електрооптичні енергії $\hbar\theta_{lh}$, $\hbar\theta_{hh}$ і $\hbar\theta_{SO}$, що відповідають підзонам легких, важких та спін-орбітально відщеплених дірок відповідно. Досліджувались залежності цих фізичних величин від вмісту марганцю в епітаксійних плівках LT–(Ga,Mn)As.

Було, зокрема, встановлено, що енергія переходу E_{SO} в епітаксійних плівках LT–(Ga,Mn)As становить приблизно 1,77 *еВ* та практично не залежить від вмісту марганцю у них (за його вмісту від 0% до 6%). Це може бути зумовлено тим, що підзона спін-орбітально відщеплених дірок знаходиться відносно далеко від рівня Фермі, а тому за невеликих концентрацій марганцю у таких плівках енергія переходу E_{SO} залишається практично сталою. Висловлене, до того ж, дає змогу припустити, що ефективна маса спін-орбітально відщеплених дірок, вірогідно, також практично не залежить від вмісту марганцю в епітаксійних плівках LT–(Ga,Mn)As за його невеликого (до 6%) вмісту у них.

Дослідження проводились за фінансової підтримки Фонду польської науки, Європейського фонду регіонального розвитку, Національної стратегії «Інноваційна Економіка».

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Misiewicz J. Spektroskopia fotoodbiciowa struktur półprzewodnikowych / J. Misiewicz, G. Sęk, P. Sitarek. – Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1999. – 249 s.
2. Yu P. Y. Fundamentals of Semiconductors / P. Y. Yu, M. Cardona. – Berlin: Springer-Verlag, 2010. – 775 p.
3. Сотников А. Е. Спектроскопия фотоотражения с длинноволновой оптической накачкой полупроводниковых лазерных структур / А. Е. Сотников и др. // Квантовая электроника. – 2004. – т. 34. – № 9. – С. 871–874.
4. Кузьменко Р. В. Комбинированная методика исследования многокомпонентных спектров фотоотражения полупроводников / Р. В. Кузьменко, А. В. Ганжа, Э. П. Домашевская // Физика и техника полупроводников. – 2002. – т. 36. – № 1. – С. 52–58.
5. Авакянц Л. П. Автоматизированная установка для регистрации спектров фотоотражения с использованием двойного монохроматора / Л. П. Авакянц, П. Ю. Боков, А. В. Червяков // Журнал технической физики. – 2005. – т. 75. – № 10. – С. 66–68.
6. Матвеєва Л. О. Структурна досконалість і електронні параметри сульфідованої поверхні арсеніду галію / Л. О. Матвеєва, О. Ю. Колядіна, І. М. Матіюк, О. М. Міщук // Фізика і хімія твердого тіла. – 2006. – т. 7. – № 3. – С. 461–467.
7. Звонков Б. Н. Влияние напряжений сжатия и растяжения в слоях GaMnAs на их магнитные свойства / Б. Н. Звонков и др. // Физика твердого тела. – 2010. – т. 52. – № 11. – С. 2124–2127.
8. Ганьшина Е. А. Оптическая и магнитооптическая спектроскопия тонких композитных слоев GaAs-MnAs / Е. А. Ганьшина и др. // Известия РАН. Сер.: физ. – 2008. – т. 72. – № 2. – С. 176–179.
9. Estera J. P. Complex Airy analysis of photoreflectance spectra for III-V semiconductors / J. P. Estera, W. M. Duncan, R. Glosser // Physical review B. – 1994. – vol. 49. – № 11. – P. 7281–7294.
10. Кузьменко Р. Обобщенная многослоевая модель для количественного анализа электромодуляцыонных компонент спектров электроотражения и фотоотражения полупроводников в области фундаментального перехода E_0 / Р. Кузьменко и др. // Физика и техника полупроводников. – 2000. – т. 34. – № 9. – С. 1086–1092.
11. Seraphin B. O. Band-structure analysis from electro-reflectance studies / B. O. Seraphin, N. Botka// Physical rewiev. – 1966. – vol. 145. – № 2. – P. 628–636.
12. Yastrubchak O. Photoreflectance study of the fundamental optical properties of (Ga,Mn)As epitaxial films / O. Yastrubchak and other. – Physical Review B. – 2011. – vol. 83. – P. 245201.
13. Vallée O. Airy functions and applications to physics / O. Vallée, M. Soares. – London: Imperial College Press, 2004. – 195 p.

