ \infty)$, або$(-\infty;b]$, або$(-\infty;\ \infty)$.

Функцією типу k -го модуля неперервності називається функція $\varphi=\varphi(t)$, яка визначена і неперервна при $t\geq 0$ і має наступні властивості:

$\varphi(0)=0$;

$\varphi(t)$не спадає на $[0;\ \infty)$;

Функція $\frac{\varphi(t)}{t^k}$ – не зростає на $(0;\ \infty)$.

Відомо (), що яка б не була неперервна на $[a;b]$ функція f і яке б не було натуральне число k, функція

$$\varphi(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{якщо } t=0; \\ t^k \sup\limits_{u\geq t}[\omega_k(f;[a;b],u)u^{-k}], & \text{якщо } t>0 \end{cases}$$

є функцією типу k -го модуля неперервності і про будь-якому $t\geq 0$ виконується нерівність:

$$\omega_k(f;[a;b],t) \leq \varphi(t) \leq 2^k(f;[a;b],t)$$

Означення 2. Нехай $k\epsilon N$, $r\epsilon N_0=\{0\}\cup N=\{0,1,2\ 3,\dots\}$, $M>0$ –фіксоване число і φ – функція типу -го модуля неперервності.

Класом $MW^rH(k,I,\varphi)$називається множина всіх визначених на I неперервних функцій f, кожна з яких r раз неперервно диференційовна на I $(f^0(x)\coloneqq f(x))$для кожної з яких$\omega_k(f^r;t)\leq M\varphi(t), t\geq 0$.

Позначимо ще $W^rH(k,I,\varphi)\coloneqq 1W^rH(k,I,\varphi)$;

$$W^rH_k^{\varphi}(I) \coloneqq \bigcup_{M>0} MW^rH(k,I,\varphi);$$

$MH(k,I,\varphi)\coloneqq MW^0H(k,I,\varphi)$;

$H(k,I,\varphi)\coloneqq 1H(k,I,\varphi)$;

$$H_k^{\varphi}(I) \coloneqq \bigcup_{M>0} MH(k,I,\varphi).$$

Зафіксуємо$k\in N, r\in N_0, B_{k,r}$–множину впорядкованих пар (p,q), де $p\epsilon\{0,1,2,\dots,k-1\}$, $q\epsilon\{p+r+1,p+r+2,\dots,k+r\}$;набір $\tau_{k+r}=(x_0,x_1,\dots,x_{k+r})$; φ – функцію типу k -го модуля неперервності.

Означення 3. Для кожної пари $(p,q)\in B_{k,r}$ позначимо

$$\Lambda_{p,q,k,r}(x_0,x_1,\dots,x_r;\ \varphi) \equiv \Lambda_{p,q,k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi) \coloneqq \frac{\int_{\frac{1}{2}(x_q-x_p)}^{d(p,q)}\frac{\varphi(u)}{u^{q-p-r+1}}du}{\prod_{i=0}^{p-1}(x_q-x_i)\prod_{i=q+1}^{k+r}(x_i-x_p)},\quad (0.6)$$

$$d(p,q) = \begin{cases} \min\{x_{q+1} - x_p, \quad x_q - x_{p-1}\}, \text{якщо } p > 0, q < k+r; \\ x_{q+1} - x_0, \text{якщо } p = 0, q < k+r; \\ x_{k+r} - x_{p-1}, \quad \text{якщо } p > 0, q = k+r \\ x_{k+r} - x_0, \quad \text{якщо } p = 0, q = k+r \end{cases}$$

де

(0.7)

Через $\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi)$ позначимо число, що задається формулою:

$$\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi) \coloneqq \max_{(p,q)\in B_{k,r}} \Lambda_{p,q,k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi) \qquad (0.8)$$

(Тут і далі будемо вважати, що при $m > l \quad \prod_{i=m}^{l} \coloneqq 1; \quad \sum_{i=m}^{l} \coloneqq 0$).

Із цього означення видно, що величина $\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r};\ \varphi)$ враховує як структуру набору τ_{k+r}, так і властивості функції φ .

