Тобто, передавши у функцію через URL певні параметри і при умові, що ця функція повертає $data, ми отримаємо дані у форматі JSON.

Оскільки останнім часом великого значення набула персоналізація контенту, доцільно розглянути механізм автентифікаціїз мобільного пристрою за допомогою REST API, який реалізованозасобамиCakePHP. Зважаючи на той факт, що зараз більшість інтернет-ресурсів включають в себе велику кількість веб-сервісів пов'язаних між собою,розглянемо той випадок коли автентифікація реалізується з використанням LDAP-сервера.Користувачу, якийпройшовпроцедуру автентифікації, потрібно вивести певні персональні дані з бази даних. Для реалізації поставленого завдання нам необхідно отримати дані і відправити назад результат їх обробки на мобільний пристрій. У результаті опрацювання матеріалів та проведених досліджень, використовуючи фреймворкCakePHP,вдалося реалізувати REST API функцію, що й виконує поставлене завдання.

Існує цілий ряд проблем які вирішуються за допомогою фреймворкуCakePHP. Серед них не лише написання API для роботи з мобільними технологіями, а й створення найрізноманітніших веб-додатківта повноцінних сайтів. Використання CakePHP полегшує та спрощує роботу веб-програміста. Також швидкість обробки скриптів написаних на CakePHP є більшою ніж скриптів найпоширеніших CMS (Joomla, WordPress)

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. CodyFauser, JamesMacAulay. Rails 3 in a Nutshell. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ofps.oreilly.com/titles/9780596521424/activeresource_id59243.html
2. JSON and XML views. CakePHPbook.[Електронний ресурс].– Режим доступу:http://book.cakephp.org/2.0/en/views/json-and-xml-views.html
3. Архитектура REST.[Електронний ресурс].– Режим доступу:http://habrahabr.ru/post/38730/
4. Немного о том какорганизовывать API веб-службы.[Електронний жернал].– Режим доступу:http://habrahabr.ru/post/127243/

Островська Л. І.

Науковий керівник – доц. Кравчук В.Р.

НАБЛИЖЕННЯ СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ МНОГОЧЛЕНАМИ ЗА *А*-МЕТОДОМ

Майже в усіх галузях прикладної математики важливу роль відіграють задачі апроксимації «більш складних» функцій «менш складними». Такі задачі виникають при обробці експериментальних даних, чисельному диференціюванні та інтегруванні тощо. Тому важливо знати основні методи, результати і задачі теорії наближення функцій.

Найбільш простим і найбільш вивченим апаратом наближення функцій є множина многочленів або (у випадку періодичних функцій) множина тригонометричних поліномів заданого порядку n. У використанні на практиці дуже зручними є многочлени. Щоб утворити многочлен досить задати тільки скінченну кількість його коефіцієнтів. Значення многочлена просто обчислити, його легко продиференціювати, проінтегрувати.

Якщо здійснюють наближення деякої функції многочленами і при цьому виходять лише із властивостей даної функції, то кажуть, що здійснюють апроксимацію даної функції. Існують різні методи апроксимації функцій многочленами, кожний з яких забезпечує певну «точність» наближення.

Наближення функцій можна здійснювати за допомогою частинних сум n-го порядку ряду Тейлора цих функцій, які отримуються з ряду Тейлора, якщо в ньому відкинути всі члени починаючи з деякого. Таких частинних сум достатньо для розв'язання багатьох задач з аналізу, геометрії та механіки, зокрема тих, де необхідне локальне наближення функції, тобто її наближення в малому околі деякої точки. Проте у задачах, де потрібно наближати функцію на деякій фіксованій множині точок (зокрема, на відрізку), частинні суми n-го порядку ряду Тейлора є не найкращими для наближення.

У даній роботі при наближенні степеневої функції функції $y = (1 + x)^{\alpha}$ многочленами n-го степеня використано A-метод, розроблений В. К. Дзяди-ком [1]. Суть цього методу така.

Нехай функція $y(x)$, $x\in[-h;h]$, є розв'язком задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з многочленними коефіцієнтами виду

$$a_0(x)y^{(k)}+a_1(x)y^{(k-1)}+\ldots+a_k(x)y=p(x),\ y^{(j)}(0)=y_j,\ j=\overline{0,k-1},$$

де $a_j(x)$, $j=\overline{0,k}$, і $p(x)$ — деякі многочлени, причому $a_0(x)\ge c=const>0$ для будь-якого $x\in[-h;h]$.