Стефанчук М.

Науковий керівник – доц. Лотоцький В. А.

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОПУКЛИХ МНОЖИН ТА ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА НИХ В *N*-ВИМІРНОМУ АФІННОМУ ПРОСТОРІ

Наша робота присвячена опуклим множинам і опуклим функціям. У просторі $\mathbf{R}^2$ прикладом опуклої множини може бути будь-який відомий ще школярам опуклий многокутник чи круг, а якщо розглядати дійснозначну функцію однієї змінної, то функція $y = x^2$ є опуклою на всій числовій осі, бо взявши довільний її відрізок, бачимо, що значення цієї функції в будь-якій точці x цього відрізка не більше ординати точки на хорді, що з'єднує кінці відповідної цьому відрізку дуги параболи, абсциса якої теж x. Проте все це ми будемо вивчати в n-вимірному афінному просторі A^n над полем дійсних чисел.

Оскільки твердження про опуклість деякої функції рівносильне твердженню про справедливість певних нерівностей, то під час формулювання та доведення нерівностей велике значення має властивість опуклості розглядуваних функцій. Багато поширених нерівностей, наприклад, нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, є наслідком опуклості пов'язаних з ними функцій.

Множина $X \subset A^n$ називається опуклою, якщо разом з довільними точками $x^1, x^2 \in X$ відрізок, який з'єднує ці точки належить множині X, тобто $(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in X$ при довільному $\lambda \in [0,1]$.

Виявляється, що для встановлення опуклості замкнутих множин достатньо перевірити, чи для довільних $x^1, x^2 \in X$ точка $x = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in X$ не для всіх $\lambda \in [0,1]$, а тільки при деякому $\lambda \in (0,1)$.

Теорема 1. Нехай X – замкнута множина, причому для будь-яких точок $x^1, x^2 \in X$ існує таке число $\lambda \in (0,1)$, що $(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in X$. Тоді множина X опукла.

Доведення. Щоб довести опуклість множини X, потрібно показати, що разом з довільними точками $x^1, x^2 \in X$ відрізок, який з'єднує ці точки належить X, тобто $(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in X$ при довільному $\lambda \in [0,1]$. Припустимо, що множина X не є опуклою. Тобто існує пара точок $x^1, x^2 \in X$ та число $\lambda \in (0,1)$, для яких точка $x = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \notin X$.

Оскільки множина X замкнута, то за означенням замкнутої множини X містить всі свої граничні точки. Значить точка x не буде граничною точкою множини X. Тому знайдеться окіл точки x, в якому не буде жодної точки з множини X. Перетином цього околу з відрізком $[x^1, x^2]$ буде (x', x'').

Перевіримо, чи точки x', x'' будуть граничними точками множини X. З умови випливає, що для точок $x^1, x^2 \in X$ знайдеться $\lambda_1 \in (0,1)$, таке що $y^1 = (1-\lambda_1)x^1 + \lambda_1 x^2 \in X$. При цьому $y^1 \in [x^1, x')$ або $y^1 \in (x'', x^2]$. Нехай, наприклад, $y^1 \in [x^1, x')$. З того, що точки $y^1, x^2 \in X$, згідно умови знайдеться $\lambda_2 \in (0,1)$, таке що $y^2 = (1-\lambda_2)y^1 + \lambda_2 x^2 \in X$, $y^2 \in [y^1, x')$ або $y^2 \in (x'', x^2]$. Нехай $y^2 \in [y^1, x')$. Аналогічно для $y^2, x^2 \in X$ знайдеться $\lambda_3 \in (0,1)$, таке що $y^3 = (1-\lambda_3)y^2 + \lambda_3 x^2 \in X$, $y^3 \in [y^2, x')$ або $y^3 \in (x'', x^2]$. Нехай $y^3 \in [y^2, x')$. І так далі. Таким чином ми побудували послідовність точок $y^1, y^2, y^3, \ldots$ множини X, збіжну до точки x'. А це означає, що x' є граничною точкою множини X. Аналогічно можна побудувати послідовність точок множини X, збіжну до точки x''. Тому x'' є граничною точкою множини X. Оскільки множина X замкнута, то $x', x'' \in X$. За умовою знайдеться таке число $\lambda' \in (0,1)$, що $(1-\lambda')x' + \lambda' x'' \in X$. А це неможливо, бо в інтервалі (x', x'') немає жодної точки множини *X*. Отже, наше припущення неправильне і множина *X* опукла. Теорема доведена.

