Чезаро, сила яких зростає із ростом параметра, для узагальнених методів Пуассона-Абеля навпаки - їх сила зростає із зменшенням параметра.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барон. Введение в теорию суммируемостирядов. – Таллин: «Валгус». – 1977.
2. Лотоцкий В.А. О ядрах регулярных положительных преобразований ограниченных последовательностей. – К.: Киевский государственный педагогический институт им. А.М.Горького.–1978.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегральногоисчислений, том II. – М.: «Наука». – 1970.
4. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИНД.– 1951.
5. Borwein D. On a scale of Abel-type summability methods. − Proc. Cambridge philos. Soc., v.53, 1957.

Панчук С.

Науковий керівник –доц. Лотоцький В. А.

ПОШУК МНОГОЧЛЕНА НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ В ПРОСТОРІ L ТА ТЕОРЕМА МАРКОВА

При дослідженні процесів чи явищ у природі та техніці засобами математичного моделювання в ролі моделей часто виступають різноманітні функції, що описують ті чи інші залежності між параметрами об’єктів, що досліджуються. Проте іноді в силу складності отриманих функцій доцільно досліджувати не самі ці функції, а функції, котрі достатньо точно їх наближають. Залежно від вибору способу наближення можемо отримати різні методи оцінки і різні функції наближення.

Розглянемо питання наближення функцій у метриці простору L, тобто простору інтегрованих за Лебегом функцій. Для деякої дійснозначної функції f(x), і функцій $f_1, f_2, \dots f_n$ наближення будемо шукати у вигляді $P_n(x)=\alpha_1 f_1+ \alpha_2 f_2+\dots \alpha_n f_n$, де α_i – дійсні коефіцієнти. $P_n(x)$ називатимемо многочленом найкращого наближення, якщо $\delta = \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$ (тут і далі інтегрування в розумінні Лебега) набуває найменшого можливого значення для заданих f(x), $f_1, f_2, \dots f_n$, при цьому δ називають відхиленням [2]. Це наближення може бути цікавим і з тієї точки зору, що у випадку, коли f(x) інтегровна не тільки за Лебегом, а й за Ріманом, δ є площею фігури обмеженої кривими f(x), P(x), прямими x=a, x=b.

На жаль, невідомі прямі методи відшукання коефіцієнтів многочлена найкращого наближення у просторі L. Проте, виходячи з теореми Маркова, для системи функцій Маркова ми можемо оцінити мінімальне відхилення, а, враховуючи факт існування найкращого наближення, ми можемо його шукати з рівняння $\delta_{\min} = \int_a^b |f(x) - P(x)| dx$, принаймні для деяких елементарних функцій.

Нагадаємо, що дійсні, неперервні на [a,b] функції $f_1, f_2, \dots f_n$ ($n \le \infty$) утворюють систему Маркова відносно цього інтервалу, якщо для будь-якого $k \le n$ функції $f_1, f_2, \dots f_k$ утворюють систему Чебишова відносно [a,b]. Теорема Маркова стверджує, що для неперервної f(x), якщо коефіцієнти полінома $F_k(x,\alpha)= \alpha_1 f_1+ \alpha_2 f_2+\dots \alpha_n f_k$, визначаються з умови $f(x_r)-F_k(x_r,\alpha)=0$ (r=1,2…k), де x_r – нулі полінома $Q_{k+1}(x)$ ($Q_{k+1}(x)=f_k(x)-F_{k-1}(x)$, k=1, 2…), якщо $f(x)-F_k(x,\alpha)$ змінює свій знак в точках x_r і тільки в них, то поліном $F_k(x,\alpha)$ є поліномом найкращого наближення серед усіх поліномів $F_k(x,\mu)$ в метриці простору L(a,b), причому $\min_{\mu} \int_a^b |f(x) - F_k(x,\mu)| dx = \int_a^b |f(x) - F_k(x,\alpha)| dx = \left| \int_a^b f(x) sign Q_{k+1}(x) dx \right|$ [1,98].

Розглядатимемо тепер інтервал (-1,1). Очевидно, на ньому (як і на будь-якому іншому) функції 1, x, x^2, x^3…утворюють систему Маркова. Можна показати, що в такому випадку $Q_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}, x_r = \cos\varphi, r = 1,2...n$.

Відшукаємо многочлен найкращого наближення 1-го степеня для функції $f(x)=e^x$, k=1 x_1

$$\begin{cases} Q_2 = \dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} \\ x_1 = \cos\varphi \end{cases}$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо,

$$Q_2(x) = 3 - 4\sin^2\varphi = 3 - (4 - 4\cos^2\varphi) = 3 - 4 + 4x_1 = 4x_1 - 1$$
$$Q_2(x_1) = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{4}.$$

Знайдемо мінімальне відхилення з теореми Маркова. Будемо мати,

$$\left|\int f(x) sign Q_2(x) dx\right| = \left|\int_{-1}^{1/4} -e^x dx + \int_{1/4}^{1} e^x dx\right| = \tag{1}$$
$$= \left|-(e^{1/4} - e^{-1}) + (e - e^{1/4})\right| = \left|e - 2e^{1/4} + e^{-1}\right| = e - 2e^{1/4} + e^{-1},$$

тобто маємо відхилення порядку 0,5. З теореми випливає, що графіки y=e^x і y=α+βx перетинаються в $x_1=\dfrac{1}{4}$ (*). Зважаючи на те, що y=e^x швидко зростає можемо стверджувати, що, по-перше, β>0, по друге, лівіше від точки $x_1=\dfrac{1}{4}$ графік y=α+βx знаходиться вище за графік y=e^x, а правіше – навпаки. Тому відхилення від y=α+βx від y=e^x будемо шукати у вигляді

$$\int_{-1}^{1/4} (\alpha + \beta x - e^x) dx + \int_{1/4}^{1} (e^x - \alpha - \beta x) dx = 2\alpha \frac{1}{4} + \beta\left(\frac{1}{16} - 1\right) + e + e^{-1} - 2e^{1/4} \tag{2}$$

Порівнюючи (1) і (2), матимемо, що $\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{16} = 0$, або $\beta = 8\alpha$. З (*) робимо висновок, що

$$\alpha + \frac{\beta}{4} = e^{1/4},\ \text{звідки}\ \alpha = \frac{e^{1/4}}{3}, \beta = \frac{8}{3}e^{1/4}.$$

Отже, на [a,b] функцію y=e^x з усіх алгебраїчних многочленів першого степеня найкраще наближає $y = \dfrac{e^{1/4}}{3} + \dfrac{8}{3}e^{1/4}x$.

Отже, пошук многочлена найкращого наближення (нагадаємо, що тут маються на увазі не суто алгебраїчні многочлени) носить певні труднощі. В окремих випадках для відшукання такого многочлена можемо застосовувати теорему Маркова, проводячи оцінку мінімального відхилення та шукаючи многочлен, для якого така оцінка справедлива.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. – Москва: Наука, 1965. – 408 с.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами – Москва: Наука, 1977. – 512 с.

Панчук О.

Науковий керівник – доц. Олексюк В. П.