Для побудови многочлена $y_n(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$, який здійснює наближення функції $y(x)$, згідно A-методу потрібно:

1) замінити задачу Коші еквівалентним їй інтегральним рівнянням (шляхом послідовного інтегрування за частинами на проміжку $[0;x]$ записаного вище диференціального рівняння)

$$a_0(x)y(x)=\int_0^x K_m(x,t)y(t)dt+P(x);$$

де m — «параметр» наведеної задачі Коші, який визначають за формулою $m=\max\limits_{0\le j\le k}(\deg a_j(x)+j-1)$, $K_m(x,t)$ — многочлен від змінних x і t, сума показників степенів при яких не перевищує *m*, $P(x)$ — *k*-й інтеграл від $p(x)$ на проміжку $[0;x]$;

2) коефіцієнти многочлена $y_n(x)$ шукати із рівняння

$$a_0(x)y_n(x)=\int_0^x K_m(x,t)y_n(t)dt+P(x)+\sum_{i=n+2}^{m+n+1}\tau_iT_i\left(\frac{x}{h}\right),$$

де τ_i — деякі параметри, а $T_i(t)$ — многочлени Чебишова степеня i.

Для ряду функцій побудовані за A-методом многочлени задовольняють наступну рівність

$$\|y(x)-y_n(x)\|_{C[-h;h]}=\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)E_n(y)_{C[-h;h]},$$

тобто вони здійснюють асимптотично найкраще наближення функції $y(x)$.

Побудуємо за A-методом многочлен *n*-го степеня для наближення функції $y(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x\in[-h;h]$, де $\alpha\in(0;1)$, $h\in(0;1)$.

Лема. Для будь-якого $n\in Z^+$ алгебраїчний многочлен

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k, \qquad (1)$$

де

$$c_k=\tau\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\frac{(-1)^i(n+1)(n-i)!2^{n-2i}}{i!k!(\alpha-k)(\alpha-k-1)\ldots(\alpha-n+2i)h^{n+1-2i}}, \qquad (2)$$

$$\tau=\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^i(n+1)(n-i)!2^{n-2i}}{i!\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2i)h^{n+1-2i}}+t_0\right)^{-1}, \qquad (3)$$

має ту властивість, що для всіх $x\in[-h;h]$ виконується рівність

$$y(x)-y_n(x)=\frac{\tau}{1+x}\left(T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)+(1+\alpha)(1+x)^{1+\alpha}\int\limits_0^x(1+t)^{-2-\alpha}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right).$$

(4)

де $T_{n+1}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n+1}t_i x^i$ — многочлен Чебишова степеня $n+1$.

Доведення. Функція $y=(1+x)^{\alpha}$, $x\in[-h;h]$, де $\alpha\in(0;1)$, $h\in(0;1)$, є розв'язком задачі Коші

$$(1+x)y'=\alpha y,\quad y(0)=1. \qquad (5)$$

Справді, $y'=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, тому $(1+x)y'=\alpha(1+x)^{\alpha}=\alpha y$; до того ж $y(0)=1^{\alpha}=1.$

Замінимо задачу Коші еквівалентним їй інтегральним рівнянням Воль-терра. Врахувавши початкову умову, проінтегруємо рівняння $(1+x)y'=\alpha y$ по змінній t у межах від 0 до x, отримаємо інтегральне рівняння

$$(1+x)y(x)=1+(\alpha+1)\int\limits_0^x y(t)dt\,. \qquad (6)$$

Функцію $y=(1+x)^{\alpha}$, $x\in[-h;h]$, будемо наближати многочленом

$$y_n(x)=\sum_{j=0}^{n}c_{n-j}x^{n-j},$$

який шукатимемо, виходячи з інтегрального рівняння (6), а саме:

$$(1+x)y_n(x)=(1+\alpha)\int\limits_0^x y_n(t)dt+1-\tau T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right), \qquad (7)$$

де τ — деяка стала. Із цього рівняння маємо:

$$(1+x)(c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n)=(1+\alpha)\left(c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+\ldots+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)+1-$$

$$-\tau\left(t_0+t_1\frac{x}{h}+\ldots+t_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1}\right), \qquad (8)$$

де t_i, $i=\overline{0,n+1}$ — коефіцієнти многочлена Чебишова $T_{n+1}(x)$.

Прирівнявши в (8) коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо $n+1$ рівняння з $n+1$ невідомими $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ і τ. Розв'язавши систему цих рівнянь, одержимо формули (2) для коефіцієнтів многочлена $y_n(x)$ та формулу (3) для τ.