Умова замкнутості множини *X* у теоремі 1 є суттєвою. Наприклад, нехай множина *X* є кругом з виколотим центром. Тоді вона незамкнута і не опукла (оскільки для відрізка, який проходить через центр круга, і кінці якого належать кругу, одна внутрішніх точок цього відрізка, яка є центром круга, не належить *X*), хоча для довільних точок $x^1, x^2 \in X$ існує $\lambda \in (0,1)$, таке що $(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in X$.

Розглянемо деякі операції, задані на класі опуклих множин, результатами яких є опуклі множини.

Теорема 2. Нехай $X_1,\dots,X_m$ – опуклі множини в просторі A^n, $a_1,\dots,a_m$ – довільні числа. Тоді множина $\sum_{i=1}^m a_i X_i = \{x \mid x = \sum_{i=1}^m a_i x_i, x^i \in X_i, i = 1,\dots, m\}$, яка називається лінійною комбінацією множин $X_1,\dots,X_m$, є опуклою.

Теорема 3. Якщо множина $X \subset A^n$ опукла, то для довільних $\lambda_1 \ge 0$ і $\lambda_2 \ge 0$ виконується рівність $\lambda_1 X + \lambda_2 X = (\lambda_1 + \lambda_2) X$.

Теорема 4. Нехай X_1, X_2 – опуклі множини в A^n. Тоді множина

$$X = \bigcup_{0 \le \lambda \le 1} \left((1-\lambda) X_1 \cap \lambda X_2\right),$$

яка називається інверсною сумою множин X_1, X_2, опукла.

Доведення. Візьмемо дві довільні точки $x^1, x^2 \in X$, тоді знайдуться $0 \le \lambda_1 \le 1$, $0 \le \lambda_2 \le 1$, такі що $x^1 \in (1-\lambda_1) X_1 \cap \lambda_1 X_2$, $x^2 \in (1-\lambda_2) X_1 \cap \lambda_2 X_2$. Звідси $x^1 \in (1-\lambda_1) X_1$ і $x^1 \in \lambda_1 X_2$, $x^2 \in (1-\lambda_2) X_1$ і $x^2 \in \lambda_2 X_2$. Тому для довільного $\alpha \in [0,1]$

$$(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in (1-\alpha)(1-\lambda_1)X_1 + \alpha(1-\lambda_2)X_1;$$

$$(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in (1-\alpha)\lambda_1 X_2 + \alpha\lambda_2 X_2.$$

Для опуклих множин X_1, X_2 за теоремою 3 виконуються рівності

$$(1-\alpha)(1-\lambda_1)X_1 + \alpha(1-\lambda_2)X_1 = \left((1-\alpha)(1-\lambda_1) + \alpha(1-\lambda_2)\right)X_1,$$

$$(1-\alpha)\lambda_1 X_2 + \alpha\lambda_2 X_2 = \left((1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2\right)X_2,$$

при $(1-\alpha)(1-\lambda_1) \ge 0$ і $\alpha(1-\lambda_2) \ge 0$, $(1-\alpha)\lambda_1 \ge 0$ і $\alpha\lambda_2 \ge 0$.