Випишемо значення величин $\Lambda_{k,r}$ для деяких важливих часткових випадків:

при $r = 0, k = 2$ та $\varphi = \varphi(t)$–довільної функції типу 2-го модуля неперервності величина $\Lambda_{2,0}(x_0, x_1, x_2;\ \varphi)$ слабо еквівалентна величині , яка була введена В. К. Дзядиком[4];

при $r = 0, k \geq 2$ та $\varphi(t) = t^{k+1}$ величина $\Lambda_{k,0}(x_0, x_1, \dots, x_r;\ \varphi)$ слабо еквівалентна величині

$1/(x_{\downarrow}k- \quad x_{\downarrow}0\ )(|\ln\ 𝔼(x_{\downarrow}k- \quad x\ 1\ /(x_{\downarrow}(k- \quad 1)- \quad x_{\downarrow}0\ )〗\ |+\ 1$

[7]

при $r \geq 0, \varphi = \varphi(t)$– функції типу 1-го модуля неперервності величина $\Lambda_{1,r}(x_0, x_1, \dots, x_{r+1};\ \varphi)$ слабо еквівалентна величині $\dfrac{\varphi(x_{r+1} - x_0)}{x_{r+1} - x_0}$;

при $r > 0, k \in N$ та $\varphi = \varphi(t) = t^k$ величина $\Lambda_{k,r}\left(x_0, x_1, \dots, x_r;\ t^k\right)$ слабо еквівалентна 1.

Нехай $\mathfrak{M}_r = \{E^{(s)}\}_{s=0}^{r}$ –деяка не зростаюча система множин на числовій осі R:

$E^{(r)} \subset E^{(r-1)} \subset \dots \subset E^{(1)} \subset E^0 \subset R$

Елементи $E^{(s)}$ системи $\mathfrak{M}_r$ будемо вважати незалежними і на системі $\mathfrak{M}_r$ означимо комплект $[f]$ наступним чином. При кожному $s \epsilon \{0,1,2,\dots,r\}$ на множині $E^{(1)}$ визначена деяка

функція $f_1(x) = f_1$.При $x \epsilon E^{\uparrow}((s)) ⊠ E^{\uparrow}((s+1))$ $(s \epsilon \{0,1,2,\dots,r\}, E^{\uparrow}(r+1) = \emptyset$ позн ачимо

$$[f(x)] \coloneqq (f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)) \qquad (0.9)$$

і будемо називати $[f(x)]$ комплектом «функцій», визначених на системі $\mathfrak{M}_r$.

Будемо говорити, що набір τ_{k+r} належить класу $\gamma(\mathfrak{M}_{\downarrow}r$), якщо

$\tau_{k+r} = \left(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j}\right)_{j=0}^{l}$

і при цьому виконуються умови:

при всіх $j = 0,1,\ldots,l$ маємо $p_j \le r+1$;

$\breve{x}_j \epsilon E^{(0)}$ при кожному $j = 0,1,\ldots,l$;

якщо при деякому $s \in \{0,1,2,\ldots,r\}$ точка $\breve{x}_j$ належить $E^{(s)} \setminus E^{(s+1)}$, то $p_j \le s+1$.

Нехай $\tau_1(k+r) \in \gamma(\mathfrak{M}_1 r$) і комплект $[f]$ означено як вище. Розділеною різницею комплекта $[f]$, складеного по набору будемо називати величину:

Означення 4. Нехай зафіксовано: числа $k \epsilon N$ та $r \epsilon N_0, M > 0$ – стала, – функція типу k -го модуля неперервності, система множин $\mathfrak{M}_r$.

Класом $MW^r H[k, \mathfrak{M}_r; \varphi]$ називається множина всіх визначених на системі $\mathfrak{M}_r$ комплектів $[f]$, для кожного з яких при будь-якому наборі $\tau_1(k+r) \epsilon \gamma(\mathfrak{M}_1 r$) виконується нерівність:

$$\|[\tau_{k+r}; [f]]\| \le M\Lambda_{k,r}(\tau_{k+r}; \varphi) \qquad (0.11)$$

Як і раніше позначимо:

$$W^r \breve{H}[k, \mathfrak{M}_r, \varphi] = 1 W^r \breve{H}[k, \mathfrak{M}_r, \varphi];$$

$$W^r H_1 k^\uparrow \varphi\, [(\mathfrak{M}_1 r\,] = \cup_1(M > 0) \, [MW^r H[k, \mathfrak{M}_1 r, \varphi]\,] .$$

Нехай $\breve{Y}$ - клас комплектів $[g]$, визначених на системі множин $\mathfrak{M}_r$, а Y – клас функцій заданих на R . Будемо говорити, що комплект $[g]$ можна продовжити до деякої функції $\bar{g} \epsilon Y$, якщо при кожному значенні $s \epsilon \{0,1,2,\ldots,r\}$ і будь-якому $x \epsilon E^{(s)}$, $\bar{g}^{(s)}(x) = g_s(x)$.