Розглянемо різницю $(1+x)^{\alpha}-y_n(x)$ Позначимо:

$$(1+x)^{\alpha}-y_n(x)=r_n(x)\,. \qquad (9)$$

Від рівності (6) віднімемо почленно рівність (7):

$$(1+x)(y(x)-y_n(x))=(1+\alpha)\int\limits_0^x(y(t)-y_n(t))dt+\tau T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right).$$

Врахувавши позначення (9), отримаємо

$$(1+x)r_n(x)=(1+\alpha)\int_0^x r_n(t)dt+\tau T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right) \qquad (10)$$

Знайшовши $r_n'(x)$ та $r_n(0)$, замінимо дане інтегральне рівняння еквівалентною йому задачею Коші:

$$(1+x)r_n'(x)=\alpha r_n(x)+\frac{\tau}{h}T_{n+1}'\left(\frac{x}{h}\right), \quad r_n(0)=\tau t_0. \qquad (11)$$

Розв'язком цієї задачі Коші є функція

$$r_n(x)=\frac{\tau}{1+x}\left(T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)+(1+\alpha)(1+x)^{1+\alpha}\int_0^x(1+t)^{-2-\alpha}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right). \qquad (12)$$

Покажемо, що це справді так.

$$r_n(0)=\tau\left(T_{n+1}(0)+(1+\alpha)\int_0^x(1+t)^{-2-\alpha}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right)=\tau t_0.$$

$$r_n'(x)=\tau\left(\frac{1}{h(1+x)}T_{n+1}'\left(\frac{x}{h}\right)-\frac{1}{(1+x)^2}T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha(1+x)^{\alpha-1}\int_0^x(1+t)^{-2-\alpha}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt+\frac{1+\alpha}{(1+x)^2}T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)\right);$$

$$(1+x)r_n'(x)=\tau\left(\frac{1}{h}T_{n+1}'\left(\frac{x}{h}\right)+\frac{\alpha}{1+x}T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)+\alpha(1+x)^{\alpha}\int_0^x(1+t)^{-2-\alpha}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right)=$$

$$=\alpha r_n(x)+\frac{\tau}{h}T_{n+1}'\left(\frac{x}{h}\right).$$

Отже, розв'язком задачі Коші (11) та інтегрального рівняння (10) справді є функція (12).

Це означає, що при всіх $x\in[-h;h]$ виконується рівність (4).

Лему доведено.

Теорема. Якщо $y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$ — многочлен, побудований за *A*-мето-дом для наближення функції $y=(1+x)^{\alpha}$, $x\in[-h;h]$, то:

$$\left\|(1+x)^{\alpha}-y_n(x)\right\|_{C[-h;h]}<\frac{1+h}{1-h}\cdot\frac{1+|\alpha_n|}{1-|\alpha_n|}E_n\left((1+x)^{\alpha}\right)_{C[-h;h]},$$

де $|\alpha_n|<\dfrac{2h(1+\alpha)(1+h)^{\alpha-1}}{n}$.

Доведення. Оцінимо відхилення $\left\|(1+x)^{\alpha}-y_n(x)\right\|_{C[-h;h]}=\left\|r_n(x)\right\|_{C[-h;h]}$. Запишемо рівність (12) у вигляді

$$r_n(x)=\frac{\tau}{1+x}\left(T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)+\alpha_n\right). \qquad (13)$$

де $\alpha_n=(1+\alpha)(1+x)^{1+\alpha}\int\limits_0^x(1+t)^{-2-\alpha}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt.$

Далі використаємо таку оцінку [2]:

$$\left|\int\limits_0^x T_n\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|<\frac{2h}{n-1}, \text{ де } x\in[-h;h],\ n\in N.$$

Оскільки функція $z(t)=(1+t)^{-2-\alpha}$ неперервна і монотонно спадає на відрізку $[-h;h]$, то на основі другої теореми про середнє для інтегралів при $x\in[0;h]$ матимемо:

$$|\alpha_n|=\left|(1+\alpha)(1+x)^{1+\alpha}\int\limits_0^x(1+t)^{-2-\alpha}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|=$$

$$=\left|(1+\alpha)(1+x)^{1+\alpha}(1+x)^{-2}\int\limits_0^\theta T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|\le(1+\alpha)(1+h)^{\alpha-1}\left|\int\limits_0^\theta T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|<$$

$$\le(1+\alpha)(1+h)^{\alpha-1}\left|\int\limits_0^\theta T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right|<\frac{2h(1+\alpha)(1+h)^{\alpha-1}}{n},$$

де $\theta\in(0;h)$.