Звідси

$$(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in \left((1-\alpha)(1-\lambda_1) + \alpha(1-\lambda_2)\right)X_1;$$

$$(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in \left((1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2\right)X_2.$$

З двох останніх включень випливає

$$(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in \left((1-\alpha)(1-\lambda_1) + \alpha(1-\lambda_2)\right)X_1 \cap \left((1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2\right)X_2.$$

Позначимо $\lambda = (1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2$. Тоді

$$(1-\alpha)(1-\lambda_1) + \alpha(1-\lambda_2) = 1 - \alpha - \lambda_1(1-\alpha) + \alpha - \alpha\lambda_2 = 1 - \lambda.$$

Оцінимо число $\lambda = (1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2 = \lambda_1 + \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)$:

$$0 \le \lambda_1 = \lambda_1 + 0 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \le \lambda_1 + \alpha(\lambda_2 - \lambda_1) \le \lambda_1 + 1 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_2 \le 1.$$

Оскільки $0 \le \lambda \le 1$, то

$$(1-\lambda)X_1 \cap \lambda X_2 \subset \bigcup_{0 \le \lambda \le 1} \left((1-\lambda) X_1 \cap \lambda X_2\right) = X.$$

Для довільних $x^1, x^2 \in X$ і довільного $0 \le \alpha \le 1$ $(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in X$. А це означає, що множина *X* опукла. Теорема доведена.

Теорема 5. Нехай $X_1,\dots, X_m$ – опуклі множини простору A^n, Λ – опукла множина в A^m, причому $\Lambda \subset A_+^m$. Тоді множина $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i\right)$, де $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ опукла.

Доведення. Візьмемо дві довільні точки $x^1, x^2 \in X$. Тому знайдуться $\lambda^1 = (\lambda_1^1,\dots,\lambda_m^1) \in \Lambda$ і $\lambda^2 = (\lambda_1^2,\dots,\lambda_m^2) \in \Lambda$, такі що $x^1 \in \sum_{i=1}^m \lambda_i^1 X_i$ і $x^2 \in \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 X_i$. Для довільного $\alpha \in [0,1]$

$$(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in (1-\alpha)\sum_{i=1}^m \lambda_i^1 X_i + \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 X_i = \sum_{i=1}^m \left((1-\alpha)\lambda_i^1 X_i + \alpha\lambda_i^2 X_i\right).$$

Для опуклих множин $X_1,\dots, X_m$ за теоремою 3 виконуються рівності

$$(1-\alpha)\lambda_i^1 X_i + \alpha\lambda_i^2 X_i = \left((1-\alpha)\lambda_i^1 + \alpha\lambda_i^2\right) X_i,\ i = 1,\dots,m,$$

при $(1-\alpha)\lambda_i^1 \ge 0$ (тому що $1-\alpha \ge 0$ і $\lambda_i^1 > 0,\ i = 1,\dots,m,$ бо $\lambda_1 = (\lambda_1^1,\dots,\lambda_m^1) \in A_+^m$) $\alpha\lambda_i^2 \ge 0$ (тому що $\alpha \ge 0$ і $\lambda_i^2 > 0,\ i = 1,\dots,m,$ бо $\lambda_2 = (\lambda_1^2,\dots,\lambda_m^2) \in A_+^m$).

Звідси

$$(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in \sum_{i=1}^m \left((1-\alpha)\lambda_i^1 + \alpha\lambda_i^2\right) X_i.$$

Позначимо $\lambda_i = (1-\alpha)\lambda_i^1 + \alpha\lambda_i^2,\ i = 1,\dots,m.$

Перевіримо, чи точка $\lambda = \left((1-\alpha)\lambda_1^1 + \alpha\lambda_1^2,\dots,(1-\alpha)\lambda_m^1 + \alpha\lambda_m^2\right)$ простору A^m належить множині Λ.

З того, що множина Λ опукла для $\lambda^1 = (\lambda_1^1,\dots,\lambda_m^1) \in \Lambda$ і $\lambda^2 = (\lambda_1^2,\dots,\lambda_m^2) \in \Lambda$ і $\alpha \in [0,1]$, виконуються наступні включення

$$\lambda = \left((1-\alpha)\lambda_1^1 + \alpha\lambda_1^2,\dots,(1-\alpha)\lambda_m^1 + \alpha\lambda_m^2\right) =$$
$$= (1-\alpha)(\lambda_1^1,\dots,\lambda_m^1) + \alpha(\lambda_1^2,\dots,\lambda_m^2) = (1-\alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2 \in \Lambda.$$

Оскільки $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \Lambda$, то

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i\right).$$

Для довільних $x^1, x^2 \in X$ і довільного $0 \le \alpha \le 1$ $(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2 \in X$. А це означає, що множина *X* опукла. Теорема доведена.