Означення 5. Будемо говорити, що клас $\breve{Y}(\mathfrak{M}_r)$ є слідом на системі множин $\mathfrak{M}_r$ класу $Y(R)$, якщо:

а) для кожної функції $\bar{g} \epsilon Y(R)$ комплект $[\bar{g}]$, визначений на системі множин формулою:

$[\bar{g}(x)] = (\bar{g}(x), \bar{g}^1(x), \ldots, \bar{g}^{(s)}(x))$, де $s \epsilon \{0,1,2,\ldots,r\}$, $x \epsilon E^{(s)} \setminus E^{(s+1)}$, належить класу $\breve{Y}(\mathfrak{M}_r)$;

б) будь-який комплект $[g] \epsilon \breve{Y}(\mathfrak{M}_r)$ можна продовжити до функції $\bar{g} \epsilon Y(R)$.

Розглянемо деякі відомі теореми про сліди(доведення яких наведені у магістерській роботі), які ґрунтуються на вище введених поняттях.

Теорема 1. Для кожної функції $f \epsilon W^r H[k, R, \varphi]$ і будь-якого набору τ_{k+r} має місце нерівність:

$$\|[x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0p_0}, \ldots, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{jp_j}, \ldots, x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{lp_l}; f]\| \le c\Lambda_{k,r}(x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0p_0}, \ldots, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{jp_j}, \ldots, x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{lp_l}; \varphi)$$

в якій $c = c(k,r)$ залежить тільки від k та r .

Теорема 2.

Для будь-якої не зростаючої системи $\mathfrak{M}_r$ будь-якого комплекту $[f] \epsilon W^r \breve{H}[k, \mathfrak{M}_r; \varphi]$ знайдеться функція $\bar{f}(x) = \bar{f}$ така, що:

а) при будь-якому $s \epsilon \{0,1,2,\ldots,r\}$ і всіх $x \epsilon E^{(s)}$ її похідна порядку s буде дорівнювати функції $f_s(x)$, тобто $\bar{f}^{(s)}(x) = f_s(x)$, якщо $x \epsilon E^{(s)}$ та

б) $\bar{f} \epsilon cW^r H(k; R; \varphi)$, де $c = c(k,r)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Брудный Ю. А. О локальном приближении функций многочленами/ Докл. АН СССР. – 1965. – 161, №4. – С. 746-749.
2. H. Whitney. Differentiable functions defined in closed sets/ Trans. Amer. Math. Soc., 36(1934), №2, p. 369-387.
3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. – Второе изд., доп.. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.
4. Дзядык В. К. К теорииприближенияфунций на замкнутих множествахкомплекснойплоскости/ Тр. МИАН СССР. – 1975. – 225, №3. – С. 63-114.
5. Дзядык В. К., Шевчук И. А. Продолжение функцій, являющихся на произвольноммножествепрямойследами функцій с заданнымвторым модулем непрерывности/ Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1983. – 47, №2. –С. 248-267.
6. C. De Boor. On uniform approximation by splines/ J. Approxim. Theory. – 1968. – 1. – p. 219-262.
7. Jonsson A. The trace of the Zygmund class Λ to closed sets and interpolating polinomials/ Sweden. - 1980. – n.7. – 15 p.
8. Merrien J. Prolongatenrs de functions differentiablesd’une variable rulle/ J. Math. Pures App. – 1966. – 45. – p. 291-309.
9. Шварцман П. А. О следах функций двух переменных, удовлетворяющих условию Зигмунда/ Исследования по теории функций многих вещественных переменных; Межвузовский тематический сборник. – Ярославль.: Ярославский государстенный университет. – 1982. – С. 145-168.