Таким чином, при натуральному $n>2h(1+\alpha)(1+h)^{\alpha-1}$ в усіх точках відрізка $[-h;h]$ виконується нерівність $|\alpha_n|<1.$ В такому випадку згідно (15) відхилення $(1+x)^{\alpha}-y_n(x)=r_n(x)$ в $n+2$ точках $s_k=-h\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k=\overline{0,\ n+1}$, набуває значень з почерговими знаками. Тому на основі теореми Валле-Пуссена:

$$E_n\left((1+x)^{\alpha}\right)_{C_{[-h;h]}}>\min_{k=0,\,n+1}\left|(1+s_k)^{\alpha}-y_n(s_k)\right|=\min_{k=0,\,n+1}\left|\frac{\tau}{1+s_k}\left(T_{2n+5}\left(\frac{s_k}{h}\right)+\alpha_n(s_k)\right)\right|>$$

$$>\frac{|\tau|}{1+h}\left(\left|T_{2n+5}\left(\frac{s_k}{h}\right)\right|-|\alpha_n(s_k)|\right)=\frac{|\tau|}{1+h}(1-|\alpha_n|),$$

звідки

$$|\tau|<\frac{1+h}{1-|\alpha_n|}E_n\left((1+x)^{\alpha}\right)_{C_{[-h;h]}}. \qquad (14)$$

З рівності (13) випливає, що для будь-якого $x\in[-h;h]$:

$$\left|(1+x)^{\alpha}-y_n(x)\right|=\left|\frac{\tau}{1+x}\left(T_{2n+5}\left(\frac{x}{h}\right)+\alpha_n\right)\right|<\frac{|\tau|}{1-h}(1+|\alpha_n|). \qquad (15)$$

Врахувавши дві останні нерівності, матимемо:

$$\left\|(1+x)^{\alpha} - y_n \quad x \right\|_{C_{-h;h}} < \frac{1+h}{1-h}\cdot\frac{1+|\alpha_n|}{1-|\alpha_n|}E_n \quad (1+x)^{\alpha} \quad {}_{C_{-h;h}} .$$

Одержали нерівність в умові теореми. Цим *теорему доведено*.

Отже, побудовані многочлени здійснюють по порядку найкраще наближення функції $y = (1 + x)^{\alpha}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М. Наука, 1965. — 407с.
2. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Київ: Наук. думка, 1988. — 304 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию рівномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
4. Дзядык В. К. Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций e^x, sin*x* и др. //Укр. мат. журн. — 1973. — 25. №5 — с. 435–453.
5. 5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. — М. Наука, 1983. — 384 с.

Марущак І.

Науковий керівник – доц.Чорний В.З.

ДОСЛІДЖЕННЯ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДВОХТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Актуальність теми. В сучасній науці спостерігається підвищений інтерес до процесів, які проходять в нелінійних системах і середовищах. Математичні моделі таких явищ часто зумовлюють необхідність дослідження розв'язків різних типів нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Тут можна вказати, наприклад задачі математичної біології, електротехніки, механіки, матеріалознавства.

Об'єктом дослідження роботи є нелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь першого порядку порядку.

Предметом дослідження є вивчення існування та побудова розв'язків лінійних двоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку .

Методика дослідження ґрунтується на ідеях чисельно-аналітичного методу послідовних періодичних наближень, запропонованого А.М. Самоленком для нелінійної крайової задачі, а також на його узагальненняхрозроблених А.М. Самойленком та М.Й. Ронто для більш широких класів крайових задач.

Основні завдання роботи:

- розглянути абстрактну схему чисельно-аналітичного методу;
- дослідити нелінійну крайову задачу для диференціального рівняння шляхом побудови еквівалентної задачі з лінійними крайовими умовами;
- встановити необхідні та достатні умови існування розв'язків

Для системи диференціальних рівнянь нормального вигляду

$$\dot{x} = f(t,x), x, f \in E_n, t \in \ 0,T \ , \quad (1)$$

двохточкова крайова задача з лінійними крайовими умовами

$$U(x) = Ax(0) + Cx(T) - d = 0,$$

де А, С – постійні матриці з розмірами $n \times n; d = (d_1, d_2, ..., d_n) -$ постійний вектор

Зрозуміло, що властивості правої частини розглянутих диференціальних рівнянь і задані крайові умови в значній мірі впливають на можливість конструктивної побудови наближених розв'язків або ж на дослідження існування розв'язку крайових задач.