Розглянемо опуклі функції, задані на опуклих множинах.

Функція $f : A^n \to A$, яка визначена на опуклій множині $X \subset A^n$, називається опуклою, якщо для довільних $x^1, x^2 \in X$, та довільного $\lambda \in [0,1]$ виконується наступна нерівність

$$f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2). \quad (1)$$

Виявляється, що для неперервних функцій встановлення їх опуклостізначно спрощується. Якщо у випадку довільноїфункції *f*, заданої на опуклій множині, для встановлення її опуклості треба перевірятисправедливістьнерівності (1) для довільних

$x^1, x^2 \in X$, ідовільному $\lambda \in [0,1]$,то для неперервної функціїдосить перевірити тількисправедливістьнерівності (1) при всіх $x^1, x^2 \in X$ і тільки при деякому $\lambda \in (0,1)$. Справді, це підтверджує наступна теорема.

Теорема 6. Нехай *f* – неперервна функція на опуклій множині $X \subset A^n$, причому для довільних точок $x^1, x^2 \in X$ існує число $\lambda \in (0,1)$, таке що $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$. Тоді функція *f* опукла на *X*.

Доведення. Для того, щоб показати опуклість функції *f* на *X*, потрібно довести виконання нерівності $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$ при довільних $x^1, x^2 \in X$ та довільному $\lambda \in [0,1]$. Припустимо, що функція *f* не є опуклою на *X*, тобто нерівність, яка визначає опуклу функцію, не виконується. Тоді знайдуться точки $x^1, x^2 \in X$ та число $\lambda_1 \in (0,1)$, такі, що справедлива нерівність

$$f(\lambda_1 x^1 + (1-\lambda_1)x^2) > \lambda_1 f(x^1) + (1-\lambda_1) f(x^2). \quad (2)$$

З'єднаємо точки $x^1, x^2 \in X$ відрізком, який повністю належить множині *X*, бо *X* – опукла множина. З'єднаємо точки $(x^1, f(x^1))$ та $(x^2, f(x^2))$ відрізком.

З (2) випливає, що точка $(\lambda_1 x^1 + (1-\lambda_1)x^2, f(\lambda_1 x^1 + (1-\lambda_1)x^2))$ лежить вище відрізка $[(x^1, f(x^1)), (x^2, f(x^2))]$. За умовою для точок $x^1, x^2 \in X$ існує $\lambda_2 \in (0,1)$, таке що $f(\lambda_2 x^1 + (1-\lambda_2)x^2) \le \lambda_2 f(x^1) + (1-\lambda_2) f(x^2)$. Звідси випливає, що точка $(\lambda_2 x^1 + (1-\lambda_2)x^2, f(\lambda_2 x^1 + (1-\lambda_2)x^2))$ лежить не вище $[(x^1, f(x^1)), (x^2, f(x^2))]$. Оскільки функція *f* неперервна на *X*, то за теоремою про проходження неперервної функції через довільне проміжне значення для довільного числа $\lambda'' f(x^1) + (1-\lambda'') f(x^2)$, де $\lambda'' \in (0,1)$, з інтервалу $(f(x^1), f(x^2))$ на довільній неперервній кривій, що з'єднує точки $x^1, x^2 \in X$ та належить *X* (зокрема на $[x^1, x^2]$) знайдеться точка $\lambda' x^1 + (1-\lambda')x^2$, $\lambda' \in (0,1)$, така що $f(\lambda' x^1 + (1-\lambda')x^2) = \lambda'' f(x^1) + (1-\lambda'') f(x^2)$. Це означає, що крива, яка є звуженням графіка функції *f* на $[x^1, x^2]$, перетне відрізок $[(x^1, f(x^1)), (x^2, f(x^2))]$ певну кількість разів. Тому знайдутьсятакі точки $x^i, x^{i+1} \in [x^1, x^2]$, для яких точки $(\lambda x^i + (1-\lambda)x^{i+1}, f(\lambda x^i + (1-\lambda)x^{i+1}))$ для довільного $\lambda \in (0,1)$ будуть знаходитися вище відрізка $[(x^i, f(x^i)), (x^{i+1}, f(x^{i+1}))]$, тобто виконується нерівність $f(\lambda x^i + (1-\lambda)x^{i+1}) > \lambda f(x^i) + (1-\lambda) f(x^{i+1})$ при довільному $\lambda \in (0,1)$. А це суперечить умові, що для довільних $x^1, x^2 \in X$ існує число $\lambda \in (0,1)$, таке що $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$. Тому припущення неправильне і функція*f* опукла на *X*. Теорема доведена.

Розглянемо деякі операції над опуклими функціями, результатами яких є опуклі функції.

Теорема 7.Нехай *X* – опукла множина. Якщо $f_i(x)$, $i = 1,2,...$ – опуклі рівномірно обмежені функції на *X*, α_i, $i = 1,2,...$ – невід'ємні числа і $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$, то функція $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x)$ опукла на *X*.

Доведення. Оскільки $f_i(x)$, $i=1,2,...$ рівномірно обмежені функції на *X*, то $\exists M>0:\forall x\in X,\forall i\in N\Rightarrow\left|f_i(x)\right|\le M$.

Оскільки $f_i(x)$, $i=1,2,...$ опуклі на *X*, то для $\forall x^1,x^2\in X$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $\alpha_i\ge 0$, виконуються нерівності

$$f_i(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\le\lambda f_i(x^1)+(1-\lambda)f_i(x^2),\ i=1,2,...;$$

$$\alpha_i f_i(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\le\lambda\alpha_i f_i(x^1)+(1-\lambda)\alpha_i f_i(x^2),\ i=1,2,...;$$

$$\left|\alpha_i f_i(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\right|\le\left|\lambda\alpha_i f_i(x^1)\right|+\left|(1-\lambda)\alpha_i f_i(x^1)\right|\le M\alpha_i.$$

Знакододатній збіжний ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ є мажорантним для функціонального ряду $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x)$ на *X*, тому за теоремою Вейєрштрасса ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x)$ збіжний навіть рівномірно на *X*. Далі, для $\forall x^1,x^2\in X$, $\forall\lambda\in[0,1]$ виконується нерівність

$$f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\le$$

$$\le\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x^1)+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x^2)=\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2),$$

а це означає, що функція $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x)$ опукла на *X*. Теорема доведена.

Теорема 8. Нехай *X* – опукла множина. Якщо $\varphi(x,t)$ – функція на $X\times[0,1]$, що опукла по *X* для кожного $t\in[0,1]$ і інтегровна по *t* на $[0,1]$ для кожного $x\in X$, $\alpha(t)$ – невід'ємна інтегровна функція на $[0,1]$, то функція $f(x)=\int_0^1\varphi(x,t)\alpha(t)dt$ опукла на *X*.

Доведення. Оскільки функція $\varphi(x,t)$ опукла по *X* для кожного $t\in[0,1]$, то за означенням опуклості для $\forall x^1,x^2\in X$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $\alpha(t)\ge 0$, $t\in[0,1]$ виконуються нерівності

$$\varphi(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2,t)\le\lambda\varphi(x^1,t)+(1-\lambda)\varphi(x^2,t);$$

$$\varphi(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2,t)\cdot\alpha(t)\le\lambda\varphi(x^1,t)\cdot\alpha(t)+(1-\lambda)\varphi(x^2,t)\cdot\alpha(t).$$

Оскільки $\varphi(x,t)$ і $\alpha(t)$ інтегровні по *t* на $[0,1]$, то функція $\varphi(x,t)\cdot\alpha(t)$ інтегровна по *t* на $[0,1]$. За властивістю інтегралів виконується нерівність

$$f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)=\int_0^1\varphi(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2,t)\cdot\alpha(t)dt\le$$

$$\le\int_0^1\left(\lambda\varphi(x^1,t)\cdot\alpha(t)+(1-\lambda)\varphi(x^2,t)\cdot\alpha(t)\right)dt=$$

$$=\lambda\int_0^1\varphi(x^1,t)\cdot\alpha(t)dt+(1-\lambda)\int_0^1\varphi(x^2,t)\cdot\alpha(t)dt=\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2).$$

А це означає, що функція $f(x)=\int_0^1\varphi(x,t)\alpha(t)dt$ опукла на *X*. Теорема доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества: Пер. с нем. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 336 с.

2. Моклячук М. П. Основи опуклого аналізу. Навчальний посібник. – Київ, Видавництво ТВіМС, 2004. – 236 с.
3. Рокафеллар Р. Выпуклыйанализ: Пер. с англ. – М.: Издательство «Мир», 1973. – 470 с.

Семенишина О.

Науковий керівник – доц. Дідора Т. Д.

ДИДАКТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИНЦИПУ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПРИ ДИСТАНЦІЙНОМУ НАВЧАННІ НА ПРИКЛАДІ КУРСУ «ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА»

Перед освітою стоїть завдання створити таку систему освіти, яка забезпечить умови для ефективної реалізації особистості, розвитку її творчого потенціалу, формування її життєвих компетенцій, уміння взаємодіяти з іншими в процесі діяльності. Основна увага зосереджується на умінні самостійно здобувати потрібну інформацію і застосовувати її у практичній діяльності.

Компетентність — знання, уміння, навички та досвід, які формують професійні властивості фахівця для якісного виконання ним професійних функцій.

Формування компетентності студентів виступає в якості головної мети: підготовки кваліфікованого працівника відповідного рівня і профілю, конкурентоспроможного на ринку праці, відповідального фахівця, що буде володіти своєю професією і орієнтуватися в суміжних областях знань, здатного до ефективної роботи за фахом на рівні світових стандартів, готового до постійного професійного росту. Який буде володіти соціальною та професійною мобільністю і прагнути до отримання якісної освіти. Тому формування компетентності на даний момент є домінуючим у самовдосконаленні фахівця.

Сучасному викладачеві необхідні гнучкість і нестандартність мислення, вміння адаптуватися до швидких змін умов життя. А це можливо лише за умови високого рівня професійної компетентності, наявності розвинених професійних здібностей. Ця проблема зафіксована у державній національній програмі «Освіта», де наголошується, що один з головних шляхів реформування освіти полягає в необхідності «підготовки нової генерації педагогічних кадрів, підвищення їх професійного та загальнокультурного рівня» [2, 8].

Світовий досвід свідчить про інтенсивний розвиток саме дистанційних форм навчання, які надають можливість постійно поповнювати професійні знання широким верствам населення і виводять дистанційне навчання (ДН) на інший якісно новий рівень розвитку сучасної освіти, що забезпечує безпосереднє спілкування між викладачем і студентом [5, 15].

Дистанційна освіта зручна тим, що дозволяє:

- Навчатися у відповідності до свого темпу, особистісних особливостей і освітніх потреб.
- Не обмежувати себе у виборі навчального закладу попри своє місцеперебування.
- Використовувати під час процесу навчання сучасні технології, які згодом знадобляться під час роботи.
- Самостійно планувати час та розклад занять, а також перелік дисциплін, що вивчаються.
- Навчатися у найбільш приємній та сприяючій продуктивності обстановці, створюючи для себе сприятливу атмосферу.
- Навчальне інформаційне середовища включає: комп’ютерні інформаційні джерела, електронні бібліотеки, відео- і аудіотеки, книги і навчальні посібники.
- Дистанційне навчання- індивідуалізований процес передання і засвоєння знань, умінь, навичок і способів пізнавальної діяльності людини, який відбувається за опосередкованої взаємодії віддалених один від одного учасників навчання у спеціалізованому середовищі, яке створене на основі сучасних інформаційно-комунікаційних та психолого-педагогічних технологій. Дистанційне навчання - це навчання без кордонів, відкрите і доступне для всіх, незалежно від того місця, де людина живе.

Для організації навчального процесу, заснованого на дистанційній освіті, застосовується ряд технологій. **Основні технології дистанційного навчання – це [3, 42]:**